OPERUM NEWTONI

TOMUS PRIMUS.

ISAACI NEWTONI

OPERA

QUÆ EXSTANT OMNIA.

COMMENTARIIS ILLUSTRABAT

SAMUEL HORSLEY, LL. D. R. S. S.

REVERENDO ADMODUM IN CHRISTO PATRI

ROBERTO EPISCOPO LONDINENSI A SACRIS.

LONDINI:

EXCUDEBAT JOANNES NICHOLS.

M DCC LXXIX.

A D

R E G E M.

QUOD eorum, Rex Augustissime, perpaucis contigit, quorum animos ſtudium inceſſerat, in magno aliquo opere, Te Patronum compellandi, ut Principem ii ſuum cum muneribus non indignis videantur adiiſſe; id mihi eveniſſe, imperare mihi nequeo quin palam glorier. Nec vereor ut ea ſit hominis leviculi, et nimium ſibi arrogantis gloriatio. Haud enim noſtra ſunt hæc Opera, quæ Tibi dona fero, ſed Newtoni. Ejus utique viri, cujus ſingularis ac divina quædam excellentia ingenii pulcherrimum illud præconium apud exteros etiam eſt conſecuta, "hunc hominem unum fuiſſe, poſt natos homines, "qui minùs gentis ſuæ quâ oriundus fuit, et ætatis quâ vixit, "quàm generis humani ornamento natus eſſe videretur." Qui primùm reconditam illam Mathematicorum ſcientiam ad illud perduxit faſtigium, quod vel principes illi viri Conon et Archimedes, ſi reviviſcere poſſent, mirarentur. Ita quæ illis difficillima erant, hic facillima reddidit; quæ verò illi nullâ arte ſuperari poſſe ſperaverant, hic, quantum vel uſus Mechanicês poſtulet, vel ad rerum naturalium inquiſitionem ſatis ſit, ſuperavit.

ſuperavit. Tum verò Phyſicam ingreſſus, Geometriâ illâ ſuâ facem præferente, quantas ibi tenebras diſcuſſit, quæ opinionum commenta delevit! Soli ſuam in centro Mundi ſedem vindicavit. Non ut ante eum Copernicus, et Veterum nonnulli à Philolao profecti, conjecturâ tantùm et probabili ratione fretus, ſed certiſſimis rationum concluſionibus, quas ex iis ipſis deduxit, quæ Aſtronomi in cælis fieri quotidie cernunt. Importuno Vorticum onere cælos liberavit; quippe Orbes Solidos jam olim diſturbaverant machinæ Tychonis. Fibras etiam ſuſtulit, quas, magneticâ virtute præditas, in corpore ſolari aliiſque cæleſtibus Keplerus poſuerat. Planetas vi proprii ponderis in orbe quemque ſuo retineri oſtendit. Eâdem vi Cometas circa Solem in orbem agi. Vagum et multiplicem Lunæ curſum calculis etiam ſubjicere docuit; ponderis ejus tam in Solem quàm in Terram ratione habitâ. Feliciſſimam Kepleri conjecturam de cauſâ Æſtus Marini, inviſtiſſimis rationibus, calculis etiam ſuffragantibus, firmavit. Figuræ corporis Terræ quænam ratio ſit, oſtendit; ut, ob propriam ejus circa axem ſuum vertiginem, ſub polis planior fiat, mediis partibus turgeſcat. Ut inde oriri neceſſe ſit, quod in Horologiis oſcillatoriis uſuvenit, inclinato magis axe lentiùs, erecto incitatiùs incedentibus. Ut etiam à figurâ Terræ inæqualiter globoſâ cauſa arceſſenda ſit, quæ puncta æquinoctialia per ſæcula retrorſum impulit. Spatium vacuum quod Scholæ tantopere reformidârunt, illud quidem rerum Naturam non modò pati, verùm etiam poſtulare oſtendit. Nec ratione tantùm id perſuaſit, ſed rem à ſenſu remotiſſimam ſenſibus quodammodo hominum et oculis ſubjecit; ipſâ quidem experientiâ in corporibus, tum pendulis, tum cadentibus, doctrinam ejus mirè comprobante. Luminis Naturam, quæ et ipſa olim abditiſſima fuerat, in clarâ luce poſuit. Ita ut occultas omnes,

quæ

quæ vocabantur, qualitates corporibus abjudicârit, & à rerum Naturâ prorſus exulare juſſerit. Nullam enim virtutem, nullam vim, ullius corporis propriam et innatam agnovit, præter unam illam quæ ſenſibus noſtris maximè patet, quam Inertiæ nuncupavit, quamque corporibus omnibus, pro materiæ cujuſque modo, communem ſtatuit. Hâc vi, accedente mutuâ quâdam corpuſculorum omnium nunc appetentiâ nunc fugâ, omnia voluit pro notiſſimis legibus mechanicis *magnum per Inane geri.* Appetentiam illam et fugam non corporibus ipſis naturalem ſtatuit; non cum Epicuro æternam, eandem tamen fortuitam; non à Veterum quorundam Amore et Odio, Juniorum Sympathiâ et Antipathiâ profectam; ſed à cauſâ quâdam incorporeâ, quæ, ut ſenſus noſtros maximè lateat, intellectum tamen et mentis aciem haud fugit. A Deo utique hæc omnia proficiſci palam vociferatus eſt. Hujus arbitrio omnia fuiſſe procreata, hujus Imperio ſubeſſe, hujus conſilio et ſapientiâ regi. Hunc rerum omnium Opificem, Conditorem, Dominum; Unum, Potentiſſimum, Æternum, Immenſum; ſine quo non pulcherrimus hic rerum ordo, non Res ulla, non Locus rerum ullus, non Tempora et Ætates, non Spatium ipſum vacuum, non Tempus individuum Æternitatis eſſet. Hunc ex aſſiduâ Naturæ contemplatione nôſſe plurimarum ſuarum vigiliarum maximum jucundiſſimumque fructum habuit. Nec ſatis tamen habuit ex Naturâ eum nôſſe, niſi uberior ejus ſolaque ſalutaris cognitio accederet, ex Filii ejus Evangelio unicè haurienda. Igitur in libris Sacri Codicis, non legendis modò, verùm etiam illuſtrandis, plurimum temporis et ſtudii poſuit. Neque inclinatâ ſolum id ætate, quod nonnulli perſuadere volunt, et ſenio jam hebetatâ mentis acie, ſed integris adhuc et cum maximè vigentibus corporis animique viribus. Neque alio conſilio Temporum emendationem ſuſcepiſſe videtur, niſi ut

 antiquiſſimis

antiquiſſimis Hiſtoricis Sacris ſua conſtaret fides; tum hominum monumentis, tum cæli converſionibus comprobata. Quippe cùm indiciis rerum vetuſtiſſimarum undique conquiſitis, temporum diſtributionibus ad calculos revocatis, motuum etiam cæleſtium ratione exquiſitè habitâ, eam omninò ſe obtinuiſſe conſideret humani generis novitatem, quæ cum Telluris noſtræ Archæologiâ Sacrâ optimè conſiſteret. Sed in excutiendis tam perantiquis illis Danielis quàm recentioribus Divi Joannis vaticiniis diligentiâ haud minore uſus eſt. Haud eâ mente, quòd temporis futuri exitum, à ſapientiſſimo rerum Conditore altâ nocte merſum, improbo conatu in lucem poſſe protrahi ſperaret: quippe inſipientis id fuiſſet, ultra hominem voluiſſe ſapere. Sed ut vaticinia multis retro ſæculis edita cum hominum memoriâ conferendo, oſtenderet Naturæ de Deo judicium (quod et ipſum quidem certiſſimum et reverâ divinum eſt) alio et apertiore longè Dei ipſius de ſe teſtimonio confirmari; unde docti æquè indoctique intelligerent Dei nutu et providentiâ omnia geri. Simul ut hominibus perſuaderet, ſanctos illos viros, qui ea prædixerant futura, quæ ſæcula pòſt nata fieri viderunt, Dei numine afflatos: nec vana ideo eos ceciniſſe, quæcunque de interitu hujus Mundi cecinere, de Improborum apud Inferos ſupplicio, de ævo beato, quod Boni et Fideles, Chriſti ſanguine redempti, cum Deo ſempiternum agent. Hanc tantam tamque variam ſummi viri doctrinam, eximias hujus animi præcellentis dotes commendabat ſingularis innocentia vitæ, raraque vel priſcis etiam temporibus morum ſanctimonia. Hujus Viri ſcripta (quæ eſt hominum incuria) ſparſa hunc uſque diem et disjecta, quanquam tertius à quinquageſimo nunc vertatur annus à quo è vivis exceſſit, nunc primùm in unum corpus collecta, Tuis, Rex Optume, auſpiciis in lucem prodire incipiunt. Metuendum eſſet, ne iniquis admodum

temporibus,

temporibus, nisi Te Patronum haberent. Quis enim inter strepitus armorum civilium Philosophiæ locus? Fuisse tamen, in hâc atrocitate temporum, qui Te Fautore et Auctore optimis Scientiis haud segniter operam navârint, ut ipsis non inhonestum, Tibi certè apud posteros etiam gloriosum erit. Nec vana auguror, O Rex. Etenim hanc Tui verissimam laudem non Malorum obtrectatio, non ævi longinquitas abolere poterit: Te regnante, Scientiam tum naturalem tum divinam tanta incrementa cepisse, quanta sub Uno eorum nemine, qui Reges ante Te fuerunt, rebus etiam pacatissimis. Namque Newtonus longissimum suæ vitæ gloriæque curriculum quinque Principum temporibus æquavit. Nondum bis decem Anni sunt cùm Tu regnare orsus es, jamque vidimus remotissimos marium tractus Navibus Tuis plus semel exploratos; Vidimus constitutam, certissimis observationibus Astronomicis, Solis à Tellure nostrâ distantiam; definitam ideo spatii omnis cis Saturnum stellam amplitudinem. Quod repertum etsi ipsa rerum Natura nostris temporibus destinaverit, quippe quæ siderum motus eis legibus astrinxerat, ut expectatissimi illi stellæ Veneris per discum solarem transcursus in aliam hominum ætatem haud inciderent; quòd plenissimus tamen ejus spectaculi fructus in Philosophiam redundârit, Tuæ, Rex Inclyte, Munificentiæ nemo non acceptum refert. Gravitatis Doctrinam novis observationibus, Te annuente, in ultimâ Caledoniâ institutis confirmatam vidimus. Perscrutatam subtilissimis experimentis Aëris naturam. Vidimus, à Te sustentatas, in Britanniâ Tuâ adolescere insolitas hoc cœlo artes: Urbem novâ extructionum magnificentiâ superbire: Celsa surgere Procerum palatia: Intùs etiam ea spectandis, non ut olim exterorum, sed civium operibus condecorari. Quod verò hisce omnibus majus est et divinius, præcipua religionis nostræ dogmata, pravissimis studiis, proh dolor! impugnata, animosè tamen ac naviter defensa

fenſa vidimus. Vidimus ſcriptos codices ſacri textûs Hebraici undique conquiſitos, penitùs excuſſos; magno certè perennique literarum ſacrarum emolumento. Quod Opus ut labore conſtitit! ut ſumptibus! quibus populorum omnium Reges Proceresſque ut impenſè ſe præbuerunt! Ita Tu ſcilicet propriæ largitatis exemplo omnium ſtudia accenderas. Videmus Prophetam diſertiſſimum Iſaiam, ejus Viri curis quem Tu Eccleſiæ Tuæ Londinenſi præfeciſti, modò non reviviſcere, & ſermone populari luculentè converſum myſteria Dei clarè et apertè loqui. Hæc Te regnante Ætas Noſtra vidit. Plura, credo, majoraque videbit. Ita omnes bonis literis, quarum Te nôrunt amantiſſimum, impigri et alacres incumbunt. Faxit Deus O. M. creſcat indies in hoc populo ſcientiæ amor. Te, Pater, tantum Doctrinarum Artiumque omnium Patronum, diu nobis ſoſpitet, tueatur, cuſtodiat. Tibi verò gratum precor ſit Munus, quod reverentiæ et officii causâ Tibi dicat, qui in ſubditorum Tuorum fideliſſimorum numero nomen ſuum profiteri geſtit, unus idem ex humillimis

SAMUEL HORSLEY.

L E C T O R I S.

SOLENT ii, qui in aliquâ re magnam ſui expectationem concitaverint, primùm omnibus modis oſtendere, officio ſe non defuiſſe; deinde apud æquos judices ſuffragia eorum bonâ cum ſpe opperiri. Quod etiamſi non artis eſſet, et conſuetudinis, tamen à nobis commodè faciendum eſt, qui Newtoni Opera cum inſigniore quodam apparatu in lucem edere decrevimus. Etenim, ſi illud verum ſit, quo gravior doctrinæ locus aliquis et ſplendidior, tanto magis cognitione atque induſtriâ egere, qui eum tradituri ſint; omnino nos neque exile munus, neque otioſum ſumus adepti.—Tum verò Auctorem ſequimur, ſuper graviſſimis rebus preſſè ſæpiùs et anguſtè locutum, præ ingenii amplitudine aſperum aliquando et perdifficilem; ita ut magnum Interpreti negotium faceſſerit, qui non tam omnia demonſtraviſſe, quàm velut ex oraculo edidiſſe, quæ mente animoque rata ſibi penitus habuerat, arbitrandus eſt. Igitur omnibus conſiliis, et quâcunque demum ratione enitendum eſt, quo plenior fiat et illuſtrior tanti hujus Viri explicatio. Ita cùm in decurſu operis ubique ea attulimus, quæ diſcentium induſtriæ ſuppetias eant, ſparſa tamen atque uſu et genere diverſa, anteire debet totius rei, et ordinis quem ſecuti ſumus tractatio. Quod et Tironibus magno certè adjumento futurum eſt, ſi quis manum porrigat, et iter ingreſſuris etiam viæ ſubſidia palam oſtendat.

Ex quo itaque publici juris fuit hujuſce Operis proſpectus, ita rem univerſam partiri ſtatuimus, ut primum è quinque Tomis abſolverent Newtoni tractatus omnes ad puram, quæ dicitur, Matheſin quodammodo pertinentes. Quorùm etiam initio poſuimus Arithmeticam Univerſalem; poſt eam, cætera quæ ad Series et Fluxionum Doctrinam ſpectant Opuſcula. De ſingulis ſingulatim dicendum.

ARITHMETICAM UNIVERSALEM *perfecti Operis formâ caruiſſe nemo omnium eſt, qui non intelligat; cùm vix aliud præ ſe ferat, quàm*

Præ-

Prælectionum Capita, quas Newtonus Cantabrigiæ jam olim è Cathedrâ tradebat. Ita monita et præcepta, quæ ibi deprehendas, Aphorismis ferè omnino conclusa sunt, neque ratiociniis firmata, neque demonstrationibus legitimis absoluta—Quin et de Algebræ inventoribus, aliisve qui, ante Newtonum, rem quadantenus promoverant, altum ubique silentium. Quæ omnia et in secundâ istius libri editione pariter desideramus; magno posteris infortunio, quòd, annis jam ingravescentibus, præterita repetere, et ultimam illis manum imponere Newtonus ipse non tulerit.

Igitur nusquam aliás ab Interprete magis elaborandum erat; ubi indaganda omnia: quæ nimis angustè tradita sunt, fusiùs efferenda: et subtilis artificii Regulæ ferè ab integro ad examen revocandæ. Neque simplicem profectò super his impendimus laborem—Quæ levioris erant operæ, subjectis ubique annotationibus pro re natâ effecimus, explendo ea quæ breviùs apud Newtonum scripta sunt, et inventa, quæ aliunde originem traxerant, suis Auctoribus adjudicando. Graviora alia, et majoris momenti in Appendicem contulimus undeviginti capitibus expositam, quam in animo erat ad calcem statuisse, nî mole suâ ultra justam hujusce Tomi magnitudinem accreverat. Olim fortasse et seorsim ab hoc opere proditura est. Tantùm hîc loci subjecto Indice innuimus, quænam ibi præcipuè tractare visum est.

ELENCHUS CAPITUM
Appendicis in Arithmeticam Universalem.

I.

Traditur Methodus inveniendi numeros primos per cribrum Eratosthenis.

II.

Inventio divisorum simplicium ex mente Newtoni, demonstratione munitur.

III.

Agitur de inventione divisorum compositorum. Recensentur Cl. Virorum Cartesii, De Beaume, Bartholini, Van Hudde, et Wassanaeri

ſanaeri in hâc re progreſſus. Oſtenditur quantùm cæteros omnes Newtonus antecelluit.

IV, V, VI, VII.

In ſe habent demonſtrationes Newtoni regularum, quæ diviſoribus compoſitis inveniendis inſerviant. Quas et fatemur è Graveſandi Specimine Commentarii in Arithmeticam Univerſalem *petitas eſſe*; *exili libello, cui tamen omne illud retuliſſe debuerant, quicquid in hoc opere Maclaurinus, Bernouillius et Clairaultius uſpiam profecerint.*

VIII.

Inſtituitur demonſtratio Newtoni Regulæ, quam ex Bombellio et aliis expreſſerat, de extrahendâ Radice quadraticâ Multinomii è quantitatibus integris et radicalibus compoſiti—Subjicitur et alterius regulæ, quam in eandem rem ex Stevino attulerat, explicatio—Harum ultimam oſtenditur in irritum plerumque cadere, niſi priùs adhibitâ quâdam multinomii tractatione, quæ et ſæpiùs operoſior, quàm ut quis libenter ad eam confugiat.

IX.

Regula Newtoniana extrahendi altiores Radices ex quantitatibus numeralibus demonſtratione confirmatur, quam etiam Graveſandi libellus ſufficere potuiſſet. Subjicitur hujuſce artificii origo; *quantùm in illo, præ aliis Waſſanaerus profecerat*; *et quàm longè in eodem opere cæteros omnes poſt ſe reliquit Newtonus.*

X.

Traditur methodus generalis quantitatem incognitam, ubi binæ pluresve ſint, exterminandi; *quæ nuſquam non ſufficiet, ubi ad alias omnes fruſtra confugeris: modò ſatis artificioſè ſit adhibita.*

XI.

Exponitur methodus Fermatiana quantitates quotcunque ſurdas ex æquationibus tolli, ubi Climactiſmi ope Aſymmetriâ eas liberare non datur.

XII.

Demonſtratur Carteſii Regula, cujus ope cognoſcitur quot ſint Radices negativæ, ubi æquationis radices nullæ ſint impoſſibiles. Cujus rei cùm Principia poſuerat Kæſtnerus è Gottingiæ Profeſſoribus, tamen Marte proprio eam proveximus, et omnino Geometricè abſolvimus.

XIII.

Ad mentem Cl. Viri Campbelli, apud Acta Regiæ Societatis, demonſtratione confirmatur Newtoni Regula, per quam ferè cognoſci poteſt, quot ſunt Radices impoſſibiles: ubi aliunde deprompta pleniùs tamen et perfectiùs ipſi abſolvimus.

XIV.

Newtoni Regula de colligendo ſummam poteſtatum Radicis incognitæ luculentè exponitur. Oſtenditur illam ipſam Albertum Girardum jam antea tradidiſſe, magni nominis virum, et in Analyſeos ſpecioſæ inventis modò non Vietæ æqualem, utcunque incuriâ hominum ferè in deſuetudinem abierit.

XV.

Adducitur Limitum demonſtratio, intra quos radices æquationum cenſendæ ſunt conſiſtere.

XVI.

Additamentum D^ni D^ris B. Taylori de Æquationum proprietatibus, Commentarii loco, ſubjicitur iis, quæ Newtonus in hâc re ſtatuerat.

XVII.

A principiis ſuis excutitur Regula de Æquationum Reductione per diviſores ſurdos. Quem locum ubi Caſtillioneus attigerat, nuſquam tamen expoſuit, quod apud Newtonum tam ſubtile atque ele-

 gans,

gans, quomodo inveniantur quantitates Græcis Litteris designatæ. Idem neque alius quisquam, ut opinor, ante nos perfecit.

XVIII.

Breviter absolvuntur ea, quæ à Vietâ et Alberto Girardo tradita sunt, de proferendis Radicibus Æquationis Cubicæ $x^3 - qx \mp r = 0$ *per anguli trisectionem, ubi Cardani Regulæ defecerint; ita ut impeditam rem Geometriæ ope pulcherrimè aliquis promoveat.*

XIX.

Quæritur causa, unde Cardani Regulæ unquam deficiant, vel, ut aliter dicam, unde quantitates quæ reverâ et actu sunt, unicè designari possint Algebraico sermone, ut quæ existentiam non habeant.

Et hæc quidem de Appendice nostrâ dicta sunto—Quam si flagitent homines Mathematici, absoluto hoc Opere, et negotiis vacuus, ut et alia fortasse ad Newtonum spectantia, in lucem edere non gravabor.

TRANSEO *ad alteram hujusce Tomi partem; quæ ut suprà dictum est, congesta habet Newtoni de Seriebus et Fluxionum Doctrinâ Opuscula. Quarum rerum, siqua apud nos sit intelligentia, illam in universum omnem ex ipsius Newtoni scriptis conquisitam esse edicimus; aliis relicturi*—erroremque hostibus illum—*velle minimo sudore rem agere, Interpretum genus omne affectari, et aliunde potiùs quàm ab ipso Auctore veram illius doctrinam exquirere. Quod si in aliis rebus inscitiæ est, in istiusmodi disciplinâ graviùs vituperandum est, ubi subtilia omnia, et in acie novaculæ, quod aiunt, vera terminorum posita sit æstimatio.*

Nihil itaque defuturum arbitramur, modò penitus perspecta et plenè cognita sint ea, quæ Newtonus ipse in arte suâ tradiderit. Neque aliò spectant, quæ ipsi adjicimus, quàm ut hæc studia difficultate rei non tantopere homines absterreant. Nimirum tam gravis argumenti tractationem universam in ordinem redegimus; etiam discendi subsidia ubique comparavimus; prætermissa exprimendo; explicando ea quæ angustè ponebantur, et ubique commonendo lecto-

 rem.

rem, quò intuens, a verâ Newtoni ſententiâ minùs aberret — *Eo denique conſilio omnia concinnavimus, ut in poſterum nuſquam aliàs confugiant, qui ſublimioris Geometriæ Elementa penitus complecti ſecum ſtatuerint.*

Jam verò brevi Monito *primùm oſtendimus, quali ordine Tirones ad legendum accedant. Quod ut ritè fiat, initio poſuimus Divini illius* PRINCIPIORUM *Operis Sectionem primam, quaſi anteſignanum aliquod, et ipſum cardinem in quo univerſa Doctrinæ Fluxionalis demonſtratio verſatur. Porrò illi Annotationes ſubjecimus, quæ probandi media ubique ſuppleant; Propoſitiones etiam Corollariis aliquot adauximus. Quæ et denuò apud ipſum in Principiis locum deprehenderis—Annotationes ſemel protuliſſe ſatis eſto.*

Hæc excipit Analyſis per Æquationes numero terminorum infinitas; *ad quam, inter alia, prima illius Regula demonſtratione Geometricâ è Fermatio munita eſt, et oſtenſum inſuper, quomodo Quadratura ad pag. 7. Edit. Joneſii det longitudinem Arcûs Ellipſeos.*

Tertium habent Locum Excerpta ex Epiſtolis Newtoni, *eadem ſanè, quæ ad calcem hujuſce tractatûs protulit Joneſius, tantùm ordine paululum immutato, quo Tironibus fiat accommodatior. Quod ſi minùs legitimè factum eſſe quis exiſtimet, Epiſtolas etiamnum integras ſuo loco invenerit. Apud nos Excerpta ita ordinamus, ut primum ſit*

Ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ, *de formulis Algebraicis in Series infinitas reſolvendis, ab initio ſcilicet ad verba* " aliam excogitare adactus ſum" *(p. 25, Edit. Joneſ.)*

Secundum et tertium quæ et Joneſio ibidem poſita, alterum ſcilicet ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum poſteriore, *de ſeriebus condendis et invertendis—Alterum ex* Epiſtolâ Newtoni ad Walliſium *de radicibus æquationum fluxionalium extrahendis.*

Quartum denique ex parte aliquâ primi apud Joneſium conſtare volumus, ex Epiſtolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ, *de Problematis per ſeries infinitas reſolvendis.*

Ita, ni fallor, accuratiùs et magis dilucidè ſe exceptura ſunt hæc fragmenta. Quænam opis noſtræ ſint, ad ſingula proferendum eſt.

Ad

Ad primum igitur, Theorematis Binomii demonſtrationem adhibuimus—Ad ſecundum, Newtoniana duo Theoremata tertio, neque minùs utili, Moivræano adduximus, de Infinitæ Æquationis radice extrahendâ, ſive, ut aliter dicam, de duabus ſeriebus ad unam redigendis. Quorum omnium demonſtrationem qui elicere velit, ad locum adeat Maclaurinum de Seriebus convergentibus, ubi et perſpicuè traditur, quidnam Parallelogrammum Newtonianum ad Series inveniendas conferat, et Regularum etiam, in Excerpto tertio, ſatis luculenta ad manus ſit explicatio.

Excerptorum ultimum plura comitantur, quæ noſtræ ſunt indaginis. Inter alia, recondita Jacobi Gregorii inventa Geometricè demonſtravimus; qui Tangentem et Secantem Logarithmicam definire novit ex Arcu, et Arcum viciſſim ex illis, nullâ Naturalium numerorum ratione habitâ. Omnino enim viſum eſt tam ſubtilis artificii Series, in hujus argumenti tractatione, non prætermittendas eſſe, præſertim etiam quòd in Commercio Epiſtolico inveniendæ ſint earum formulæ. Seriem Newtonianam pro arcu circulari in datâ ratione multiplicando ſive dividendo, mutatis tantùm ſignis, idem poſſe apud hyperbolicos ſectores oſtendimus; et in Circuli cum Hyperbolâ ſimilitudine, per hanc Seriem patefactâ, poni ea quæ Coleſius in Harmoniâ Menſurarum tam ſcienter inſtituit.

Ad locum expoſita eſt methodus arcum Ellipſeos *æſtimandi, in hoc Excerpto tradita, quam* ad Parabolam etiam et Hyperbolam *accommodavimus—ubi et ad manum fuit illam Ellipſeos et Hyperbolæ cognationem explicare, quam Algebraici innuunt, Hyperbolam alio nomine Ellipſin appellantes, cui axis ſit negativus; unde factum eſt, ut formulæ generales ad quamlibet è Sectionibus Conicis, nullo ferè negotio ad alias transferantur. Adhæc Arcûs Parabolici æſtimationi Coteſianæ in tantum immorati ſumus, ut Geometrica illius ratiocinia dilucidè ponerentur.*

Itaque omnia ſingulatim eruendo, ad Seriem Newtoni, quâ Sphæroidis ſegmenta ſecunda exponi poſſint, jam deventum eſt. Cujus profectò rationem univerſam, quos ortus habuit, et quænam artificia, parvo molimine indaganda eſſe nemo æquior ſtatuerit. Utcunque hoc ſit, per omnes hujus Excerpti ſeries, ſedulò fecimus, ne lateret uſpiam earum conformatio, ex ipſius Curvæ, quæ æſtimanda erat, affectubus aſſequenda.

Finem

Finem ex hâc parte fecimus, explicatis apertiſſimè Problematum Conſtructionibus, quæ veris ſaltem proximæ ex Infinitis æquationibus derivari poſſint: cujus rei nuda tantummodò exempla in Epiſtolis ſuprà memoratis extiterint.

Proximè collocatus eſt de Quadraturâ Curvarum *Libellus, præ cæteris quidem ſcientiæ ubertate inſignis, idem tamen rerum compreſſione et amplitudine præ cæteris obſcurus et gravis. Ita contentionem animi, et ſtudium poſcere acerrimum, et ingenii quaſi formâ quâdam lucere, quæ prenſantes tamen miſerè effugeret. Quæ cùm ita ſint, pluſquam mediocri ſtudio locum tam difficilem exercere viſum eſt. Primò itaque Problema illud* Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones, *prorſus aliâ loquendi ratione explicuimus*; *eo ſermone uſi, qui in Methodi Indiviſibilium ſuſpicionem omnino cadere non poterit, quam et è Geometriâ exulare penitus, et ſub umbras ire jam pridem oportebat.*

Demonſtrationem Propoſitionis Quartæ, ut et omnium quæ in Quintæ præceptis paulo magis ſpinoſa, et ſextæ quoque luculentè abſolvimus. Quarum ultimam jam ante nos Stewartus concinnaverat.

Explicuimus ea alioqui parùm intellecta, quæ monuit Newtonus in Propoſitionis ſeptimæ Caſu primo de coefficientibus θ, $\theta+\lambda\eta$, &c. *ubi aliquis eorum defecerit. E Maclaurino Caſum ſecundum aliter demonſtravimus, et univerſam hujus loci doctrinam Æquationibus Canonicis expoſuimus ad uſum Computandi, ni fallor, quàm maximè accommodatis.*

Propoſitionem octavam duplici probatione confirmavimus; *et Nonæ Corollaria demonſtrationibus partim è Stewarto partim noſtris ſingulatim adauximus.*

Undecimæ, coronidis loco, ſubjecimus Robineſii demonſtrationem Latinè redditam.

Librum de Quadraturis excipiet Opus Poſthumum de Fluxionibus; *modico tamen, ſi ad cætera ſpectes, Annotationum apparatu, ubi neque neceſſe erat fuſiùs rem agere.*

Denique Tomum hunc claudent Methodus Differentialis *et* Enumeratio Linearum Tertii Ordinis. *Neque dubitavimus binos de proprio ſubjicere Libellos, alterum* de Geometriâ Fluxionum,

ſive

five Additamentum tractatûs Newtoniani de rationibus primis et ultimis; *alterum, quem* Logifticam Infinitorum *appellare libeat. Primo utique Elementa Doctrinæ Fluxionum ita abfolvimus, ut integris et intaminatis Geometriæ ratiociniis omnia eluceant, eâtenus re provectâ, ut exponatur fluxio quantitatis* $\frac{x^{\frac{m}{n}}}{y^{\frac{p}{q}}}$.

Logiftica Infinitorum *formulas habet, quas in computandi fubfidium excogitavimus, ubi in feries numero terminorum infinitas operationes Arithmeticæ inftituendæ fint. Inter alia, Theorema Infinitomium Cl. Viri Moivræi aliter à nobis declaratum eft, omnino etiam in majorem computandi utilitatem, quàm ex formâ auctoris, vel immutatione ipfius Cheynii.*

Quod reliquum eft, omnia expofui, quæ ad infequentem Tomum, qualiacunque demum Mathefeos incrementa, protulero. Quæ fi graviter fatis, et fubtiliter à nobis difputata funt, mitto quàm ornatè, et ad vulgi aucupium. Etenim is ego fum, qui in Philofophiæ tractatione, fuccum et fanguinem, non coloratam quandam fpeciem requiro. Omnino neque eos falutatum prodeo, qui abfque labore ullo et induftriæ periculo, in Epicuri hortulis, quod aiunt, omne fcientiæ genus, et edita fapientum templa *fomniant. Alacres, et exercitatos, et hifce ftudiis ardentes volo, qui cum Newtono philofophari cupiunt. Iidem etiam, ut æquum de me ftatuant judicium, nullus vereor; quanquam quæ hoc Libro conclufa funt, neque numero neque pondere æquiparanda funt iis, quæ pofthac edituri fumus. Quod fauftum felixque fit, abfolutis hifce, Divinum* PRINCIPIORUM *Opus jampridem ingreffi fumus, brevi fub eâdem formâ in lucem proditurum, modò Deus O. M. vitam nobis et vires integras in tantum indulferit.*

ARITH-

IN HOC TOMO CONTINENTUR

IPSIUS NEWTONI

EDITORIS.

ARITHMETICA UNIVERSALIS

SIVE

DE COMPOSITIONE

ET

RESOLUTIONE ARITHMETICA

LIBER.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

cognitæ

ARITH-

ARITHMETICA UNIVERSALIS,

SIVE

DE COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE

ARITHMETICA LIBER.

PROŒMIUM.

COMPUTATIO vel fit per *numeros*, ut in vulgari Arithmeticâ, vel per *ſpecies*, ut Analyſtis mos eſt. Utraque iiſdem innititur fundamentis, & ad eandem metam collimat: *Arithmetica* quidem definite & particulariter, *Algebraica* autem indefinitè & univerſaliter: ita ut enuntiata fere omnia quæ in hâc computatione habentur, & præſertim concluſiones, *Theoremata* dici poſſint. Verùm Algebra maximè præcellit, quòd cum in Arithmeticâ Quæſtiones tantùm reſolvantur progrediendo a datis ad quæſitas quantitates, hæc a quæſitis tanquam datis ad datas tanquam quæſitas quantitates plerumque regreditur; ut ad concluſionem aliquam, ſeu Æquationem, quocunque demum modo perveniatur, ex quâ quantitatem quæſitam elicere liceat. Eoque pacto conficiuntur difficillima Problemata, quorum reſolutiones ex Arithmeticâ ſolâ fruſtra peterentur. Arithmetica tamen Algebræ in omnibus ejus operationibus ita ſubſervit, ut non niſi unicam perfectam *computandi Scientiam* conſtituere videantur; & utramque propterea conjunctim explicabo.

Caput Primum.

Quiſquis hanc Scientiam aggreditur, imprimis vocum & notarum ſignificationes intelligat, & fundamentales addiſcat operationes, Additionem nempe, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Extractionem Radicum, Reductiones fractionum & radicalium quantitatum, & modos ordinandi terminos Æquationum, ac incognitas quantitates (ubi plures ſunt) exterminandi. Deinde has operationes, reducendo Problemata ad æquationes, exerceat; & ultimò naturam & reſolutionem æquationum contempletur.

C A P. I.

DE VOCUM QUARUNDAM ET NOTARUM SIGNIFICATIONE.

PER *Numerum* non tam multitudinem unitatum, quàm abſtractam quantitatis cujuſvis ad aliam ejuſdem generis quantitatem, quæ pro unitate habetur, rationem intelligimus. Eſtque triplex; integer, fractus, & ſurdus: *Integer* quem unitas metitur, *Fractus* quem unitatis pars ſubmultiplex metitur, & *Surdus* cui unitas eſt incommenſurabilis [a].

Integrorum numerorum notas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,) & notarum, ubi plures inter ſe nectuntur, valores nemo non intelligit. Quemadmodum verò numeri, in primo loco ante unitatem, ſive ad ſiniſtram ſcripti, denotant denas unitates, in ſecundo

[a] Hominibus ſcilicet, qui fictas ſuas rerum imagines ac notas magis quam res ipſas contemplari conſueverunt, paulatim mos obrepſit, quantitates eas omnes numeros dicendi, quæ per notas numerales ſignificari ſolent. Hinc locutiones abſonæ, doctiſſimorum etiam ſcriptorum uſu frequentatæ, *numerus unitate minor*, et *numerus ſurdus*: cum ea quidem *numeri* ſit natura ut unitate major ſit, utpote ex unitatum multitudine conflatus; cum *ſurdi* natura in eo ipſo poſita ſit, ut numerus non ſit, vel tanquam numerus intelligi nequeat. Melius eſſet dicere *quantitates fractas ſurdaſve*; vel ſi per neutra loquentes, *ſurda*, *fracta*, diceremus. Quorſum enim ſermo rerum naturæ repugnans?

[b] Apud veteres Arithmeticos frequens eſt hujuſmodi ſcriptura 064 ③, 732569 ③, 572083 ④. Interpretatio ſatis obvia. Numeri cujuſlibet propoſiti tot poſtremæ, dextram verſus, notæ pro decimarum notis ſunt habendæ, quot nota circulo incluſa indicat. Hæc autem decimarum notatio propter ambiguitatem merito rejecta eſt: nimirum cum ante Vietam quantitatis incognitæ et poteſtatum ejus, in operationibus algebraicis, uſitatiſſima eſſet deſignatio per notas numerales circulis incluſas; nempe hoc modo, ⓪, ①, ②, ③, &c. pro 1, x, x^2, x^3, &c. Junioribus notæ decimarum ab integrorum notis, commate vel puncto interpoſito, diſcriminari ſolent: 732,569 vel 732.569. Comma autem ſuperne poſitum notarum decimalium uſque iterationem indicat. 732,569' vel 732,5694'94'. Mihi ſolemne eſt, in numeris uti loquuntur naturalibus comma adhibere, puncto ad

ſecundo centenas, in tertio millenas, &c. ſic numeri in primo loco poſt unitatem ſcripti denotant decimas partes unitatis, in ſecundo centeſimas, in tertio milleſimas, &c. Hos autem dicimus Fractos *Decimales*, quòd in ratione decimali perpetuò decreſcant. Et ad diſtinguendum integros a decimalibus interjici ſolet comma, vel punctum, vel etiam lineola. Sic numerus 732'|569, denotat ſeptingentas triginta duas unitates, unà cum quinque decimis, ſex centeſimis, & novem milleſimis partibus unitatis. Qui & ſic 732,|569, vel ſic 732·569, vel etiam ſic 732⌞569, nonnunquam ſcribitur. Atque ita numerus 57104'2083, denotat quinquaginta ſeptem mille, centum & quatuor unitates; unà cum duabus decimis, octo milleſimis, & tribus decimis milleſimis partibus unitatis. Et numerus 0'064 denotat ſex centeſimas & quatuor milleſimas partes [b]. Surdorum & aliorum fractorum notæ in ſequentibus habentur. NOTATIO.

Cum rei alicujus quantitas ignota eſt vel indeterminatè ſpectatur, ita ut per numeros non liceat exprimere, ſolemus per ſpeciem *aliquam ſeu literam deſignare.* Et ſi quando cognitas quantitates tanquam indeterminatas ſpectemus, diſcriminis cauſâ, deſignamus initialibus Alphabetæ literis a, b, c, d, & incognitas finalibus z, y, x, &c. Aliqui pro cognitis ſubſtituunt conſonantes, vel majuſculas literas, & vocales, vel minuſculas, pro incognitis.

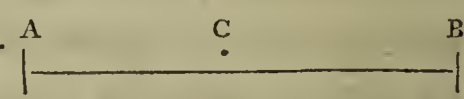
Quantitates vel Affirmativæ *ſunt ſeu majores nihilo; vel* Negativæ *ſeu nihilo minores* [c]. Sic in rebus humanis poſſeſſiones dici poſſunt

ad ſeparationem indicis Logarithmici a notis reliquis reſervato: eum ſcilicet in finem, ut in operationibus arithmeticis numeri naturales et logarithmi certâ aliquâ diſtinctione, oculis manifeſtâ, ſemper internoſcantur.

[c] Omnem nimirum quantitatem Arithmeticus tanquam ex aliis compoſitam conſiderare ſolet. Duplex autem compoſitionis modus, additionis alter, alter ſubductionis, hic illi contrarius. Auget enim additio, ſubductio minuit. Quantitates igitur, quæ novæ alicui procreandæ per additionem inſerviunt, affirmativæ dicuntur; negativæ quæ ſubductæ acervum minuunt: quas ob vim illam minuendi in compoſitione arithmeticâ, quaſi naturam veræ quantitatis contrariam induerent, Albertus Girardus, ni fallor, omnium primus (quem ſummum interea mathematicum agnoſco) durâ quâdam verborum figurâ, Diophanto et Vietæ prorſus ignotâ, quam vellem Carteſius et noſtrates minus avide arripuiſſent, *nihilo minores* dixit. Hinc novam, neſcio quam, nonnulli ſomniârunt quantitatis ſpeciem, cujus naturam in eo ponunt quod quantitatis notioni quam maxime repugnat. Hiſce Newtonus ſuffragrari nolens, de quantitatibus numero multitudinis locutus eſt. Neque enim dicit *quantitatem* vel affirmativam eſſe, ſeu majorem nihilo, vel negativam ſeu nihilo minorem; uti omnino ei loquendum fuiſſet, ſi de partitione aliquâ univerſi generis τȣ ποσȣ cogitâſſet, qualem iſti cogitare exiſtimandi ſunt; ſed cum *quantitates* pluraliter dicat,

Caput Primum.

poſſunt bona affirmativa, debita verò bona negativa. Inque motu locali progreſſus dici poteſt motus affirmativus, & regreſſus motus negativus, quia prior auget & poſterior diminuit iter confectum. Et ad eundem modum in Geometriâ, ſi linea verſus plagam quamvis ducta pro affirmativâ habeatur, negativa erit quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Veluti ſi AB dextrorſum ducatur, & BC ſiniſtrorſum; ac AB ſtatuatur affirmativa, tunc BC pro negativâ habebitur, eò quòd inter ducendum diminuit AB; redigitque vel ad breviorem AC; vel ad nullam, ſi forte C inciderit in ipſum A; vel ad minorem nullâ, [d] ſi BC longior fuerit quam AB de quâ aufertur. *Negativæ* quantitati deſignandæ ſignum −, *Affirmativæ* ſignum + præfigi ſolet. Signum ± incertum eſt, & ſignum ∓ etiam incertum, ſed priori contrarium.



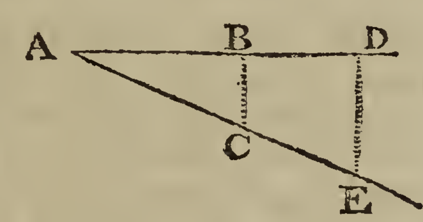
In aggregato quantitatum nota + ſignificat quantitatem ſuffixam eſſe cæteris addendam, *& nota − eſſe* ſubducendam. Et has notas vocabulis *plus* & *minus* exprimere ſolemus. Sic $2+3$, ſive 2 plus 3, valet ſummam numerorum 2 & 3, hoc eſt 5. Et $5-3$, ſive 5 minus 3, valet differentiam quæ oritur ſubducendo 3 à 5, hoc eſt 2. Et $-5+3$ valet differentiam quæ oritur ſubducendo 5 à 3, hoc eſt -2. Et $6-1+3$ valet 8. Item $a+b$ valet ſummam quantitatum a & b: Et $a-b$ valet differentiam, quæ oritur ſubducendo b ab a. Et $a-b+c$ valet ſummam iſtius differentiæ & quantitatis c. Puta ſi a ſit 5; b, 2; & c, 8; tum $a+b$ valebit 7; & $a-b$, 3; & $a-b+c$, 11. Item $2a+3a$ valet $5a$. Et $3b-2a-b+3a$ valet $2b+a$; nam $3b-b$ valet $2b$ & $-2a+3a$ valet a, quorum aggregatum eſt $2b+a$. Et ſic in aliis. Hæ autem notæ + & − dicuntur *Signa*. Et ubi neutrum initiali quantitati præfigitur ſignum + ſubintelligi debet.

dicat, ſatis utique ſignificat, quas concretas dialectici vocarent, quales Arithmetici tractare ſolent, eas animo ſibi obverſari, et technicas earum Arithmeticorum compoſitiones. In Arithmeticâ igitur contrariis compoſitionum modis voces contrariæ, affirmatio et negatio, reſpondent. In aliis autem omnibus quibus phraſis algebraica accommodari ſolet, affirmatio et negatio, neutiquam diverſa rerum genera indicant, ſed relationes rerum in eodem genere contrarias.

[d] Hoc eſt, vel magis quam ad nullam redigit; novam ſcilicet apponit, a puncto A ſiniſtrorſum exporrectam, ſi BC longior fuerit quam AB.

MULTI-

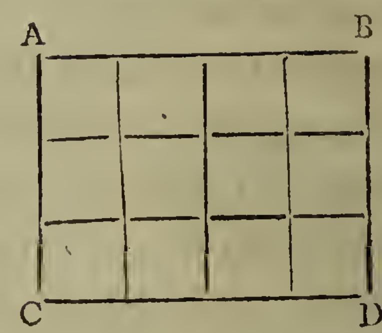
Multiplicatio propriè dicitur, quæ fit per numeros integros; utpote quærendo novam quantitatem toties majorem quantitate multiplicandâ, quoties numerus multiplicans sit major unitate. Sed, aptioris vocabuli defectu, Multiplicatio etiam dici solet, quæ fit per fractos aut surdos numeros; quærendo novam quantitatem in eâ quâcunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam habet multiplicator ad unitatem. Neque tantùm fit per abstractos numeros sed etiam per concretas quantitates, ut per lineas, superficies, motum localem, pondera, &c. quatenus hæ ad aliquam sui generis notam quantitatem tanquam unitatem relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices supplere. Quemadmodum si quantitas A multiplicanda sit per lineam duodecim pedum, posito quod linea bipedalis sit unitas, producentur per istam multiplicationem 6 A, sive sexies A, perinde ac si A multiplicaretur per abstractum numerum 6; siquidem 6 A sit in eâ ratione ad A, quam habet linea duodecim pedum ad unitatem bipedalem [e]. Atque ita si duas quasvis lineas AC & AD per se multiplicare oportet, capiatur AB unitas, & agatur BC eique parallela DE, & AE productum erit hujus multiplicationis, eo quod sit ad AD ut AC ad unitatem AB. Quinetiam mos obtinuit, ut genesis seu descriptio superficiei, per lineam super aliâ lineâ ad rectos angulos moventem, dicatur multiplicatio istarum linearum. Nam quàmvis linea utcunque multiplicata non possit evadere superficies, adeoque hæc superficiei e lineis generatio longè alia sit a multiplicatione, in hoc tamen conveniunt, quòd numerus unitatum in alterutrâ lineâ multiplicatus per numerum unitatum in alterâ producat abstractum numerum unitatum in superficie lineis istis comprehensâ, si modò Unitas superficialis definiatur, ut solet, Quadratum cujus latera sunt



[e] Sic pecuniæ pecunias nonnunquam multiplicare dicuntur, ut in quæstione illâ quæ tironibus proponi solet, quanta sit pecuniæ summa quam summa quælibet data, puta 4*l.* 19*s.* 11$\frac{3}{4}$*d.* semet ipsa multiplicans effecerit? Hujusmodi quæstioni generaliter respondere licet, eam fore summam multiplicatione effectam, quæ ad summam propositam rationem habeat quam proposita ad unitatem nummariam. Unitatem autem nummariam in quânam nummorum specie constitutam velit, dicendum est ei qui quæstionem ponit. Potest enim ea in alio atque alio genere ad arbitrium sumi, & prout varie sumpta fuerit, aliæ atque aliæ pecuniarum summæ e multiplicatione provenient.

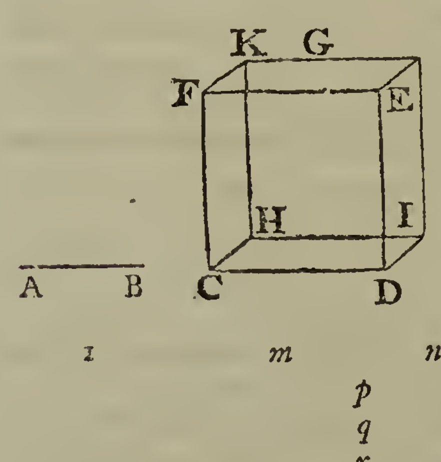
CAPUT PRIMUM.

ſunt unitates lineares [f]. Quemadmodum ſi recta AB conſtet quatuor unitatibus & AC tribus, tum rectangulum AD conſtabit quater tribus ſeu duodecim unitatibus quadratis, ut inſpicienti Schema patebit. Eſtque ſimilis analogia ſolidi & ejus quod continuâ trium quantitatum multiplicatione producitur. Et hinc viciſſim evenit quod vocabula *ducere*, *contentum*, *rectangulum*, *quadratum*, *cubus*, *dimenſio*, *latus*, & ſimilia quæ ad Geometriam ſpectant, Arithmeticis tribuantur operationibus. Nam per *quadratum*, vel *rectangulum*, vel *quantitatem duarum dimenſionum* non ſemper intelligimus ſuperficiem, ſed ut plurimum quantitatem alterius cujuſcunque generis quæ multiplicatione aliarum duarum quantitatum producitur, & ſæpiſſime lineam quæ producitur multiplicatione aliarum duarum linearum. Atque



venient. Etenim ſi unam libram Anglicanam (*one pound ſterling*) unitatem ſtatueris, ſumma propoſita, 4*l.* 19*s.* 11 $\frac{3}{4}$*d.* ſemet ipſa multiplicans faciet 24*l.* 19*s.* 9 $\frac{1}{2}$*d.* cum parte $\frac{1}{960}$ unius ſemioboli. Atqui ſi nummum argenteum (Anglice 1 *ſhilling*) pro unitate ſumas, conſimilis pecuniæ propoſitæ multiplicatio ſummam longè majorem procreabit; nempe 499*l.* 15*s.* 10*d.* cum parte $\frac{1}{48}$ unius ſemioboli: majorem adhuc, ſi denarium (Anglice *a penny*) pro unitate haberi velis; provenient enim 5997*l.* 10*s.* cum parte $\frac{1}{4}$ unius ſemioboli: tum vero maximam, ſi unitatem nummariam, in infimâ nummorum ſpecie conſtitutam, uni tantum ſemiobolo (*a farthing*) æquaveris. Ita enim ſummæ propoſitæ in ſeipſam multiplicatio libras Anglicanas 23990 cum uno ſemiobolo fecerit: 23990 *l.* 0*s.* 0 $\frac{1}{4}$*d.*

[f] Parallelogramma ſcilicet, vel parallelepipeda æquiangularia inter ſe rationem habent e laterum rationibus compoſitam. Numeri quoque, e duobns tribuſve numeris mutuâ multiplicatione facti, inter ſe rationem habent e rationibus numerorum, quorum multiplicationibus facti ſunt, compoſitam. Sit igitur recta AB ad rectam CD ut unitas ad numerum quemlibet m. Eadem vero recta AB ad aliam rectam DE proportionem habeat quam unitas ad alium aliquem numerum n. Numeri autem n, m, inter ſe multiplicati numerum p faciant. Rectis autem, CD, DE, ad perpendiculum compoſitis rectangulum DF compleatur. Quadratum ex AB ad rectangulum DF proportionem habet ex proportionibus rectæ AB ad CD, ejuſdemque AB ad DE compoſitam: compoſitam igitur e rationibus unitatis ad numerum m, et unitatis ad numerum n. Habet autem unitas ad numerum p rationem e rationibus unitatis ad numeros m et n compoſitam. Quadratum igitur ex AB ad rectangulum DF proportionem habet quam unitas ad numerum p. Unitas autem metitur numerum p. Quadratum igitur ex AB rectangulum DF toties metietur. Atque eadem erit argumentatio, quæcunque ſint longitudines rectarum CD, DE, modò ſingulæ ad rectam AB proportionem habeant numeri alicujus ad unitatem. Quadratum utique ex AB rectangula omnia, ejuſmodi rectis comprehenſa, metietur, toties unumquodque, quoties unitas numerum p metiatur, e numeris illis, m, n factum, qui ad unitatem rationes habeant quam rectæ CD, DE, ad rectam AB. Planum rectanguli DF, in



Atque ita dicimus *Cubum* vel *Parallelepipedum*, vel *quantitatem trium dimenſionum* pro eo quod binis multiplicationibus producitur, *latus* pro radice, *ducere* pro multiplicare; & ſic in aliis. NOTATIO.

Numerus ſpeciei alicui immediatè præfixus denotat ſpeciem illam toties ſumendam eſſe. Sic $2a$ denotat duo a, $3b$ tria b, $15x$ quindecim x. g.

Duæ vel plures ſpecies immediatè connexæ deſignant factum, *ſeu quantitatem quæ ſit per multiplicationem omnium in ſe invicem.* Sic ab denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b. Et abx, denotat quantitatem quæ fit multiplicando a per b, & factum illud per x. Puta ſi a ſit 2, & b ſit 3, & x ſit 5, tum ab erit 6, & abx, 30.

Inter quantitates ſeſe multiplicantes, nota $\times$, vel vocabulum *in*, ad factum deſignandum nonnunquam interſcribitur. Sic 3×5, vel 3 in 5, denotat 15. Sed uſus harum notarum præ-

in puncto D ad perpendiculum inſiſtat recta D I, quæ ſit ad A B ut numerus quidam q ad unitatem. Numeri autem p, q inter ſe multiplicati numerum r faciant, et parallelepipedon D K compleatur. Cubus ex A B ad parallelepipedon D K proportionem habet ex proportionibus quadrati ex A B ad rectangulum D F, et rectæ A B ad rectam D I compoſitam: Compoſitam igitur e rationibus unitatis ad numerum p, et unitatis ad numerum q. Habet autem unitas ad numerum r rationem e rationibus unitatis ad numeros p et q compoſitam. Cubus igitur ex A B ad parallelepipedon D K proportionem habet quam unitas ad numerum r. Unitas autem metitur numerum r. Cubus igitur ex A B parallelepipedon D K toties metietur. Atque ſimilis erit argumentatio, quæcunque demum rectæ D I longitudo ſit, modo talis ea ſit quæ ad rectam A B proportionem habeat numeri alicujus ad unitatem. Cubus ſcilicet ex A B parallelepipeda omnia rectangulo D F et rectâ D I comprehenſa metietur, toties unumquodque, quoties unitas numerum illum r metiatur, e numeris m, n, q factum, qui ad unitatem rationes habeant rectarum C D, D E, D I ad rectam A B.

Hinc ſi ſcala quædam longitudinum a rectâ A B originem et initium trahat, quæ proinde illius ſcalæ unitas linearis dicenda eſt, e longitudinibus hujus ſcalæ ad perpendiculum compoſitis aliam quandam *ſuperficierum* ſcalam formare licebit, quæ a quadrato rectæ A B initium ſumet. Item e rectis ſcalæ primæ, cum rectangulis ſcalæ ſuperficiariæ ad perpendiculum compoſitis, formari poteſt *ſolidorum* ſcala, quæ ab ejuſdem A B cubo originem trahet. Hanc ſcilicet ob cauſam quadratum ex A B unitatis ſuperficiariæ nomen ſortietur, et cubus ex A B unitas ſolida quodam modo dici merebitur. Atque hâc analogiâ moti Veteres voces Geometriæ proprias *planum*, *ſolidum*, *quadratum*, *cubum*, malo exemplo in Arithmeticam tranſtulerunt, et Juniores viciſſim verba Arithmetices, *multiplicare*, *dividere*, in Geometriam. Quæ tamen non ita ſunt accipienda, ac ſi figuræ planæ et ſolidæ multiplicatione aliquâ, quæ ne intelligi quidem poteſt, e lineis procreatæ eſſent; ſed quòd ſpatii ſuperficiarii ſolidive ex datâ menſurâ aliquâ lineari æſtimatio numeralis homini Arithmetico per multiplicationem ineunda ſit. E contrario linearum longitudines vel ſuperficierum planitiæ, ex datis menſuris ſuperficiariis ſolidiſve, per diviſionem numeris definiendæ ſunt.

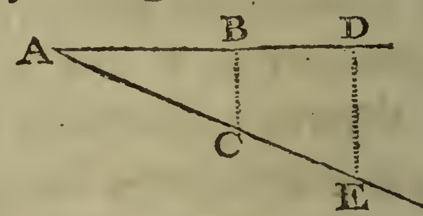
g Antiqui moris erat coefficientem numeralem literæ ſuffigere ($x\,3$ pro $3\,x$). Præpoſitus eſt, confuſionis evitandæ gratiâ, ex quo Carteſius inſtituit notis numeralibus literæ radicali ſuperne ſuffixis, (ad hunc modum x^2. x^3. x^4.) quantitatum poteſtates deſignare, quas ante vel notâ numerali circulo incluſâ deſignabant. (Vide not. b) vel vocibus curtatis, vel iteratâ quoties opus eſſet literâ radicali. A quad. A. cub. A. biquad. vel aa, aaa, $aaaa$, &c. pro a^2, a^3, a^4, &c.

 cipuus

CAPUT PRIMUM.

cipuus eſt, ubi compoſitæ quantitates ſeſe multiplicant. Veluti ſi $y-2b$ multiplicet $y+b$, terminos utriúſque multiplicatoris lineolâ ſuperimpoſitâ connectimus, & ſcribimus $\overline{y-2b}$ in $\overline{y+b}$, vel $\overline{y-2b}\times\overline{y+b}$.

Divisio propriè eſt quæ fit per numeros integros, quærendo novam quantitatem toties minorem quantitate dividendâ quoties unitas ſit minor Diviſore. Sed ob analogiam vox etiam uſurpari ſolet, cum nova quantitas in ratione quâcunque ad quantitatem dividendam quæritur, quam habet unitas ad diviſorem; ſive diviſor ille ſit fractus, aut ſurdus numerus, aut alia cujuſvis generis Quantitatis. Sic ad dividendum lineam AE per lineam AC, exiſtente AB unitate; agenda eſt ED parallela CB, & erit AD Quotiens. Imo & Diviſio, propter ſimilitudinem quandam, dicitur, cum rectangulum ad datam lineam tanquam Baſem applicatur, ut inde noſcatur altitudo.



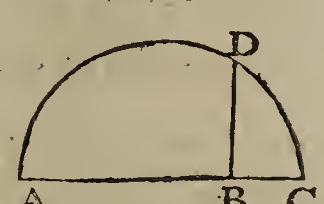
Quantitas infra quantitatem cum lineolâ interjectâ denotat quotum, *ſeu quantitatem quæ oritur ex diviſione ſuperioris quantitatis per inferiorem.* Sic $\frac{6}{2}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo 6 per 2, hoc eſt 3: & $\frac{5}{8}$ quantitatem quæ oritur dividendo 5 per 8, hoc eſt octavam partem numeri 5: & $\frac{a}{b}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo a per b; puta ſi a ſit 15, & b, 3, tum $\frac{a}{b}$ denotat 5. Et ſic $\frac{ab-bb}{a+x}$ denotat quantitatem quæ oritur dividendo $ab-bb$ per $a+x$. Atque ita in aliis. Hujuſmodi autem quantitates *fractiones* dicuntur, parſque ſuperior *Numerator*, ac inferior *Denominator*.

Aliquando Diviſor quantitati diviſæ, interjecto arcu, præfigitur. Sic ad deſignandum quantitatem quæ oritur ex diviſione $\frac{axx}{a+b}$ per $a-b$, ſcribi poteſt $\overline{a-b)}\frac{axx}{a+b}$.

Etſi multiplicatio per immediatam quantitatum conjunctionem denotari ſolet, tamen numerus integer ante numerum fractum denotat ſummam utriuſque. Sic $3\frac{1}{2}$ denotat tria cum ſemiſſe.

Si quantitas seipsam multiplicet, numerus factorum, compendii gratiâ, suffigi solet. NOTATIO. Sic pro *aaa* scribimus a^3, pro *aaaa* scribimus a^4, pro *aaaaa* scribimus a^5, & pro *aaabb* scribimus a^3bb vel a^3b^2. Puta si *a* sit 5, & *b* sit 2, tum a^3 erit $5 \times 5 \times 5$, sive 125; & a^4 erit $5 \times 5 \times 5 \times 5$, sive 625; atque a^3b^2 erit $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$, sive 500. Ubi nota, quòd numerus inter duas species immediatè scriptus, ad priorem semper pertinet. Sic 3 in quantitate a^3bb non denotat *bb* ter capiendum esse, sed *a* in se bis ducendum. Nota etiam, quòd hæ quantitates tot *dimensionum* vel *potestatum* vel *dignitatum* esse dicuntur, quot factoribus seu quantitatibus se multiplicantibus constant; & numerus suffixus vocatur *Index* potestatum vel dimensionum. Sic *aa* est duarum dimensionum vel potestatum, & a^3 trium, ut indicat suffixus numerus 3. Dicitur etiam *aa* quadratum, a^3 cubus, a^4 quadrato-quadratum, a^5 quadrato-cubus, a^6 cubo-cubus, a^7 quadrato-quadrato-cubus, & sic porro. Et quantitas *a*, ex cujus in se multiplicatione hæ potestates generantur, dicitur earum *Radix*, nempe radix quadratica quadrati *aa*, cubica cubi a^3, &c.

Cùm autem radix per seipsam multiplicata producat quadratum, & quadratum illud iterum per radicem multiplicatum producat cubum, *&c.* erit (ex definitione Multiplicationis) ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum, & quadratum ad cubum, *&c.* Adeoque quantitatis cujuscunque *radix quadratica* erit medium proportionale inter unitatem & quantitatem illam, & *radix cubica* primum è duobus mediè proportionalibus, & *radix quadrato-quadratica* primum è tribus, & sic præterea. Duplici igitur affectione radices innotescunt, tum quòd seipsas multiplicando producant superiores potestates, tum quòd sint è mediis proportionalibus inter istas potestates & unitatem. Sic numeri 64 radicem quadraticam esse 8, & cubicam 4, vel ex eo patet, quòd 8×8, & $4 \times 4 \times 4$ valeant 64; vel quòd sit 1 ad 8 ut 8 ad 64, & 1 ad 4 ut 4 ad 16, & 16 ad 64. Et hinc si lineæ alicujus AB radix quadratica extrahenda est, produc eam ad C, ut sit BC unitas; dein super AC describe semicirculum, & ad B erige perpendiculum huic circulo occurrens in D, eritque BD radix, quia media proportionalis est inter AB & unitatem BC.



Ad

CAPUT PRIMUM.

Ad deſignandam radicem *alicujus quantitatis præfigi ſolet nota*, $\surd$, *ſi radix ſit quadratica*, *&* $\surd 3:$ *ſi ſit cubica*, *&* $\surd 4:$ *ſi quadrato-quadratica*, &c. Sic $\surd 64$ denotat 8; & $\surd 3: 64$ denotat 4; & $\surd aa$ denotat a; & $\surd ax$ denotat radicem quadraticam ex ax; & $\surd 3: 4axx$ radicem cubicam ex $4axx$. Ut ſi a ſit 3, & x, 12; tum $\surd ax$ erit $\surd 36$, ſeu 6; & $\surd 3: 4axx$ erit $\surd 3: 1728$, ſeu 12. Et hæ radices, ubi non licet extrahere, dicuntur *ſurdæ quantitates*, ut $\surd ax$; vel *ſurdi numeri*, ut $\surd 12$.

Nonnulli pro deſignandâ quadraticâ poteſtate uſurpant q, pro cubicâ c, pro quadrato-quadraticâ qq, pro quadrato-cubicâ, qc, &c. Et ad hunc modum pro quadrato, cubo, & quadrato-quadrato ipſius A, ſcribitur Aq, Ac, Aqq, &c. Et pro radice cubicâ ex $abb - x^3$ ſcribitur $\surd c: abb - x^3$. Alii alias notas adhibent, ſed quæ jam ferè exoleverunt [h].

Nota

[h] Commodiſſimè autem radices deſignantur adhibitis indicibus fractis, Alberti Gerardi more, pleriſque etiam hodie uſitato. Nempe pro radice quadraticâ quantitatis ab ſcribere ſolemus $\overline{ab}|^{\frac{1}{2}}$, pro radice cubicâ quantitatis a^2b, $\overline{a^2b}|^{\frac{1}{3}}$: pro radice quadraticâ cubi quantitatis a, $a^{\frac{3}{2}}$: pro radice cubicâ quadrati quantitatis a, $a^{\frac{2}{3}}$: et ſimiliter pro ſuperiorum poteſtatum radicibus. Cujus quidem notationis ea eſt vis, ut cujuſque ſive poteſtatis ſive radicis index locum ejus ſignificet in perpetuâ quâdam, quæ ab unitate initium ſumat, proportione convenientium ſerie. Sic quantitatis a^3 index ternarius ſignificat quantitatem illam proportione convenientium tertiam poſt unitatem eſſe, quarum quantitas ſimplex a poſt unitatem prima eſt. Quantitatis a^5 index quinarius ſignificat quantitatem illam quintam poſt unitatem eſſe, in eâdem proportione convenientium ulterius exporrectâ ſerie. Quantitatis autem $a^{\frac{1}{3}}$ index $\frac{1}{3}$ ſignificat quantitatem illam unitati proximam, in perpetuâ quâdam proportione convenientium ſerie, cujus quantitas ſimplex a poſt unitatem tertia eſt. Quantitatis $a^{\frac{2}{3}}$ index $\frac{2}{3}$ ſignificat quantitatem illam unitati proximam eſſe, in perpetuâ proportione convenientium ſerie, cujus tertium poſt unitatem locum quantitatis a poteſtas quadratica occupat. Denique quatitatis $a^{\frac{3}{2}}$ index $\frac{3}{2}$ ſignificat quantitatem illam unitati proximam eſſe, in continuâ proportione convenientium ſerie, cujus ſecundum poſt unitatem locum quantitatis a poteſtas cubica occupat. In ſummâ, index radicalis $\frac{m}{n}$ ſignificat radicem à numero n denominatam, ex poteſtate à numero m denominatâ, extrahendam. —Indices autem illi, ſive poteſtatum ſive radicum, Logarithmorum quodammodo ſortiti ſunt naturam. Etenim ſi pro Logarithmo rationis unitatis ad quantitatem aliquam ſumatur 1, Logarithmus rationis unitatis ad poteſtatem illius quantitatis quadraticam binarius erit; ad cubicam ternarius; ad biquadraticam quaternarius; ad ulteriorem denique omnem poteſtatem numerus poteſtatis illius indici æqualis. Logarithmus autem rationis unitatis ad radicem ejuſdem quantitatis quadraticam erit, $\frac{1}{2}$; ad radicem cubicam $\frac{1}{3}$; ad radicem biquadraticam; $\frac{1}{4}$ ad radicem $\frac{1}{n}$, erit $\frac{1}{n}$; ad radicem $\frac{2}{3}$, erit $\frac{2}{3}$; ad radicem $\frac{3}{2}$, erit; $\frac{3}{2}$ ad radicem $\frac{m}{n}$, erit $\frac{m}{n}$. Hinc haud inepta indicis definitio erit, eum eſſe quantitatem illam, quæ eam ad unitatem proportionem habeat, quam Logarithmus rationis inter unitatem & quantitatem poteſtati vel radici indicatæ æqualem ad Logarithmum rationis inter unitatem & quantitatem ſimplicem, unde poteſtas vel radix indicata ortum duxit. Hinc indicum eadem quæ Logarithmorum erit Logiſtica. Hinc etiam quanti-

tates

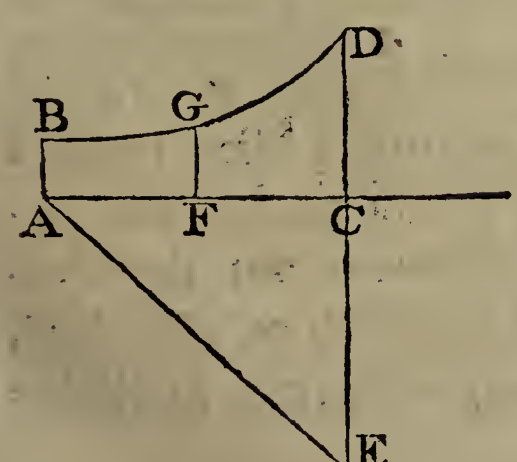
Nota = *deſignat quantitates hinc inde* æquales *eſſe*. Sic $x = b$ deſignat x æqualem eſſe b. NOTATIO.

Nota : : *ſignificat quantitates hinc inde* proportionales *eſſe*. Sic $a.\ b :: c.\ d$, ſignificat eſſe a ad b ut c ad d. Et $a.\ b.\ e :: c.\ d.\ f$ eſſe a, b & e inter ſe, ut ſunt c, d & f inter ſe reſpectivè; vel eſſe a ad c, b ad d & e ad f in eâdem ratione[i].

Denique notarum, quæ ex his componuntur, interpretatio per Analogiam facilè innoteſcit. Sic enim $\frac{3}{4}a^3bb$ denotat tres quartas partes ipſius a^3bb; & $3\frac{a}{c}$, ter $\frac{a}{c}$; & $7\sqrt{ax}$, ſepties $\sqrt{ax}$. Item $\frac{a}{b}x$ denotat id quod fit multiplicando x per $\frac{a}{b}$; & $\frac{5ee}{4a+9e}Z^3$ id quod fit multiplicando Z^3 per $\frac{5ee}{4a+9e}$; hoc

tates $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}, \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ quæ, ipſâ quidem unitate ad initium ſcalæ Logarithmicæ conſtitutâ, Logarithmis negativis gaudent, indicibus etiam negativis haud incommodè exprimantur; hoc modo: $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{3}}$. Indices autem illi negativi poſitivis ita ſcilicet reſpondent, ut in perpetuâ quantitatum analogiâ, æqualia quaſi ab unitate locorum intervalla indices æquales, poſitivi negativique, ſignificent, ſed a partibus contrariis. Ut ſi quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ unitate major ſit, quantitas $a^{-\frac{m}{n}}$ unitate ſecundam eandem rationem erit minor. E diverſo ſi quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ unitate minor ſit, erit $a^{-\frac{m}{n}}$ unitate ſecundum eandem rationem major. Duarum vero $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$, in utroque caſu, unitas ipſa proportione media erit. Generaliter igitur, indicum æqualium affirmatio et negatio analogiæ continuationem ſignificat, gradibus iiſdem, in partes contrarias.

Ex hâc denique notatione novum quoddam irrationalium genus in notitiam venit, quæ irrationaliter irrationalia haud immeritò dicantur, indicibus nimirum ſurdis deſignata. Hujuſmodi ſunt $\overline{ab}|^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$ $\overline{a^3b+9a^2xx}|^{\sqrt{3}}$, modo quantitates ſimplices a, b, x, rationales ſint.



Exponatur curva Logarithmica B G D, cujus ordinata A B ſit unitas, ordinata autem C D quantitati ab æquetur. In D C productâ capiatur C E = 2 A C, junctâque A E, ſecetur A C in puncto F, ut ſit A F ad A C ut C E ad A E. Per F ducatur ordinata; quæ curvæ in G occurrat. Recta F G quantitas erit notis $\overline{ab}|^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$ ſignificata, quæ haud aliter, ut opinor, ſub phantaſiam cadit, niſi tanquam ordinata curvæ logarithmicæ, vel tanquam area hyperbolica, vel per aliquam ſaltem logarithmorum lineationem.

[i] Proportionum ſimilitudines, cum exteris, ſic deſignare ſoleo $a : b = c : d$ rationibus conferendis interpoſitâ ſcilicet æqualitatis, tanquam ταυτότητος notâ.

 eſt

CAPUT PRIMUM.

eſt per Quotum exortum diviſione $5ee$ per $4a+9e$; & $\frac{2a^3}{9c}\sqrt{ax}$ id quod fit multiplicando $\sqrt{ax}$ per $\frac{2a^3}{9c}$; & $\frac{7\sqrt{ax}}{c}$ quotum exortum diviſione $7ax$ per c; & $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ quotum exortum diviſione $8a\sqrt{cx}$ per ſummam quantitatum $2a+\sqrt{cx}$. Et ſic $\frac{3axx-x^3}{a+x}$ denotat quotum exortum diviſione differentiæ $3axx-x^3$ per ſummam $a+x$; & $\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ radicem ejus Quoti; & $\overline{2a+3c}\sqrt{\frac{3axx-x^3}{a+x}}$ id quod fit multiplicando radicem illam per ſummam $2a+3c$. Sic etiam $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ denotat radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{4}aa$ & bb; & $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem ſummæ quantitatum $\frac{1}{2}a$ & $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; & $\frac{2a^3}{aa-zz}\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ radicem illam multiplicatam per $\frac{2a^3}{aa-zz}$. Et ſic in aliis.

Cæterùm nota, quòd in hujuſmodi complexis quantitatibus, non opus eſt ad ſignificationem ſingularum literarum ſemper attendere; ſed ſufficit in genere tantum intelligere, *e. g.* quòd $\sqrt{\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$ ſignificat radicem aggregati $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}$; quodcunq; tandem prodeat illud aggregatum, cùm numeri vel lineæ pro literis ſubſtituuntur. Atque ita quòd $\frac{\sqrt{\frac{1}{2}a\times\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}}}{a-\sqrt{ab}}$ ſignificat quotum exortum diviſione quantitatis $\sqrt{\frac{1}{2}a\times\sqrt{\frac{1}{4}aa\times bb}}$ per quantitatem $a-\sqrt{ab}$, perinde ac ſi quantitates illæ ſimplices eſſent & cognitæ, etſi quænam ſint impræſentiarum prorſùs ignoretur, & ad ſingularum partium conſtitutionem aut ſignificationem neutiquàm attendatur. Id quod monendum eſſe duxi, ne complexione terminorum Tirones quaſi conterriti in limine hæreant.

CAP.

CAPUT SECUNDUM.

ADDITIO.

DE ADDITIONE.

NUmerorum, ubi *non ſunt admodum compoſiti*, Additio per ſe manifeſta eſt. Sic quòd 7 & 9, ſeu 7 + 9, faciunt 16, & quòd 11 + 15 faciunt 26 primâ fronte patet. At in *magis compoſitis* opus peragitur *ſcribendo numeros ſerie deſcendente, & ſummas columnarum ſigillatim colligendo.* Quemadmodum ſi numeri 1357 & 172 addendi ſunt, ſcribe alterutrum 172 infra alterum 1357, ita ut hujus unitates 2 alterius unitatibus 7 ſubjiciantur, cæterique numeri numeris correſpondentibus, nempe deni 7 denis 5, & centenus 1 centenis 3. Tum incipiendo ad dextram, dic 2 & 7 faciunt 9; quem ſcribe infrà. Item 7 & 5 faciunt 12, cujus poſteriorem numerum 2 ſcribe infrà, priorem vero 1 aſſerva proximis numeris, 1 & 3, adjiciendum. Dic itaque præterea 1 & 1 faciunt 2, cui 3 adjectus facit 5; & ſcribe 5 infrà; & manebit tantùm 1 prima figura ſuperioris numeri, quæ etiam infrà ſcribenda eſt, & ſic habebitur ſumma 1529.

$$\begin{array}{r} 1357 \\ 172 \\ \hline 1529 \end{array}$$

Sic numeros 87899 + 13403 + 885 + 1920, quo in unam ſummam redigantur, ſcribe in ſerie deſcendente, ita ut unitates unam columnam, deni numeri aliam, centeni tertiam, milleni quartam conſtituant, & ſic præterea. Deinde dic 5 + 3 valent 8; & 8 + 9 valent 17; ſcribeque 7 infrà, & 1 adjice proximis numeris, dicendo 1 + 8 valent 9; 9 + 2 valent 11; ac 11 + 9 valent 20: Subſcriptoque 0, dic iterum ut antè, 2 + 8 valent 10; 10 + 9 valent 19; 19 + 4 valent 23; & 23 + 8 valent 31; adeoque aſſervato 3, ſubſcribe 1 ut antè; & iterum dic 3 + 1 valent 4; 4 + 3 valent 7; & 7 + 7 valent 14. Quare ſubſcribe 4, denuoque dic 1 + 1 valent 2; & 2 + 8 valent

$$\begin{array}{r} 87899 \\ 13403 \\ 1920 \\ 885 \\ \hline 104107 \end{array}$$

CAPUT SECUNDUM.

lent 10; quem ultimò fubfcribe, & omnium fummam habebis 104107.

Ad eundem modum numeri decimales adduntur ut in annexo paradigmate videre eft.

$$\begin{array}{r} 630'953 \\ 51'0807 \\ \underline{305'27} \\ 987'3037 \end{array}$$

In terminis Algebraicis Additio *fit connectendo quantitates addendas cum fignis propriis, & infuper uniendo quæ poffunt uniri.* Sic a & b faciunt $a+b$; a & $-b$ faciunt $a-b$; $-a$ & $-b$ faciunt $-a-b$; $7a$ & $9a$ faciunt $7a+9a$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $-a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$, vel $b\sqrt{ac}-a\sqrt{ac}$, nam perinde eft quo ordine fcribantur.

Quantitates affirmativæ, quæ ex parte fpecierum conveniunt, uniuntur addendo numeros præfixos, quibus fpecies multiplicantur. Sic $7a+9a$ faciunt $16a$. Et $11bc+15bc$ faciunt $26bc$. Item $3\dfrac{a}{c}+5\dfrac{a}{c}$ faciunt $8\dfrac{a}{c}$; & $2\sqrt{ac}+7\sqrt{ac}$ faciunt $9\sqrt{ac}$; & $6\sqrt{ab-xx}+7\sqrt{ab-xx}$ faciunt $13\sqrt{ab-xx}$. Et ad eundem modum $6\sqrt{3}+7\sqrt{3}$ faciunt $13\sqrt{3}$. Quinetiam $a\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{a+b}\sqrt{ac}$, additis nempe a & b tanquam fi effent numeri multiplicantes $\sqrt{ac}$. Et fic $\overline{2a+3c}\sqrt{\dfrac{3axx-x^3}{a+x}}+3a\sqrt{\dfrac{3axx-x^3}{a+x}}$ faciunt $\overline{5a+3c}\sqrt{\dfrac{3axx-x^3}{a+x}}$, eo quòd $2a+3c$ & $3a$ faciant $5a+3c$.

Fractiones affirmativæ quarum idem eft denominator, uniuntur addendo numeratores. Sic $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ faciunt $\frac{3}{5}$; & $\dfrac{2ax}{b}+\dfrac{3ax}{b}$ faciunt $\dfrac{5ax}{b}$; & $\dfrac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}+\dfrac{17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ faciunt $\dfrac{25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; & $\dfrac{aa}{c}+\dfrac{bx}{c}$ faciunt $\dfrac{aa+bx}{c}$.

Negativæ quantitates eodem modo adduntur ac affirmativæ.

Sic

ADDITIO.

Sic -2 & -3 faciunt -5; $-\frac{4ax}{b}$ & $-\frac{11ax}{b}$ faciunt $-\frac{15ax}{b}$; $-a\sqrt{ax}$ & $-b\sqrt{ax}$ faciunt $-a-b\sqrt{ax}$.

Ubi verò *negativa quantitas affirmativæ adjicienda eſt* oportet affirmativam negativâ diminuere. Sic 3 & -2 faciunt 1; $\frac{11ax}{b}$ & $-\frac{4ax}{b}$ faciunt $\frac{7ax}{b}$; $-a\sqrt{ac}$ & $b\sqrt{ac}$ faciunt $\overline{b-a}\sqrt{ac}$. Et nota, quòd ubi negativa quantitas excedit affirmativam, aggregatum erit negativum. Sic 2 & -3 faciunt -1; $-\frac{11ax}{b}$ & $\frac{4ax}{b}$ faciunt $-\frac{7ax}{b}$; ac $2\sqrt{ac}$ & $-7\sqrt{ac}$ faciunt $-5\sqrt{ac}$.

In additione aut plurium aut magis compoſitarum quantitatum, convenit obſervare formam operationis ſuprà in additione numerorum expoſitam. Quemadmodum ſi $17ax-14a+3$, & $4a+2-8ax$, & $7a-9ax$ addendæ ſunt, diſpono eas in ſerie deſcendente, ita ſcilicet ut termini maximè affines ſtent in iiſdem columnis. Nempe numeri 3 & 2 in unâ columnâ, ſpecies $-14a$ & $4a$ & $7a$ in aliâ columnâ, atque ſpecies $17ax$ & $-8ax$ & $-9ax$ in tertiâ. Dein terminos cujuſque columnæ ſigillatim addo; dicendo 2 & 3 faciunt 5; quod ſubſcribo: dein $7a$ & $4a$ faciunt $11a$; & inſuper $-14a$ facit $-3a$; quod iterum ſubſcribo: denique $-9ax$ & $-8ax$ faciunt $-17ax$, & inſuper $17ax$ facit 0. Adeoque prodit ſumma $-3a+5$.

$$\begin{array}{rrr} 17ax & -14a & +3 \\ -8ax & +4a & +2 \\ -9ax & +7a & \\ \hline * & -3a & +5 \end{array}$$

Eâdem methodo res in ſequentibus exemplis abſolvitur.

$$\begin{array}{l} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 19x+16a \end{array} \qquad \begin{array}{l} 11bc+7\sqrt{ac} \\ 15bc+2\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \qquad \begin{array}{l} -\frac{4ax}{b}+6\sqrt{3}+\frac{1}{5} \\ +\frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

$-6xx$.

Caput Secundum.

$$\begin{array}{r} -6xx+\frac{3}{7}x \\ 5x^3 \quad +\frac{5}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aay+2a^3-\dfrac{a^4}{2y} \\ -2ayy-4aay+\quad a^3 \\ y^3+2ayy-\frac{1}{2}aay \\ \hline y^3 \quad * -3\frac{1}{2}aay+3a^3-\dfrac{a^4}{2y} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 5x^4+2ax^3 & & & \\ -3x^4-2ax^3+ & 8\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} & & \\ -2x^4+5bx^3- & 20\ a^3\sqrt{aa-xx} & & \\ -4bx^3- & 7\frac{1}{4}a^3\sqrt{aa+xx} & & \\ \hline * \quad + \quad bx^3+ & a^3\sqrt{aa+xx} & & \\ - & 20a^3\sqrt{aa-xx}. & & \end{array}$$

CAPUT TERTIUM.

DE SUBDUCTIONE.

NUMERORUM *non nimis compoſitorum* inventio etiam Differentiæ per ſe patet. Quemadmodum quòd 9 de 17 relinquat 8. At in *magis compoſitis* Subductio fieri ſolet *ſubſcribendo numerum ablativum, & ſigillatim auferendo figuras inferiores de ſuperioribus.* Sic ad auferendum 63543 de 782579, ſubſcripto 63543, dic 3 de 9 relinquit 6, quod ſcribe infrà: Dein 4 de 7 relinquit 3, quod pariter ſcribe infrà: Tum 5 de 5 relinquit 0, quod itidem ſubſcribe: Poſtea 3 de 2 auferendum eſt: ſed cùm 3 ſit majus, figura 1 à proximâ figurâ 8 mutuò ſumi debet, quæ unà cum 2 faciat 12; à quo auferri poteſt 3, & reſtat 9; quod inſuper ſubſcribe: Adhæc cùm præter 6 etiam 1 de 8 auferendum ſit, adde 1 ad 6, & ſumma 7 de 8 relinquet 1; quod etiam ſubſcribe. Denique cùm in inferiori numero nihil reſtet auferendum de ſuperiori 7, ſubſcribe etiam 7, & ſic tandem habes differentiam 719036.

$$\begin{array}{r} 782579 \\ 63543 \\ \hline 719036 \end{array}$$

Cæterùm

Cæterùm omnino cavendum eſt, ut figuræ numeri ablativi ſubſcribantur in locis homogeneis; nempe unitates infra alterius numeri unitates, deni numeri infra denos, decimæ partes infra decimas, *&c.* Sicut in Additione dictum eſt. Sic ad auferendum decimalem 0'63 ab integro 547, non diſpones numeros hoc modo $\begin{smallmatrix}5,47\\0,63\end{smallmatrix}$; ſed ſic $\begin{smallmatrix}547\\0,63\end{smallmatrix}$; ita nempe ut circulus, qui locum unitatum in decimali occupat, ſubjiciatur unitatibus alterius numeri. Tum, circulis in locis vacuis ſuperioris numeri ſubintellectis, dic 3 de 0 auferendum eſſe; ſed cùm nequeat, debet 1 de loco anteriori mutuò ſumi, ut 0 evadat 10; à quo 3 auferri poteſt, & dabit 7, quod infrà ſcribe. Dein illud 1 quod mutuò ſumitur, adjectum 6 facit 7, & hoc de ſuperiore 0 auferendum eſt; ſed cùm nequeat, debet iterum 1 de loco anteriori ſumi, ut 0 evadat 10; & 7 de 10 relinquet 3, quod ſimiliter infrà ſcribendum eſt. Tum illud 1 adjectum 0 facit 1, & hoc 1 de 7 relinquit 6; quod itidem ſubſcribe. Denique figuras etiam 54, ſiquidem de illis nihil amplius auferendum reſtat, ſubſcribe, & habebis reſiduum 546'37.

$$\begin{array}{r}547\\ \underline{0'63}\\ 546'37\end{array}$$

Exercitationis gratiâ plura, tum in integris tum in decimalibus numeris, exempla ſubjecimus.

1673	1673	458074	35'72	46,5003	308,7
1541	1580	9205	14'32	3,078	25,74
132.	93.	448869.	21'4.	43,4223.	282,96

Siquando major numerus de minori auferendus eſt, oportet minorem de majore auferre, & reſiduo præfigere negativum ſignum. Veluti ſi auferendum ſit 1673 de 1541, è contra aufero 1541 de 1673, & reſiduo 132 præfigo ſignum −.

In terminis Algebraicis Subductio *fit connectendo quantitates, cum ſignis omnibus quantitatis ſubducendæ mutatis, & inſuper uniendo quæ poſſunt uniri*, perinde ut in Additione factum eſt. Sic $+7a$ de $+9a$ relinquit $+9a-7a$, ſive $2a$; $-7a$ de $+9a$ relinquit $+9a+7a$, ſive $16a$; $+7a$ de $-9a$ relinquit $-9a-7a$, ſive $-16a$; & $-7a$ de $-9a$ relinquit $-9a+7a$, ſive $-2a$. Sic $3\frac{a}{c}$ de

$5\frac{a}{c}$

CAPUT TERTIUM.

$5\frac{a}{c}$ relinquit $2\frac{a}{c}$; $7\sqrt{ac}$ de $2\sqrt{ac}$ relinquit $-5\sqrt{ac}$; $\frac{2}{9}$ de $\frac{5}{9}$ relinquit $\frac{3}{9}$; $-\frac{4}{7}$ de $\frac{3}{7}$ relinquit $\frac{7}{7}$; $-\frac{2ax}{b}$ de $\frac{3ax}{b}$ relinquit $\frac{5ax}{b}$; $\frac{8a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ de $\frac{-17a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$ relinquit $\frac{-25a\sqrt{cx}}{2a+\sqrt{cx}}$; $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bx}{c}$ relinquit $\frac{bx-aa}{c}$; $a-b$ de $2a+b$ relinquit $2a+b-a+b$ ſive $a+2b$; $3az-zz+ac$ de $3az$ relinquit $3az-3az+zz-ac$ ſive $zz-ac$; $\frac{2aa-ab}{c}$ de $\frac{aa+ab}{c}$ relinquit $\frac{aa+ab-2aa+ab}{c}$ ſive $\frac{-aa+2ab}{c}$: Et $\overline{a-x}\sqrt{ax}$ de $\overline{a+x}\sqrt{ax}$ relinquit $\overline{a+x-a+x}\sqrt{ax}$ ſive $2x\sqrt{ax}$. Et ſic in aliis.

Cæterùm ubi quantitates pluribus terminis conſtant, operatio perinde ac in numeris inſtitui poteſt. Id quod in ſequentibus exemplis videre eſt.

$$\begin{array}{r} 12x+7a \\ 7x+9a \\ \hline 5x-2a \end{array} \quad . \quad \begin{array}{r} 15bc+2\sqrt{ac} \\ -11bc+7\sqrt{ac} \\ \hline 26bc-5\sqrt{ac} \end{array} \quad : \quad \begin{array}{l} 5x^3 \quad +\frac{5}{7}x \\ 6xx-\frac{3}{7}x \\ \hline 5x^3-6xx+\frac{8}{7}x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{11ax}{b}-7\sqrt{3}+\frac{2}{5} \\ \frac{4ax}{b}-6\sqrt{3}-\frac{1}{5} \\ \hline \frac{7ax}{b}-\sqrt{3}+\frac{3}{5} \end{array}$$

CAPUT

CAPUT QUARTUM.

MULTIPLICATIO.

DE MULTIPLICATIONE.

NUMERI qui ex Multiplicatione duorum quorumvis numerorum non majorum quàm 9 oriuntur, memoriter addiſcendi ſunt. Veluti quod 5 in 7, facit 35; quòdque 8 in 9 facit 72, &c. Deinde majorum numerorum multiplicatio ad horum exemplorum normam inſtituetur.

Si 795 per 4 multiplicare oportet, ſubſcribe 4, ut vides. Dein dic, 4 in 5 facit 20, cujus poſteriorem figuram 0, ſcribe infrà 4, priorem vero 2 reſerva in proximam operationem. Dic itaque præterea 4 in 9 facit 36, cui adde præfatum 2, & fit 38; cujus poſteriorem figuram 8 ut antè ſubſcribe, & priorem 3 reſerva. Denique dic 4 in 7 facit 28 cui adde prædictum 3 & fit 31. Eoque pariter ſubſcripto, habebitur 3180, numerus qui prodit multiplicando totum 795 per 4.

$$\begin{array}{r} 795 \\ 4 \\ \hline 3180 \end{array}$$

Porrò ſi 9043 multiplicandus eſt per 2305, ſcribe alterutrum 2305 infra alterum 9043 ut antè, & multiplica ſuperiorem 9043, primò per 5 pro more oſtenſo; & emerget 45215: dein per 0, & emerget 0000: tertio per 3, & emerget 27129: denique per 2, & emerget 18086. Hoſque ſic emergentes numeros in ſerie deſcendente ita ſcribe, ut cujuſque inferioris ultima figura ſit uno loco proprior ſiniſtræ, quàm ultima ſuperioris. Tandem hos omnes adde & orietur 20844115, numerus qui ſit multiplicando totum 9043 per 2305.

$$\begin{array}{r} 9043 \\ 2305 \\ \hline 45215 \\ 0000 \\ 27129 \\ 18086 \\ \hline 20844115 \end{array}$$

Decimales numeri per integros vel per alios decimales perinde multiplicantur, ut vides in his exemplis.

CAPUT QUARTUM.

72,4	50,18	3,9025
29	2,75	0,0132
6516	25090	78050
1448	35126	117075
2099,6	10036	39025
	137,9950	0,05151300

Sed nota, quòd *in prodeunte numero tot ſemper figuræ ad dextram pro decimalibus abſcindi debent, quot ſunt figuræ decimales in utroque numero multiplicante.* Et ſi fortè non ſint tot figuræ in prodeunte numero, deficientes loci circulis adimplendi ſunt, ut hîc fit in exemplo tertio.

Simplices termini Algebraici multiplicantur ducendo numeros in numeros, & ſpecies in ſpecies, ac ſtatuendo factum Affirmativum, *ſi ambo factores ſint affirmativi aut ambo negativi, &* Negativum *ſi ſecus.*

Sic $2a$ in $3b$, vel $-2a$ in $-3b$, facit $6ab$; vel $6ba$: Nihil enim refert quo ordine ponantur. Sic etiam $2a$ in $-3b$, vel $-2a$ in $3b$, facit $-6ab$. Et ſic $2ac$ in $8bcc$ facit $16abccc$, ſive $16abc^3$; & $7axx$ in $-12aaxx$ facit $-84a^3x^4$; & $-16cy$ in $31ay^3$ facit $-496acy^4$; & $-4z$ in $-3\sqrt{az}$ facit $12z\sqrt{az}$. Atque ita 3 in -4 facit -12, & -3 in -4 facit 12.

Fractiones multiplicantur ducendo numeratores in numeratores ac denominatores in denominatores.

Sic $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{6}{35}$; & $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ facit $\frac{ac}{bd}$; & $2\frac{a}{b}$ in $3\frac{c}{d}$ facit $6\times\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ ſeu $6\frac{ac}{bd}$; & $\frac{3acy}{2bb}$ in $\frac{-7cyy}{4b^3}$ facit $\frac{-21accy^3}{8b^5}$; & $\frac{-4z}{c}$ in $\frac{-3\sqrt{az}}{c}$ facit $\frac{12z\sqrt{az}}{cc}$; & $\frac{a}{b}x$ in $\frac{c}{d}xx$ facit

ac

* Quantitates potentiales et radicales diverſarum denominationum ab eâdem quantitate ſimplici, adhibitis indicibus fractis, multiplicantur indicum additione: ſiquidem logarithmi ſunt.

$\frac{ac}{bd}x^3$. Item 3 in $\frac{2}{5}$ facit $\frac{6}{5}$; ut pateat, ſi 3 reducatur ad formam fractionis $\frac{3}{1}$, adhibendo unitatem pro Denominatore. Et ſic $\frac{15aaz}{cc}$ in $2a$ facit $\frac{30a^3z}{cc}$. Unde obiter nota, quòd $\frac{ab}{c}$ & $\frac{a}{c}b$ idem valent; ut & $\frac{abx}{c}$, $\frac{ab}{c}x$, & $\frac{a}{c}bx$; nec non $\frac{\overline{a+b\sqrt{cx}}}{a}$ & $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$, & ſic in aliis.

Quantitates radicales ejuſdem denominationis (hoc eſt, ſi ſint ambæ radices quadraticæ, aut ambæ cubicæ, aut ambæ quadrato-quadraticæ, *&c.*) multiplicantur ducendo terminos in ſe invicem ſub eodem ſigno radicali. Sic $\sqrt{3}$ in $\sqrt{5}$ facit $\sqrt{15}$; & $\sqrt{ab}$ in $\sqrt{cd}$ facit $\sqrt{abcd}$. Et $\sqrt[3]{5ayy}$ in $\sqrt[3]{7ayz}$ facit $\sqrt[3]{35aay^3z}$. Et $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ in $\sqrt{\frac{abb}{c}}$ facit $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$, hoc eſt * $\frac{aab}{c}$. Et $2a\sqrt{az}$ in $3b\sqrt{az}$ facit $6ab\sqrt{aazz}$, hoc eſt $6aabz$. Et $\frac{3xx}{\sqrt{ac}}$ in $\frac{-2x}{\sqrt{ac}}$ facit $\frac{-6x^3}{\sqrt{aacc}}$, hoc eſt $\frac{-6x^3}{ac}$. Et $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$ in $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ facit $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ k.

* Vide Cap. *De Notatione.*

Quantitates pluribus partibus conſtantes multiplicantur ducendo ſingulas unius partes in ſingulas alterius, perinde ut in Multiplicatione numerorum oſtenſum eſt. Sic $c-x$ in a facit $ac-ax$, & $aa+2ac-bc$ in $a-b$ facit $a^3+2aac-aab-3bac+bcc$. Nam $aa+2ac-bc$ in $-b$ facit $-aab-2acb+bbc$, & in a facit $a^3+2aac-abc$, quorum ſumma eſt $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$. Hujus multiplicationis ſpecimen, unà cum aliis conſimilibus exemplis, ſubjectum habes.

ſunt indices (vide cap. 1. not. [h]). Sic $a^2 \times a^3 = a^5$, et $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$, et $a^2 \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{3}}$, et $a^3 \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$, et $a^5 \times a^{-3} = a^2$, et $a^3 \times a^{-5} = a^{-2}$, et $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$, & $a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{4}{5}} = a^{-\frac{22}{15}}$, et $a^3 \times a^2 \times a^{-5} = a^0 = 1$, et $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{2}{3}} = a^0 = 1$.

$$\begin{array}{r} aa + 2ac - bc \\ a - b \\ \hline -aab - 2abc + bbc \\ a^3 + 2aac - abc \\ \hline a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + bb \\ aa + ab \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline -ab - bb \\ aa + ab \\ \hline aa \quad * - bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa \\ yy - 2ay + aa \\ \hline aayy + 2a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \\ -2ay^3 - 4aayy + a^3y \\ y^4 + 2ay^3 - \tfrac{1}{2}aayy \\ \hline y^4 \quad * - 3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \dfrac{2ax}{c} - \sqrt{\dfrac{a^3}{c}} \\ 3a + \sqrt{\dfrac{abb}{c}} \\ \hline \dfrac{2ax}{c}\sqrt{\dfrac{abb}{c}} - \dfrac{aab}{c} \\ \dfrac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\dfrac{a^3}{c}} \\ \hline \dfrac{6aax}{c} - 3a\sqrt{\dfrac{a^3}{c}} + \dfrac{2ax}{c}\sqrt{\dfrac{abb}{c}} - \dfrac{aab}{c}. \end{array}$$

CAPUT

CAPUT QUINTUM.

DE DIVISIONE.

Divisio.

DIVISIO in numeris instituitur, quærendo quot vicibus Divisor in Dividendo continetur, totiesque auferendo, & scribendo totidem unitates in Quoto. Idque iteratò si opus est, quamdiu divisor auferri potest.

Sic ac dividendum 63 per 7, quære quoties 7 continetur in 63, & emergent 9 pro quoto præcisè; adeoque $\frac{63}{7}$ valet 9. Insuper ad dividendum 371 per 7, præfige divisorem 7, & imprimis opus instituens in initialibus figuris Dividendi proximè majoribus Divisore, nempe in 37, dic quoties 7 continetur in 37? Resp. 5. Tum, scripto 5 in Quoto, aufer 5×7, seu 35, de 37, & restabit 2; cui adnecte ultimam figuram Dividendi, nempe 1, & fit 21, reliqua pars Dividendi, in quâ proximum opus instituendum est. Dic itaque ut ante quoties 7 continetur in 21? Resp. 3. Quare scripto 3 in Quoto, aufer 3×7, seu 21, de 21, & restabit 0. Unde constat 53 esse numerum præcisè, qui oritur ex divisione 371 per 7.

$$\begin{array}{r} 7)371(53 \\ 35 \\ \hline 21 \\ 21 \\ \hline 0 \end{array}$$

Atque ita ad dividendum 4798 per 23, opus primò instituens in initialibus figuris 47, dic quoties 23 continetur in 47? Resp. 2. Scribe ergo 2 in Quoto; & de 47 subduc 2×23, seu 46, restatque 1; cui subjunge proximum numerum Dividendi, nempe 9, & fit 19 in subsequens opus. Dic itaque quoties 23 continetur in 19? Resp. 0. Quare scribe 0 in Quoto; & de 19, subduc 0×23, seu 0, & restat 19; cui subjunge ultimum numerum 8, & fit 198 in proximum opus. Quamobrem dic ultimò quoties 23 continetur in 198, (id quod ex initialibus numeris,

2 & 19, conjici poteſt, animadvertendo quoties 2 continetur in 19)? Reſp. 8. Quare ſcribe 8 in Quoto; & de 198 ſubduc 8 × 23, ſeu 184; reſtabitque 14 adhuc dividendus per 23. Adeoque Quotus erit $208\frac{14}{23}$. Quod ſi hujuſmodi fractio minùs placeat, poſſis Diviſionem in Fractionibus decimalibus ultrà ad libitum proſequi, ſemper adnectendo circulum numero reſiduo. Sic reſiduo 14 adnecte 0, fitque 140. Tum dic quoties 23 ſit in 140? Reſp. 6. Scribe ergo 6 in Quoto; & de 140 ſubduc 6 × 23, ſeu 138, & reſtabit 2; cui adnecte 0 ut ante. Et ſic, opere ad arbitrium continuato, emerget tandem Quotus 208,6086, &c.

23)4798(208,6086, &c.
46
——
19
00
——
198
184
——
140
138
——
20
00
——
200
184
——
160

Ad eundum modum fractio decimalis 3,5218 per fractionem decimalem 46,1 dividitur, & prodit 0,07639, &c. *Ubi nota, quòd in Quoto tot figuræ pro decimalibus abſcindendæ ſunt, quot ſunt in ultimo dividuo plures quàm in diviſore:* Ut in hoc exemplo quinque, quia ſex ſunt in ultimo dividuo 0,004370 & una in Diviſore 46,1.

46,1)3,5218(0,07639
322,7
——
2948
2766
——
1820
1383
——
4370

Exempla plura lucis gratiâ ſubjunximus.

9043)20844115(2305.
18086
——
27581
27129
——
45215
45215
——
0

72,4)2099,6(29
1448
——
6516
6516
——
0

50,18)

Divisio.

```
50,18)137,995(2,75.        0,0132)0,051513(3,9025
      10036                        396
      -----                        ----
       37635                       1191
       35126                       1188
       -----                       ----
        25090                       330
        25090                       264
        -----                       ---
            0                        660
                                     660
                                     ---
                                       0
```

In terminis Algebraicis Diviſio fit reſolvendo quicquid per multiplicationem conflatur. Sic ab diviſ. per a dat b pro quoto, $6ab$ div. per $2a$ dat $3b$; & div. per $-2a$ dat $-3b$. $-6ab$ div. per $2a$ dat $-3b$; & div. per $-2a$ dat $3b$. $16abc^3$ div. per $2ac$ dat $8bcc$. $-84a^3x^4$ div. per $-12aaxx$ dat $7axx$. Item $\frac{6}{35}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{7}$. $\frac{ac}{bd}$ div. per $\frac{a}{b}$ dat $\frac{c}{d}$. $\frac{-21accy^3}{8b^5}$ div. per $\frac{3acy}{2bb}$ dat $\frac{-7cyy}{4b^3}$. $\frac{6}{5}$ div. per 3 dat $\frac{2}{5}$; & viciſſim $\frac{6}{5}$ div. per $\frac{2}{5}$ dat $\frac{3}{1}$, ſeu 3. $\frac{30a^3z}{cc}$ div. per $2a$ dat $\frac{15aaz}{cc}$; & viciſſim diviſ. per $\frac{15aaz}{cc}$ dat $2a$. Item $\sqrt{15}$ div. per $\sqrt{3}$ dat $\sqrt{5}$. $\sqrt{abcd}$ div. per $\sqrt{cd}$ dat $\sqrt{ab}$. $\sqrt{a^3c}$ per $\sqrt{ac}$ dat $\sqrt{aa}$, ſeu a. $\sqrt[3]{35aay^3z}$ div. per $\sqrt[3]{5ayy}$ dat $\sqrt[3]{7ayz}$. $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ div. per $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ dat $\sqrt{\frac{abb}{c}}$. $\frac{12ddx\sqrt{5abcx}}{70aee}$ div. per $\frac{-3dd\sqrt{5cx}}{10ee}$ dat $\frac{-4x\sqrt{ab}}{7a}$. Atque ita $\overline{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $a+b$ dat $\sqrt{ax}$, & viciſſim div. per $\sqrt{ax}$ dat $a+b$. Et $\frac{a}{a+b}\sqrt{ax}$ div. per $\frac{1}{a+b}$ dat $a\sqrt{ax}$; vel div. per a dat $\frac{1}{a+b}\sqrt{ax}$, ſive $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$; & viciſſim div. per $\frac{\sqrt{ax}}{a+b}$ dat a. Cæterùm in hujuſmodi reſolutionibus omninò cavendum eſt, ut quan-

CAPUT QUINTUM.

quantitates ſint ejuſdem ordinis quæ ad invicem applicantur. Nempe ut numeri applicentur ad numeros, ſpecies ad ſpecies, radicales ad radicales, numeratores Fractionum ad Numeratores, ac Denominatores ad Denominatores, nec non in Numeratoribus, Denominatoribus, & Radicalibus quantitates cujuſque generis ad quantitates homogeneas.

Quòd ſi quantitas dividenda nequeat ſic per diviſorem reſolvi, ſufficit, ubi ambæ quantitates ſunt integræ, ſubſcribere Diviſorem cum lineolâ interjectâ. Sic ad dividendum ab per c, ſcribitur $\frac{ab}{c}$; & ad dividendum $\overline{a+b}\sqrt{cx}$ per a, ſcribitur $\frac{\overline{a+b}\sqrt{cx}}{a}$, vel $\frac{a+b}{a}\sqrt{cx}$. Et ſic $\sqrt{ax-xx}$ diviſ. per $\sqrt{cx}$ dat $\frac{\sqrt{ax-xx}}{\sqrt{cx}}$, ſive $\sqrt{\frac{ax-xx}{cx}}$. Et $\overline{aa+ab}\sqrt{aa-2xx}$ diviſ. per $\overline{a-b}\sqrt{aa-xx}$ dat $\frac{aa+ab}{a-b}\sqrt{\frac{aa-2xx}{aa-xx}}$. Et $12\sqrt{5}$ div. per $4\sqrt{7}$ dat $3\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Ubi verò fractæ ſunt illæ quantitates, Duc Numeratorem Dividendæ quantitatis in Denominatorem Diviſoris, ac Denominatorem in Numeratorem; & *factus prior* erit Numerator, ac *poſterior* Denominator Quoti. Sic ad dividendum $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ ſcribitur $\frac{ad}{bc}$, multiplicato ſcilicet a per d, & b per c. Parique ratione $\frac{3}{7}$ diviſ. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{35}$: & $\frac{3a}{4c}\sqrt{ax}$ diviſ. per $\frac{2c}{5a}$ dat $\frac{15aa}{8cc}\sqrt{ax}$; diviſ. autem per $\frac{2c\sqrt{aa-xx}}{5a\sqrt{ax}}$ dat $\frac{15a^2x}{8cc\sqrt{aa-xx}}$. Et ad eundem modum $\frac{ad}{b}$ diviſ. per c (ſive per $\frac{c}{1}$) dat $\frac{ad}{bc}$. Et c (ſive $\frac{c}{1}$) diviſ. per $\frac{ad}{b}$ dat $\frac{bc}{ad}$. Et $\frac{3}{7}$ div. per 5 dat $\frac{3}{35}$. Et 3 div. per $\frac{5}{4}$ dat $\frac{12}{5}$. Et $\frac{a+b}{c}\sqrt{cx}$ div. per a dat $\frac{a+b}{ac}\sqrt{cx}$. Et $\overline{a+b}\sqrt{cx}$

div.

div. per $\frac{a}{c}$ dat $\frac{ac+bc}{a}\sqrt{cx}$. Et $2\sqrt{\frac{axx}{c}}$ divis. per $3\sqrt{cd}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{axx}{ccd}}$; Div. autem per $3\sqrt{\frac{cd}{x}}$ dat $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{ax^3}{ccd}}$. Et $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{11}}$ divis. per $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ dat $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{49}{33}}$. Et sic in aliis. Divisio.

Quantitas ex pluribus terminis composita dividitur applicando singulos ejus terminos ad Divisorem. Sic $aa+3ax-xx$ divisum per a dat $a+3x-\frac{xx}{a}$. At ubi Divisor etiam ex pluribus terminis constat, divisio perinde ac in Numeris institui debet. Sic ad dividendum $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$ per $a-b$, Dic quoties a continetur in a^3, nempe primus terminus Divisoris in primo Dividendi? Resp. aa. Quare scribe aa in Quoto, & ablato $a-b$ in aa, sive a^3-aab, de Dividendo, restabit $2aac-3abc+bbc$ adhuc dividendum. Dic itaque rursus quoties a continetur in $2aac$? Resp. $2ac$. Quare scribe etiam $2ac$ in Quoto, & ablato $a-b$ in $2ac$, sive $2aac-2abc$, de præfato Residuo, restabit etiamnum $-abc+bbc$. Quamobrem dic iterum quoties a continetur in $-abc$? Resp. $-bc$. Et proinde scribe $-bc$ in Quoto, & ablato denuo $a-b$ in $-bc$, sive $-abc+bbc$, de novissimo Residuo, restabit nihil. Quod indicat Divisionem peractam esse, prodeunte Quoto $aa+2ac-bc$

Cæterùm ut hujusmodi operationes ad formam, quâ in Divisione numerorum usi sumus, debitè reducantur, *termini tum dividendæ quantitatis tum Divisoris juxta dimensiones literæ alicujus, quæ ad hanc rem maximè idonea judicabitur, in ordine disponendi sunt*, ita nempe ut illi primum locum occupent, in quibus litera ista est plurimarum dimensionum, iique secundum in quibus dimensiones ejus ad maximas proximæ sunt; Et sic deinceps usque ad terminos qui per literam istam non omnino multiplicantur, adeoque ultimum locum occupabunt. Sic in allato Exemplo si termini ordinentur juxta dimensiones literæ a, formam operis exhibebit adjunctum Diagramma.

CAPUT QUINTUM.

$$a-b)\,a^3\begin{matrix}+2aac\\-\ \ aab\end{matrix}-3abc+bbc\,(aa+2ac-bc$$

$$\begin{array}{l}
\underline{a^3-\ \ aab}\\
0+2aac-3abc\\
\quad\ \underline{2aac-2abc}\\
\qquad\quad 0-\ \ abc+bbc\\
\qquad\quad\ \ \underline{-\ \ abc+bbc}\\
\qquad\qquad\quad 0\qquad 0
\end{array}$$

Ubi videre eſt quòd terminus a^3, ſive a trium dimenſionum, occupat primum locum dividendæ quantitatis, terminique $\begin{matrix}2aac\\-aab\end{matrix}$, in quibus a eſt duarum dimenſionum, ſecundum occupant, & ſic præterea. Potuit etiam dividenda quantitas ſic ſcribi; $a^3\begin{matrix}+2c\\-\ \ b\end{matrix}aa-3bca+bbc$: ubi termini ſecundum locum occupantes uniuntur, aggregando factores literæ juxta quam fit ordinatio. Et hoc modo ſi termini juxta dimenſiones literæ b diſponerentur, opus ſicut in proximo Diagrammate inſtitui deberet: Cujus explicationem adnectere viſum eſt.

$$-b+a)\,cbb\begin{matrix}-3ac\\-\ \ aa\end{matrix}b\begin{matrix}+a^3\\+2aac\end{matrix}\,(-cb\begin{matrix}+2ac\\+\ \ aa\end{matrix}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{cbb-acb}\\
0\begin{matrix}-2ac\\-\ \ aa\end{matrix}b\begin{matrix}+a^3\\+2aac\end{matrix}\\
\ \ \underline{\begin{matrix}-2ac\\-\ \ aa\end{matrix}b\begin{matrix}+2aac\\+a^3\end{matrix}}\\
\qquad\ \ 0\qquad 0
\end{array}$$

Dic quoties $-b$ continetur in cbb? Reſp. $-cb$. Quare ſcripto $-cb$ in Quoto, aufer $-b+a$ in $-cb$, ſeu $bbc-acb$, & reſtabit in ſecundo loco $\begin{matrix}-2ac\\-\ \ aa\end{matrix}b$. Reſiduo huic adnecte, ſi placet, quantita-

tes

tes in ultimo loco, nempe $\begin{matrix} a^3 \\ +2aac \end{matrix}$; & dic iterum quoties $-b$ continetur in $\begin{matrix} -2ac \\ -aa \end{matrix} b$? Reſp. $\begin{matrix} +2ac \\ +aa \end{matrix}$. Quare his in Quoto ſcriptis, aufer $-b+a$ in $\begin{matrix} +2ac \\ +aa \end{matrix}$, ſeu $\begin{matrix} -2ac \\ -aa \end{matrix} b \begin{matrix} +2aac \\ +a^3 \end{matrix}$ & reſtabit nihil. Unde conſtat diviſionem peractam eſſe, prodeunte Quoto $-cb+2ac+aa$ ut ante.

Atque ita ſi dividere oportet $aay^4 - aac^4 + yyc^4 + y^6 - 2y^4cc - a^6 - 2a^4cc - a^4yy$ per $yy-aa-cc$: Quantitates juxta literam y ad hunc modum ordino, $yy\begin{matrix} -aa \\ -cc \end{matrix}\Big)\, y^6 \begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix} yy \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc. \\ -aac^4 \end{matrix}$ Dein Diviſionem ut in ſubjecto Diagrammate inſtituo. Adjiciuntur & alia exempla, de quibus inſuper obſervandum eſt, quod ubi dimenſiones literæ, ad quam ordinatio fit, non in eâdem ubique progreſſione Arithmeticâ, ſed per ſaltum alicubi procedunt, locis vacuis ſubſtituitur nota *

$$yy\begin{matrix} -aa \\ -cc \end{matrix}\Big)\, y^6 \begin{matrix} +aa \\ -2cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} -a^4 \\ +c^4 \end{matrix} yy \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix} \Big(\, y^4 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} yy \begin{matrix} +a^4 \\ +aacc \end{matrix}$$

$$y^6 \begin{matrix} -aa \\ -cc \end{matrix} y^4$$

$$0 \quad \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} y^4$$

$$\begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} y^4 \begin{matrix} -2a^4 \\ -aaccyy \\ +c^4 \end{matrix}$$

$$0 \quad \begin{matrix} +a^4 \\ +aacc \end{matrix} yy$$

$$\begin{matrix} +a^4 \\ +aacc \end{matrix} yy \begin{matrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \end{matrix}$$

$$0 \qquad 0$$

$$a+b)\,aa * -bb\,(a-b$$

$$aa \quad +ab$$

$$0 \quad -ab$$

$$-ab-bb$$

$$0 \quad 0$$

yy−

CAPUT SEXTUM.

$$
\begin{array}{l}
yy - 2ay + aa) \quad y^4 \quad * \quad - 3\tfrac{1}{2}aayy + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \quad (yy + 2ay - \tfrac{1}{2}aa. \\
\underline{y^4 - 2ay^3 + \quad aayy} \\
0 + 2ay^3 - 4\tfrac{1}{2}aayy \\
\underline{\quad + 2ay^3 - 4\,aayy + 2a^3y} \\
\qquad 0 - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y \\
\qquad \underline{\quad - \tfrac{1}{2}aayy + a^3y - \tfrac{1}{2}a^4} \\
\qquad\qquad 0 \qquad 0 \quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
aa + ab\sqrt{2} + bb) \quad a^4 \quad * \quad * \quad * \quad + b^4 \quad (aa - ab\sqrt{2} + bb \\
\underline{a^4 + a^3b\sqrt{2} + \quad aabb} \\
\quad - a^3b\sqrt{2} - \quad aabb \\
\quad \underline{- a^3b\sqrt{2} - 2aabb - ab^3\sqrt{2}} \\
\qquad\quad + \quad aabb + ab^3\sqrt{2} \\
\qquad\quad \underline{+ \quad aabb + ab^3\sqrt{2} + b^4} \\
\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Aliqui Divisionem incipiunt ab ultimis terminis; sed eodem recidit, si, inverso terminorum ordine, incipiatur à prioribus. Sunt & aliæ methodi dividendi, sed facillimam & commodissimam nôsse sufficit.

CAPUT SEXTUM.

DE EXTRACTIONE RADICUM.

CUM numeri alicujus *radix quadratica* extrahi debet, *is in locis alternis, incipiendo ab unitate, punctis notandus est*; *Dein figurâ*

[1] Nescio an vulgò notum sit, quod tamen ex Theone refero, radicis quadraticæ inquisitionem eodem prorsus modo Veteres instituisse. Petenda est operationis ratio à Theoremate formationis quadrati à radice binominali: $\overline{A + B}|$quad. $=$ A quad. $+$ 2 A B $+$ B quad. Consimilem radicis cubicæ extractionem à Theoremate formationis cubi derivatam Arithmetici passim tradunt. Nam eâdem quidem viâ Nicolaus Tartaglia, et Tartagliæ discipulus Raphael Bombelli extractionum opus in gradibus etiam elatissimis absolvebant, operationem utique pro radice quâque peculiarem

figura in Quoto, seu Radice, scribenda, cujus quadratum figuræ vel figuris, ante primum punctum, aut æquale sit, aut proximè minus. Et ablato illo quadrato, cæteræ radicis figuræ sigillatim invenientur, dividendo residuum per duplum radicis eatenus extractæ, & singulis vicibus auferendo è residuo illo factum à figurâ novissimè prodeunte & decuplo prædicti Divisoris figurâ illâ aucti [1]. EXTRACTIO RADICUM.

Sic ad extrahendam radicem ex 99856, imprimis nota cum punctis ad hunc modum 9·98·56. Dein quære numerum, cujus quadratum æquatur primæ figuræ 9, nempe 3; scribeque in Quoto. Et de 9 ablato quadrato 3×3 seu 9, restabit 0; cui adnecte figuras ante proximum punctum, nempe 98, pro sequente opere. Tum neglectâ ultimâ figurâ 8, dic quoties duplum 3, seu 6, continetur in priori 9? Resp. 1. Quare scripto 1 in Quoto, aufer factum 1×61, seu 61, de 98: restabit 37; cui adnecte ultimas figuras 56, & fiet 3756 numerus in quo opus denuo institui debet. Quare & hujus ultimâ figurâ, 6, neglectâ, dic quoties duplum 31, seu 62, continetur in 375 (id quod ex initialibus figuris 6 & 37 conjici potest, animadvertendo quoties 6 continetur in 37?) Resp. 6. Et scripto 6 in Quoto, aufer factum 6×626, seu 3756, & restabit nihil. Unde constat opus peractum esse; prodeunte Radice 316.

```
9·98·56(316
9
────
 098
  61
  ────
  3756
  3756
  ────
     0
```

Atque ita si radicem ex 2217879 1 extrahere oportet, imprimis factâ punctatione, quære numerum cujus quadratum (siquidem id nequeat æquari) sit proximè minus figuris 22 antecedentibus primum punctum, & invenies esse 4. Nam 5×5, sive 25, major est quam 22, & 4×4, sive 16, minor. Quare 4 erit pri-

liarem ordinando secundum theorema, quod vocant, syntheticum potestatis homologæ. Atque horum vestigiis insistens Franciscus Vieta potestatum utcunque affectarum resolutiones similibus operationibus expediebat. Praxin Tartaglianam miro quodam acumine inventam, ordine luculento eximiâ præceptorum perspicuitate et elegantiâ à Vietâ traditam, Harrioto et Oughtredo summopere excultam, licet ob immensum in gradibus ultra-cubicis computationum laborem, evulgatis Newtoni inventis, brevi exoleverit, nihilominus sedulo velim ediscat siquis in hisce disciplinis perfectus esse velit. Siquidem in omni scientiarum genere, nôsse quibus gradatim incrementis adoleverint, per se scitu jucundissimum est, et ad rerum ipsarum intelligentiam plurimum confert.

CAPUT SEXTUM.

ma figura radicis. Et hâc itaque in Quoto ſcriptâ, de 22 aufer quadratum 4 × 4, ſeu 16; reſiduoque 6 adjunge deſuper proximas figuras 17, & habebitur 617; cujus diviſione per duplum 4 elicienda eſt ſecunda figura radicis. Nempe, neglectâ ultimâ figurâ 7, dic quoties 8 continetur in 61? Reſp. 7. Quare ſcribe 7 in Quoto, & de 617 aufer factum 7 in 87, ſeu 609; & reſtabit 8, cui adjunge proximas duas figuras 87, & habebitur 887; cujus diviſione per duplum 47, ſeu 94, elicienda eſt tertia figura. Utpote dic quoties 94 continetur in 88? Reſp. 0. Quare ſcribe 0 in quoto, adjungeque ultimas duas figuras 91, & habebitur 88791, cujus diviſione per duplum 470, ſeu 940, elicienda eſt ultima figura. Nempe dic quoties 940 continetur in 8879? Reſp. 9. Quare ſcribe 9 in Quoto, & radicem habebis 4709.

```
22'17'87'91(4709,43637 &c.
16
----
617
609
----
 88791
 84681
 -----
   411000
   376736
   ------
    3426400
    2825649
    -------
     60079100
     56513196
     --------
      356190400
      282566169
      ---------
       73624231
```

Cæterùm cùm factus 9 × 9409, ſeu 84681, ablatus de 88791 relinquat 4110, id indicio eſt numerum 4709 non eſſe radicem numeri 22178791 præciſè, ſed eâ paulo minorem exiſtere. Et in hoc caſu, aliiſque ſimilibus, ſi veram radicem magis appropinquare placeat, proſequenda eſt operatio in decimalibus numeris, adnectendo ad reſiduum circulos duos in ſingulis operationibus. Sic reſiduum 4110, adnexis circulis, evadit 411000; cujus diviſione per duplum 4709, ſeu 9418, elicietur figura prima decimalis, nimirum 4. Dein ſcripto 4 in Quoto, aufer 4 × 94184, ſeu 376736, de 411000, & reſtabit 34264. Atque ita adnexis iterum duobus circulis, opus pro lubitu continuari poteſt, prodeunte tandem radice 4709,43637, &c.

Ubi

Ubi vero radix ad medietatem, aut ultra, extracta eſt, cæteræ figuræ per diviſionem ſolam obtineri poſſunt. Ut in hoc exemplo, ſi radicem ad uſque novem figuras extrahere animus eſſet, poſtquam quinque priores 4709,4 extractæ ſunt, quatuor poſteriores 3637 elici poſſent dividendo reſiduum 34264 per duplum 4709,4. EXTRACTIO RADICUM.

Et ad hunc modum ſi radix ex 32976 ad uſque quinque figuras extrahi debet; poſtquam figuræ punctis notantur, ſcribe 1 in Quoto, utpote cujus quadratum 1×1, ſeu 1, maximum eſt quod in 3, figurâ primum punctum antecedente, continetur. Ac de 3 ablato quadrato illo 1, reſtabit 2. Dein huic, 2, annexis proximis figuris, 29, quære quoties duplum 1, ſeu 2, continetur in 22, & invenies quidem pluſquam 10: ſed nunquam licet diviſorem vel decies ſumere, imo neque novies in hoc caſu, quia factus 9×29, ſive 261, major eſt quàm 229, unde deberet auferri. Quare pone tantùm 8. Et perinde ſcripto 8 in Quoto, & ablato 8×28, ſive 224, reſtabit 5. Huic inſuper annexis figuris 76, quære quoties duplum 18, ſeu 36, continetur in 57, & invenies 1; adeoque ſcribe 1 in Quoto; ac de 576 ablato 1×361, ſeu 361, reſtabit 215. Denique, ad cæteras figuras eliciendas, divide hunc 215 per duplum 181, ſeu 362, & exibunt figuræ 59; quibus etiam ſcriptis in Quoto, habebitur Radix 181,59.

```
3·29·76(181,59
1
———
229
224
———
  576
  361
  ———
362)215(59
```

Eâdem methodo radices etiam è decimalibus numeris extrahuntur. Sic ex 329,76 radix eſt 18,159. Et ex 3,2976 radix eſt 1,8159. Et ex 0,032976 radix eſt 0,18159. Et ſic præterea. Sed ex 3297,6 radix eſt 57,4247. Et ex 32,976 radix eſt 5,74247. Atque ita ex 9,9856 radix eſt 3,16. Sed ex 0,99856 radix eſt 0,999279, *&c.* Quemadmodum è ſubjectis Diagrammis conſtare poteſt.

CAPUT SEXTUM.

32·97;6(57,4247, &c.	0;99·85·6(0,999279, &c.
25	81
797	1885
749	1701
4860	18460
4576	17901
1148) 284(247	1998) 559 (279

Extractionem radicis cubicæ, & aliarum omnium, regulâ generali comprehendam, praxi potiùs intellectu facili quàm expeditæ confulens, ne moram in eâ quod rarò ufu veniet, difcentibus inferam. *Nimirum* tertia *quæque figura, incipiendo ab unitate, primò punctis notanda eft, fi radix fit* cubica ; *aut unaquæque* quinta *fi fit* quadrato-cubica, *&c. Dein figura in Quoto fcribenda eft, cujus maxima poteftas* (*hoc eft* cubica *fi radix fit* cubica, *aut* quadrato-cubica *fi radix fit* quadrato-cubica, *&c.) aut æquetur figuræ vel figuris ante primum punctum, aut proximè minor fit. Et ablatâ illâ poteftate, figura proxima elicietur, dividendo refiduum, proximâ numeri refolvendi figurâ auctum, per poteftatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteftatis, hoc eft, per* triplum Quadratum *Quoti fi radix fit* cubica, *aut per* quintuplum quadrato-quadratum *fi radix fit* quadrato-cubica, *&c. Rurfufque à numero refolvendo ablatâ maximâ Quoti poteftate, figura tertia invenietur, dividendo refiduum illud, proximâ numeri refolvendi figurâ auctum, per poteftatem Quoti pene-maximam ductam in indicem maximæ poteftatis.* Et fic in infinitum.

Sic ad extrahendam radicem cubicam ex 13312053, numerus ille primò punctis ad hunc modum 13·312·053 notandus eft. Deinde in Quoto fcribenda eft illa figura 2, cujus cubus 8, fiqui-

dem

Extractio Radicum.

dem æquari nequeat, proximè minor ſit figuris 13 antecedentibus primum punctum. Et ablato illo cubo reſtabit 5; quod proximâ numeri reſolvendi figurâ 3 auctum, & per triplum quadratum quoti 2 diviſum (quærendo nempe quoties 3 × 4, ſeu 12, continetur in 53) dat 4 pro ſecundâ figurâ Quoti. Sed cùm Quoti, 24, prodiret cubus 13824 major quàm qui auferri poſſet de figuris 13312 antecedentibus ſecundum punctum, ſcribi debet tantùm 3 in Quoto. Tum Quotus 23, in chartâ aliquâ ſeorſim per 23 multiplicatus, dat quadratum 529; quod iterum per 23 multiplicatum dat cubum 12167; & hic de 13312 ablatus relinquit 1145; quod proximâ reſolvendi numeri figurâ 0 auctum, & per triplum quadratum Quoti 23 diviſum (quærendo nempe quoties 3 × 529, ſeu 1587, continetur in 11450) dat 7 pro tertiâ figurâ Quoti. Tum Quotus 237 per 237 multiplicatus dat quadratum 56169; quod iterum per 237 multiplicatum dat cubum 13312053; & hic de reſolvendo numero ablatus relinquit nihil. Unde patet radicem quæſitam eſſe 237.

13·312·053 (237
aufer cub. 8
12) reſtat 53 (4. aut 3.
aufer c. 12167
1587) reſtat 11450(7.
aufer c. 13312053
reſtat 0

Atque ita ad extrahendam radicem quadrato-cubicam ex 364·30820, punctum ponitur ad quintam figuram; & figura 3, cujusquadrato-cubus, 243, proximè minor eſt figuris 364 antecedentibus punctum iſtud, ſcribitur in Quoto. Dein quadrato-cubo 243 de 364 ablato, reſtat 121; quod proximâ reſolvendi numeri figurâ 3 auctum, & per quinquies quadrato-quadratum Quoti diviſum (quærendo nempe quoties 5 × 81, ſeu 405, continetur in 1213) dat 2 pro ſecundâ figurâ. Quotus ille, 32, in ſe ter ductus efficit quadrato-quadratum 1048576, & hoc iterum in 32 ductum efficit quadrato-cubum 33554432; qui à numero reſolvendo ablatus relinquit 2876388. Itaque 32 eſt

364·30820 (32,5
243
405) 1213 (2
33554432
5242880) 2876388,0 (5

CAPUT SEXTUM.

eſt integra pars radicis, ſed non juſta radix; & proinde ſi opus in decimalibus numeris proſequi animus eſt, reſiduum circulo auctum dividi debet per quinquies prædictum quadrato-quadratum Quoti, quærendo quoties 5×1048576 ſeu 5242880 continetur in $2876388,0$; & prodibit tertia figura, ſive prima decimalis, 5. Atque ita auferendo quadrato-cubum Quoti $32,5$ de numero reſolvendo, ac dividendo reſiduum per quinquies quadrato-quadratum ejus, erui poteſt quarta figura. Et ſic in infinitum.

Cum radix quadrato-quadratica extrahenda eſt, oportet bis extrahere radicem quadraticam, eo quod $\sqrt{}^4$ *valeat* $\sqrt{}^{2\times2}$. *Et cum radix cubo-cubica extrahenda eſt, oportet extrahere radicem cubicam, & ejus radicis radicem quadraticam, eo quod* $\sqrt{}^6$ *valeat* $\sqrt{}^{2\times3}$: *unde aliqui radices haſce non cubo-cubicas ſed quadrato-cubicas dixêre.* Et idem in aliis radicibus, quarum indices non ſunt numeri primi, obſervandum eſt.

E ſimplicibus quantitatibus Algebraicis extractio radicum ex ipsâ Notatione patet. Quemadmodum quòd $\sqrt{aa}$ ſit a, & quòd $\sqrt{aacc}$ ſit ac, & quòd $\sqrt{9aacc}$ ſit $3ac$, & quòd $\sqrt{49a^4xx}$ ſit $7aax$. Atque ita quòd $\sqrt{\frac{a^4}{cc}}$, ſeu $\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{cc}}$, ſit $\frac{aa}{c}$; & quòd $\sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$ ſit $\frac{aab}{c}$; & quòd $\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ ſit $\frac{3az}{5b}$; & quòd $\sqrt{\frac{4}{9}}$ ſit $\frac{2}{3}$. Et quòd $\sqrt{}^3\frac{8b^6}{27a^3}$ ſit $\frac{2bb}{3a}$. Et quòd $\sqrt{}^4aabb$ ſit $\sqrt{ab}$. Quinetiam quòd $b\sqrt{aacc}$, ſeu b in $\sqrt{aacc}$, valeat b in ac, ſive abc. Et quòd $3c\sqrt{\frac{9aazz}{25bb}}$ valeat $3c \times \frac{3az}{5b}$ ſive $\frac{9acz}{5b}$. Et quòd $\frac{a+3x}{c}\sqrt{\frac{4bbx^4}{81aa}}$ valeat $\frac{a+3x}{c} \times \frac{2bxx}{9a}$ ſive $\frac{2abxx+6bx^3}{9ac}$.

Hæc inquam patent, ſiquidem propoſitas quantitates è radicibus in ſe ductis produci (ut aa ex a in a, $aacc$ ex ac in ac, $9aacc$ ex $3ac$ in $3ac$, &c.) primâ fronte conſtare poteſt. Ubi verò quantitates pluribus terminis conſtant, opus perinde ac in numeris abſolvitur. Sic ad extrahendam radicem quadraticam

Extractio Radicum.

ex $aa + 2ab + bb$, imprimis radicem primi termini aa, nempe a, ſcribe in Quoto. Et ablato ejus quadrato $a \times a$, reſtabit $2ab + bb$ pro eliciendâ reliquâ parte radicis. Dic itaque quoties duplum quoti, ſeu $2a$, continetur in primo reſidui termino $2ab$? Reſp. b. Adeoque ſcribe b in Quoto, & ablato facto b in $\overline{2a + b}$, ſeu $2ab + bb$, reſtabit nihil. Quod indicat opus peractum eſſe, prodeunte radice $a + b$.

$$\begin{array}{l} aa + 2ab + bb(a + b \\ \underline{aa} \\ 0 \\ \hline \qquad 2ab + bb \\ \hline \qquad 0 \quad 0 \end{array}$$

Et ſic ad extrahendam radicem ex $a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$, imprimis pone in Quoto radicem primi termini a^4 nempe aa, & ablato ejus quadrato $aa \times aa$, ſeu a^4, reſtabit $6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro reliquâ radice eliciendâ. Dic itaque quoties $2aa$ continetur in $6a^3b$? Reſp. $3ab$. Quare ſcribe $3ab$ in Quoto: & ablato facto $3ab$ in $\overline{2aa + 3ab}$, ſeu $6a^3b + 9aabb$, reſtabit etiamnum $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$ pro opere proſequendo.

$$\begin{array}{l} a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4(aa + 3ab - 2bb \\ \underline{a^4} \\ 0 \\ \qquad \underline{6a^3b + 9aabb} \\ \qquad\quad 0 - 4aabb \\ \qquad\quad \underline{-4aabb - 12ab^3 + 4b^4} \\ \qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Adeoque dic iterum quoties duplum Quoti, nempe $2aa + 6ab$ continetur in $-4aabb - 12ab^3$; ſive, quod perinde eſt, dic quoties duplum primi termini Quoti, ſeu $2aa$, continetur in primo reſidui termino $-4aabb$? Reſp. $-2bb$. Et proinde ſcripto $-2bb$ in Quoto, & ablato facto $-2bb$ in $2aa + 6ab - 2bb$, ſeu $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$, reſtabit nihil. Unde conſtat radicem eſſe $aa + 3ab - 2bb$.

Atque ita quantitatis $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ radix eſt $x - \frac{1}{2}a$; & quantitatis $y^4 + 4y^3 - 8y + 4$ radix $yy + 2y - 2$; & quantitatis $16a^4 - 24aaxx + 9x^4 + 12bbxx - 16aabb + 4b^4$ radix $3xx - 4aa + 2bb$, ut è ſubjectis diagrammis conſtare poteſt.

$xx -$

CAPUT SEXTUM.

$$\begin{array}{l} xx - ax + \tfrac{1}{4}aa\,(x - \tfrac{1}{2}a. \\ \underline{xx} \\ 0 \\ \quad \underline{-ax + \tfrac{1}{4}aa} \\ \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9x^4 \begin{array}{l} -24aa \\ +12bb \end{array} xx \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{array} (3xx \begin{array}{l} -4aa \\ +2bb. \end{array} \\ \underline{9x^4} \\ 0 \\ \quad \begin{array}{l} -24aa \\ +12bb \end{array} xx \begin{array}{l} +16a^4 \\ -16aabb \\ +4b^4 \end{array} \\ \quad \overline{\quad 0 \qquad\qquad 0 \quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^4 + 4y^3 * - 8y + 4\,(yy + 2y - 2 \\ \underline{y^4} \\ 0 \\ \quad \underline{4y^3 + 4yy} \\ \quad 0 - 4yy \\ \qquad \underline{-4yy - 8y + 4} \\ \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Si radicem cubicam ex $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ oportet extrahere, operatio eſt hujuſmodi. Extrahe radicem cubicam primi

$$\begin{array}{l} \quad a^3 + 3aab + 3abb + b^3\,(a + b. \\ \quad \overline{a^3} \\ 3aa)\,0 + 3aab\,(b \\ \quad \overline{a^3 + 3aab + 3abb + b^3} \\ \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \end{array}$$

termini a^3 nempe a, & pone in Quoto. Tum ablato ejus cubo a^3, dic quoties triplum quadratum ejus, ſeu $3aa$, continetur in proximo reſidui termino $3aab$; & prodit b. Quare ſcribe etiam b in Quoto, & cubo Quoti $a + b$ ablato reſtabit nihil. Radix itaque eſt $a + b$.

Eodem modo radix cubica, ſi extrahatur ex $z^6 + 6z^5 - 40z^3 + 96z - 64$, prodit $zz + 2z - 4$. Atque ita in altioribus radicibus.

CAPUT SEPTIMUM.

DE REDUCTIONE FRACTIONUM ET RADICALIUM.

PRæcedentibus operationibus infervit reductio fractarum & radicalium quantitatum, idque vel ad minimos terminos vel ad eandem denominationem.

SECT. I.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad minimos terminos.*

DEDUCTIO FRACTIONUM.

F*Ractiones ad minimos terminos reducuntur dividendo numeratores ac denominatores per maximum communem diviforem.* Sic fractio $\frac{aac}{bc}$ reducitur ad fimpliciorem, $\frac{aa}{b}$, dividendo utrumque aac & bc per c; & $\frac{203}{667}$ reducitur ad fimpliciorem, $\frac{7}{23}$, dividendo utrumque 203 & 667 per 29; & $\frac{203aac}{667bc}$ reducitur ad $\frac{7aa}{23b}$ dividendo per $29c$. Atque ita $\frac{6a^3-9acc}{6aa+3aa}$ evadit $\frac{2aa-3cc}{2a+c}$ dividendo per $3a$. Et $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{aa-ab}$ evadit $\frac{aa+bb}{a}$ dividendo per $a-b$.

Et hâc Methodo termini poft Multiplicationem vel Divifionem plerumque abbreviari poffunt. Quemadmodum fi multiplicare oportet $\frac{2ab^3}{3ccd}$ per $\frac{9acc}{bdd}$, vel id dividere per $\frac{bdd}{9acc}$, prodibit $\frac{18aab^3cc}{3bccd^3}$, & per reductionem $\frac{6aabb}{d^3}$. Sed in hujufmodi cafibus præftat ante operationem concinnare terminos, dividendo per maximum communem diviforem, quos poftea dividere oporteret. Sic in allato exemplo, fi dividam $2ab^3$ & bdd per communem diviforem b, & $3ccd$ ac $9acc$ per communem diviforem $3cc$; emerget fractio $\frac{2abb}{d}$ multiplicanda per $\frac{3a}{dd}$, vel dividenda per $\frac{dd}{3a}$, prodeunte tandem $\frac{6aabb}{d^3}$ ut fupra. Atque ita $\frac{aa}{c}$ in $\frac{c}{b}$ evadit $\frac{aa}{1}$ in $\frac{1}{b}$, feu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{aa}{c}$ divif. per $\frac{b}{c}$ evadit aa divif. per b, feu $\frac{aa}{b}$. Et $\frac{a^3-axx}{xx}$ in $\frac{cx}{aa+ax}$ evadit $\frac{a-x}{x}$ in $\frac{c}{1}$, feu $\frac{ac}{x}-c$. Et 28 divif. per $\frac{7}{3}$ evadit 4 divif. per $\frac{1}{3}$, feu 12.

SECT. II.

De inventione Divisorum.

Huc spectat inventio divisorum, per quos quantitas aliqua dividi possit. *Si quantitas simplex est, divide eam per minimum ejus divisorem, & quotum per minimum divisorem ejus, donec quotus restet indivisibilis, & omnes quantitatis divisores primos habebis. Dein horum divisorum singulos binos, ternos, quaternos,* &c. *duc in se, & habebis etiam omnes divisores compositos.* Ut si numeri 60 divisores omnes desiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3, & restabit quotus indivisibilis 5. Ergo divisores primi sunt 1,2,2,3,5 : ex binis compositi 4,6,10,15 : ex ternis 12,20,30; ex omnibus 60. Rursus si quantitatis $21abb$ divisores omnes desiderentur, divide eam per 3, & quotum $7abb$ per 7, & quotum abb per a, & quotum bb per b, & restabit quotus primus b. Ergo divisores primi sunt $1, 3, 7, a, b, b$; ex binis compositi 21 $3a$, $3b$, $7a$, $7b$, ab, bb; ex ternis $21a$, $21b$, $3ab$, $3bb$, $7ab$, $7bb$, abb; ex quaternis $21ab$, $21bb$, $3abb$, $7abb$; ex quinis $21abb$. Eodem modo ipsius $2abb-6aac$ divisores omnes sunt $1, 2, a, bb-3ac, 2a, 2bb-6ac, abb-3aac, 2abb-6aac$.

Si quantitas postquam divisa est per omnes simplices divisores manet composita, & suspicio est eam compositum aliquem divisorem habere, dispone eam secundum dimensiones literæ alicujus quæ in eâ est; & pro literâ illâ substitue sigillatim tres vel plures terminos hujus progressionis Arithmeticæ, 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, *ac terminos totidem resultantes, unà cum omnibus eorum divisoribus, statue è regione correspondentium terminorum progressionis, positis divisorum signis tàm affirmativis quàm negativis. Dein è regione etiam statue progressiones arithmeticas, quæ per omnium numerorum divisores percurrunt, pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progressionis* 3, 2, 1, 0, − 1, − 2 *pergunt, & quarum termini differunt vel*

unitate,

unitate, vel numero aliquo, qui dividit altissimum terminum propositæ quantitatis. Siqua occurrit ejusmodi progressio, iste terminus ejus qui stat è regione termini o *progressionis primæ, divisus per differentiam terminorum, & cum signo suo annexus literæ præfatæ, componet quantitatem per quam divisio tentanda est.*

Ut si quantitas sit $x^3 - xx - 10x + 6$, pro x substituendo sigillatim terminos progressionis 1, 0, − 1, orientur numeri − 4, 6, + 14 quos, cum omnibus eorum divisoribus, colloco è regione terminorum progressionis 1, 0, − 1 hoc modo.

1	4	1.2.4.	+ 4.
0	6	1.2.3.6	+ 3.
− 1	14	1.2.7.14	+ 2.

Dein quoniam altissimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem divisibilis est; quæro in divisoribus progressionem, cujus termini differunt unitate, &c, à superioribus ad inferiora pergendo, decrescunt, perinde ac termini progressionis lateralis 1, 0, − 1. Et hujusmodi progressionem unicam tantùm invenio, nempe 4, 3, 2, cujus itaque terminum + 3 seligo, qui stat è regione termini 0 progressionis primæ 1, 0, − 1, tentoque divisionem per $x + 3$: et res succedit, prodeunte $xx - 4x + 2$.

Rursus si quantitas sit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, pro y substituo sigillatim 2, 1, 0, − 1, − 2; & numeros resultantes 30, 7, 20, 3, 34, cum omnibus eorum divisoribus, è regione colloco, ut sequitur: et in divisoribus hanc solam esse animadverto decrescentem progressionem arithmeticam, + 10, + 7, + 4, + 1, − 2.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+ 10.
1	7	1.7	+ 7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+ 4.
− 1	3	1.3	+ 1.
− 2	34	1.2.17.34	− 2.

Hujus terminorum differentia, 3, dividit altissimum quantitatis terminum, $6y^4$. Quare terminum + 4, qui stat è regione termini 0, divisum per differentiam terminorum, 3, adjungo literæ y, tentoque divisionem per $y + \frac{4}{3}$, vel, quod perinde est, per $3y + 4$; & res succedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

Atque ita si quantitas sit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30$; operatio erit ut sequitur. Tres occurrunt hîc progressiones, quarum termini, − 1. − 5. − 5, divisi per differentias terminorum 2, 4, 6, dant tres divisores tentandos, $a - \frac{1}{2}$,

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+ 3. + 3. + 7.
1	23	1.23.	+ 1. − 1. + 1.
0	30	1.2.3.5.6.10.15.30.	− 1. − 5. − 5.
− 1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	− 3. − 9. − 11.

$a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{5}{4}$ & $a-\frac{5}{6}$. Et divifio per ultimum diviforem, $a-\frac{5}{6}$, feu $6a-5$, fuccedit, prodeunte $4a^4-5a^3+4aa-20a-6$.

Si nullus occurrit hâc methodo divifor, vel nullus qui dividit propofitam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere diviforem unius dimenfionis. Poteft tamen fortaffe, fi plurium [m] fit quàm trium dimenfionum, diviforem admittere duarum. Et fi ita, divifor ille inveftigabitur hâc methodo. *In quantitate illâ pro literâ fubftitue, ut antè, quatuor vel plures terminos progreffionis hujus,* 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3. *Divifores omnes numerorum refultantium figillatim adde & fubduc quadratis correfpondentium terminorum progreffionis illius ductis in diviforem aliquem numeralem altiffimi termini quantitatis propofitæ, & fummas differentiafque è regione progreffionis colloca. Dein progreffiones omnes collaterales nota, quæ per iftas fummas differentiafque percurrunt. Sit* ± C *terminus iftiufmodi progreffionis, qui ftat è regione termini* 0 *progreffionis primæ;* ± B *differentia quæ oritur fubducendo* ± C *de termino proximè fuperiori, qui ftat è regione termini* 1 *progreffionis primæ;* A *prædictus termini altiffimi divifor numeralis, &* l *litera quæ in quantitate propofitâ eft; & erit* A l l ± B l ± C *divifor tentandus.*

Ut fi quantitas propofita fit $x^4-x^3-5xx+12x-6$, pro x fcribo fucceffivè 3, 2, 1, 0, −1, −2; & prodeuntes numeros, 39, 6, 1, −6, −21, −26, unà cum eorum diviforibus, è regione difpono; addoque & fubduco divifores terminis progreffionis illius quadratis ductifque in diviforem numeralem termini x^4 qui unitas eft, *viz.* terminis 9, 4, 1, 0, 1, 4; & fummas differentiafque è latere pariter difpono. Dein progreffiones, quæ in iifdem obveniunt, è latere etiam fcribo, ut fequitur. Harum progreffionum terminos, 2 & −3, qui ftant è regione termini 0 progreffionis illius quæ in columnâ primâ eft, ufurpo fucceffive pro ± *C*. Differentias, quæ oriuntur fubducendo hos terminos de terminis fuperioribus, 0 & 0, nempe −2 & +3, ufurpo refpectivè

3	39	1.3.13.39.	9	−30. −4.6.8.10.12.22.48.	−4.	6.
2	6	1.2. 3. 6.	4	− 2.1.2.3.5. 6. 7. 10.	−2.	3.
1	1	1.	1	0. 2.	0.	0.
0	6	1.2. 3. 6.	c	− 6. −3. −2. −1.1.2.3.6.	2.	−3.
−1	21	1.3. 7.21.	1	−20. −6. −2.0.2.4. 8.22.	4.	−6.
−2	26	1.2.13.26.	4	−22. −9.2.3.5.6.17.30.	6.	−9.

[m] Rectè quidem *plurium*. Nam fi quantitas trium dimenfionum diviforem aliquem duarum dimenfionum admitteret, omninò unius admitteret. Quotus enim, qui oritur ex divifione quantitatis

tivè pro $\pm B$. Unitatem item pro A; & x pro l. Et ſic pro $All \pm Bl \pm C$ habeo diviſores duos tentandos, $xx + 2x - 2$, & $xx - 3x + 3$; per quorum utrumque res ſuccedit. *Inventio Diviſorum.*

Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$, operatio erit ut ſequitur. Primò rem tento addendo & ſubducendo diviſores quadratis terminorum progreſſionis 2, 1, 0, 1 uſurpato 1 pro A; ſed res non ſuccedit. Quare pro A uſurpo 3, alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, &

3	170		27		−7. 17
2	38	1.2.19.38.	12	−26.−7.10.11.13.14.31.50.	−7. 11
1	10	1.2. 5.10.	3	− 7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7. 5
0	14	1.2. 7.14.	0	−14.−7.−2.−1.1.2.7.14.	−7.− 1
−1	10	1.2. 5.10.	3	− 7.−2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	−7.− 7
−2	190		12		−7.−13

quadratis iſtis multiplicatis per 3, hoc eſt numeris 12, 3, 0, 3, addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio, − 7, − 7, −7, −7; & 11, 5, − 1, − 7. Expeditionis gratiâ neglexeram diſviſores extimorum numerorum, 170 & 190. Quare, continuatis progreſſionibus, ſumo proximos earum hinc inde terminos, *viz.* −7 & 17 ſuperiùs, & −7, & −13 inferiùs; ac tento, ſi ſubductis his de numeris 27 ac 12, qui ſtant è regione in quartâ columnâ, differentiæ dividunt iſtos 170 & 190, qui ſtant è regione in columnâ ſecundâ. Et quidem differentia inter 27 & − 7, id eſt 34, dividit 170; & differentia 12 & − 7, id eſt 19, dividit 190. Item differentia inter 27 & 17, id eſt 10, dividit 170; ſed differentia inter 12 & − 13, id eſt 25, non dividit 190. Quare poſteriorem progreſſionem rejicio. Juxta priorem $\pm C$ eſt − 7, & $\pm B$ nihil; terminis progreſſionis nullam habentibus differentiam. Quare diviſor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy + 7$. Et diviſio ſuccedit, prodeunte $y^3 - 2yy - 2y + 2$.

Si nullus inveniri poteſt hoc pacto diviſor qui ſuccedit, concludendum eſt quantitatem propoſitam non admittere diviſorem duarum dimenſionum. Poſſet eadem methodus extendi ad inventionem diviſorum dimenſionum plurium; quærendo in prædictis ſummis differentiiſque progreſſiones, non arithmeticas qui-

tatis trium dimenſionum per quantitatem duarum, unius eſt dimenſionis, et quantitatem diviſam dividit.

dem, ſed alias quaſdem; quarum terminorum differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. ſunt in arithmeticâ progreſſione: at in his Tiro non eſt detinendus.

Ubi in quantitate propoſitâ duæ ſunt literæ, & omnes ejus termini ad dimenſiones æquè altas aſcendunt; pro unâ iſtarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære diviſorem, ac diviſoris hujus comple deficientes dimenſiones, reſtituendo literam illam pro unitate.

Ut ſi quantitas ſit $6y^4-cy^3-21ccyy+3c^3y+20c^4$, ubi termini omnes ſunt quatuor dimenſionum; pro c pono 1: quantitas evadit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$, cujus diviſor, ut ſuprà, eſt $3y+4$; & completâ deficiente dimenſione poſterioris termini per dimenſionem c, fit $3y+4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit $x^4-bx^3-5bbxx+12b^3x-6b^4$; poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis, $x^4-x^3-5xx+12x-6$, invento diviſore $xx+2x-2$, compleo ejus deficientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum $xx+2bx-2bb$.

Ubi in quantitate propoſitâ tres vel plures ſunt literæ, & ejus termini omnes ad eaſdem dimenſiones aſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes regulas inveniri; ſed expeditiùs hoc modo: *Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eſt; item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eſt; pariter & omnium in quibus tertia litera, quartaque, & quinta, non eſt, ſi tot ſunt literæ. Et ſic percurre omnes literas: et è regione literarum colloca diviſores reſpectivè. Dein vide, ſi in ſerie aliquâ diviſorum per omnes literas pergente, partes omnes, unicam tantùm literam involventes, tot vicibus reperiantur, quot ſunt literæ, unâ demptâ, in quantitate propoſitâ: et partes duas literas involventes tot vicibus quot ſunt literæ, demptis duabus, in eâdem quantitate. Si ita eſt, partes iſtæ omnes, ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ, erunt diviſor quæſitus.*

Ut ſi proponatur quantitas $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$; terminorum $8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$, in quibus non eſt x, diviſores unius dimenſionis, per præcedentes regulas inventi, erunt $2b-3c$, & $4b-6c$; terminorum, $12x^3+9cxx$

$+8ccx$

Inventio Divisorum.

$+8ccx+6c^3$, in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x+3c$; ac terminorum, $12x^3-14bxx-12bbx+8b^3$, in quibus non eſt c, diviſores $2x-b$, & $4x-2b$. Hos diviſores è regione literarum x, b, c diſpono, ut hîc vides.

$$\begin{array}{c|l} x & 2b-3c.\ 4b-6c. \\ b & 4x+3c. \\ c & 2x-b.\ 4x-2b. \end{array}$$

Cùm tres ſint literæ, & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas literas involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At diviſorum $4b-6c$, & $2x-b$, partes $4b$, $6c$, $2x$, b non niſi ſemel occurrunt: extra diviſorem illum, cujus ſunt partes, non reperiuntur. Quare diviſores illos negligo. Reſtant tantùm tres diviſores, $2b-3c$, $4x+3c$, & $4x-2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente; & eorum partes ſingulæ, $2b$, $3c$, $4x$, bis reperiuntur in ipſis, ut oportuit; idque cum ſignis iiſdem, ſi modò ſigna diviſoris $2b-3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b+3c$: nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b$, $3c$, $4x$ ſemel ſub ſignis ſuis, & aggregatum, $-2b+3c+4x$, diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam, prodibit $3xx-2bx+2cc-4bb$.

Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5-10ax^4-9bx^4-26aax^3+12abx^3+6bbx^3+24a^3xx-8aabxx-8abbxx-24b^3xx-4a^3bx+6aabbx-12ab^3x+18b^4x+12a^4b+32aab^3-12b^5$; diviſores terminorum, in quibus x non eſt, colloco è regione x; illos terminorum, in quibus a non eſt, è regione a; & illos terminorum quibus b non eſt, è regione b, ut hîc vides. Dein illos omnes qui ſunt unius dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio; quia ſimplices b, $2b$, $4b$, x, $2x$, & partes compoſitorum $3x-4a$, $6x-8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiantur; tres autem ſunt literæ in quantitate propoſitâ, & partes illæ unicam tantùm involvunt, atque adèo bis reperiri deberent.

$$\begin{array}{c|l} x & b,\ 2b,\ 4b,\ aa+3bb,\ 2aa+6bb,\ 4aa+12bb; \\ & \quad bb-3aa,\ 2bb-6aa,\ 4bb-12aa. \\ a & 4xx-3bx+2bb,\ 12xx-9bx+6bb. \\ b & x,\ 2x,\ 3x-4a,\ 6x-8a,\ 3xx-4ax,\ 6xx-8ax, \\ & \quad 2xx+ax-3aa,\ 4xx+2ax-6aa. \end{array}$$

Similiter diviſores duarum dimenſionum, $aa+3bb$, $2aa+6bb$, $4aa+12bb$, $bb-3aa$, & $4bb-12aa$, rejicio; quia partes eorum, aa, $2aa$, $4aa$, bb & $4bb$, unicam tantùm literam, a vel b, involventes non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb-6aa$, qui ſolus reſtat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$, quæ ſimiliter unicam tantùm literam involvunt, iterum reperiuntur; nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx-3bx+2bb$, & pars

$6aa$

Caput Septimum.

$6aa$ in divisore $4xx+2ax-6aa$. Quin etiam hi tres divisores in serie sunt, stantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes, $2bb$, $6aa$, $4xx$, quæ unicam tantùm literam involvunt, bis reperiuntur in ipsis, idque sub propriis signis; partes verò $3bx$, $2ax$, quæ duas literas involvunt, non nisi semel occurrunt in ipsis. Quare horum trium divisorum partes omnes diversæ $2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ sub signis suis connexæ, divisorem desideratum $2bb-6aa+4xx-3bx+2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propositam, & oritur $3x^3-4axx-2aab-6b^3$.

Si quantitatis alicujus termini omnes non sunt æque alti, complendæ sunt dimensiones deficientes per dimensiones literæ cujusvis assumptæ; dein per præcedentes regulas invento divisore, litera assumpta delenda est. Ut si quantitas sit $12x^3-14bxx+9xx-12bbx-6bx+8x+8b^3-12bb-4b+6$; assume literam quamvis c, & per dimensiones ejus comple dimensiones quantitatis propositæ ad hunc modum: $12x^3-14bxx+9cxx-12bbx-6bcx+8ccx+8b^3-12bbc-4bcc+6c^3$. Dein hujus divisore, $4x-2b+3c$, invento dele c; & habebitur divisor desideratus $4x-2b+3$.

Aliquando divisores faciliùs quàm per has regulas inveniri possunt. Ut si litera aliqua in quantitate propositâ sit unius tantùm dimensionis; quærendus erit maximus communis divisor terminorum, in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum, in quibus non reperitur; nam divisor ille totam dividet. Et si nullus est ejusmodi communis divisor, nullus erit divisor totius. Exempli gratiâ, si proponatur quantitas $x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x+cx^3-acxx-8aacx+6a^3c-8a^4$; quæratur communis divisor terminorum, $+cx^3-acxx-8aacx+6a^3c$, in quibus c unius est tantùm dimensionis, & terminorum reliquorum, $x^4-3ax^3-8aaxx+18a^3x-8a^4$; ac divisor ille, nempe $xx+2ax-2aa$, dividet totam quantitatem.

Cæterùm maximus duorum numerorum divisor communis, si primâ fronte non innotescit, invenitur perpetuâ ablatione minoris de majori & reliqui de ablato. Nam quæsitus erit divisor, qui tandem nihil relinquit[n]. Sic ad inveniendum maximum communem divisorem

[n] Euclid. Elem. Lib. 7. Prop. 2.

numerorum 203 & 667, aufer ter 203 de 667; & reliquum 58 ter de 203; & reliquum 29 bis de 58; reſtabitque nihil: quod indicat 29 eſſe diviſorem quæſitum. INVENTIO DIVISORUM.

Haud ſecus in ſpeciebus communis diviſor, ubi compoſitus eſt, invenitur, ſubducendo alterutram quantitatem, aut multiplicem ejus, de alterâ: Si modò & quantitates illæ & reſiduum juxta literæ alicujus dimenſiones, ut Diviſione oſtenſum eſt, ordinentur, & quâlibet vice concinnentur, dividendo ipſas per ſuos omnes diviſores, qui aut ſimplices ſunt, aut ſingulos terminos inſtar ſimplicium dividunt. Sic ad inveniendum communem diviſorem Numeratoris ac Denominatoris fractionis hujus, $\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$, multiplica Denominatorem per x, ut primus ejus terminus evadat idem cum primo termino numeratoris. Dein aufer, & reſtabit $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, quod concinnatum, dividendo per $-2a$, evadit $x^3 - 6aax + 4a^3$. Hoc aufer de Denominatore, & reſtabit $-axx - 2aax + 2a^3$: quod itidem per $-a$ diviſum fit $xx + 2ax - 2aa$. Hoc autem per x multiplica (ut ejus primus terminus evadat idem cum primo termino noviſſimi ablati $x^3 - 6aax + 4a^3$, de quo auferendum eſt) & reſtabit $-2axx - 4aax + 4a^3$; quod, per $-2a$ diviſum, fit etiam $xx + 2ax - 2aa$. Et hoc, cùm idem ſit ac ſuperius reſiduum, proindeque ablatum relinquat nihil, quæſitus erit diviſor per quem fractio propoſita, factâ Numeratoris ac Denominatoris diviſione, reduci poteſt ad ſimpliciorem, nempe ad $\frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$.

Atque ita ſi habeatur fractio, $\frac{6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc}{9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3}$; termini ejus imprimis abbreviandi ſunt, dividendo numeratorem per aa, ac Denominatorem per $3b$. Dein ablato bis $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$ de $6a^3 + 15aab - 4acc - 10bcc$, reſtabit $\begin{matrix} 15b \\ +18c \end{matrix} aa \begin{matrix} -10bcc \\ -12c^3 \end{matrix}$. Quod concinnatum, dividendo terminum utrumque per $5b + 6c$, perinde ac ſi $5b + 6c$ ſimplex eſſet quantitas, evadit $3aa - 2cc$. Hoc multiplicatum per a aufer de $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$, & ſecundâ vice reſtabit $-9aac + 6c^3$: quod itidem concinnatum, per applicationem ad $-3c$, evadit etiam $3aa - 2cc$ ut antè. Quare $3aa - 2cc$ quæſitus eſt diviſor. Quo invento, divide per eum partes fractionis propoſitæ, & obtinebitur $\frac{2a^3 + 5aab}{3ab - 9bc}$.

Quod

Quòd ſi diviſor communis hoc pacto non inveniatur, certum eſt nullum omninò exiſtere; niſi forſan è terminis prodeat, per quos Numerator ac Denominator fractionis abbreviantur. Ut ſi habeatur fractio $\frac{aadd - ccdd - aacc + c^4}{4aad - 4acd - 2acc + 2c^3}$, ac termini ejus juxta dimenſiones literæ d diſponantur, ita ut Numerator evadat $\begin{matrix}aa\\-cc\end{matrix}dd\begin{matrix}-aacc\\+c^4\end{matrix}$, ac Denominator $\begin{matrix}4aa\\-4ac\end{matrix}d\begin{matrix}-2acc\\+2c^3\end{matrix}$: hos imprimis oportet abbreviare, dividendo utrumque Numeratoris terminum per $aa-cc$, & utrumque Denominatoris per $2a-2c$, perinde ac ſi $aa-cc$, & $2a-2c$, eſſent ſimplices quantitates. Atque ita vice Numeratoris emerget $dd-cc$, & vice Denominatoris $2ad-cc$, ex quibus ſic præparatis nullus communis diviſor obtineri poteſt. Sed è terminis $aa-cc$ & $2a-2c$ per quos Numerator ac Denominator abbreviati ſunt, prodit ejuſmodi diviſor, nempe $a-c$, cujus ope fractio ad hanc $\frac{add + cdd - acc - c^3}{4ad - 2cc}$ reduci poteſt. Quòd ſi neque termini, $aa-cc$, & $2a-2c$, communem diviſorem habuiſſent, fractio propoſita fuiſſet irreducibilis.

Et hæc generalis eſt methodus inveniendi communes diviſores: *Sed plerumque expeditiùs inveniuntur quærendo omnes alterutrius quantitatis diviſores primos, hoc eſt, qui per alios dividi nequeunt, ac dein tentando ſiqui alteram divident abſque reſiduo.* Sic ad reducendum $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ ad minimos terminos, inveniendi ſunt diviſores quantitatis $aa-ab$, nempe a, & $a-b$. Dein tentandum eſt an alteruter, a, vel $a-b$, dividit etiam $a^3 - aab + abb - b^3$ abſque reſiduo.

SECT. III.

De REDUCTIONE FRACTIONUM *ad communem Denominatorem.*

FRactiones ad communem Denominatorem reducuntur multiplicando terminos utriuſque per denominatorem alterius.

Sic habitis $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, duc terminos unius $\frac{a}{b}$ in d, & viciſſim terminos alterius $\frac{c}{d}$ in b, & evadent $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, quarum communis eſt denominator

denominator bd. Atque ita a & $\frac{ab}{c}$, five $\frac{a}{1}$ & $\frac{ab}{c}$, evadunt $\frac{ac}{c}$ & $\frac{ab}{c}$. Ubi verò Denominatores communem habent diviſorem, ſufficit multiplicare alternè per Quotientes. Sic fractiones $\frac{a^3}{bc}$ & $\frac{a^3}{bd}$ ad haſce, $\frac{a^3d}{bcd}$ & $\frac{a^3c}{bcd}$, reducuntur, multiplicando alternè per Quotientes, c ac d, ortos diviſione denominatorum per communem diviſorem b. REDUCTIO FRACTIONUM.

Hæc autem reductio præcipuè uſui eſt in Additione & Subductione fractionum; quæ, ſi diverſos habent denominatores, ad eundem reducendæ ſunt, antequam uniri poſſunt. Sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ per reductionem evadit $\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$, ſive $\frac{ad+bc}{bd}$. Et $a + \frac{ab}{c}$ evadit $\frac{ac+ab}{c}$. Et $\frac{a^3}{bc} - \frac{a^3}{bd}$ evadit $\frac{a^3d-a^3c}{bcd}$, vel $\frac{d-c}{bcd}a^3$. Et $\frac{c^4+x^4}{cc-xx} - cc - xx$ evadit $\frac{2x^4}{cc-xx}$. Atque ita $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ evadit $\frac{14}{21} + \frac{15}{21}$, ſive $\frac{14+15}{21}$, hoc eſt $\frac{29}{21}$. Et $\frac{11}{6} - \frac{3}{4}$ evadit $\frac{22}{12} - \frac{9}{12}$, ſive $\frac{13}{12}$. Et $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$ evadit $\frac{9}{12} - \frac{5}{12}$, ſive $\frac{4}{12}$, hoc eſt $\frac{1}{3}$. Et $3\frac{4}{7}$ ſive $\frac{3}{1} + \frac{4}{7}$ evadit $\frac{21}{7} + \frac{4}{7}$, ſive $\frac{25}{7}$. Et $25\frac{1}{2}$ evadit $\frac{51}{2}$.

Fractiones, ubi plures ſunt, gradatim uniri debent. Sic habito $\frac{aa}{x} - a + \frac{2xx}{3a} - \frac{ax}{a-x}$; ab $\frac{aa}{x}$ aufer a, & reſtabit $\frac{aa-ax}{x}$; huic adde $\frac{2xx}{3a}$, & prodibit $\frac{3a^3-3aax+2x^3}{3ax}$; unde aufer denique $\frac{ax}{a-x}$, & reſtabit $\frac{3a^4-6a^3x+2ax^3-2x^4}{3aax-3axx}$. Atque ita ſi habeatur $3\frac{4}{7} - \frac{2}{3}$, imprimis aggregatum $3\frac{4}{7}$ inveniendum eſt, nempe $\frac{25}{7}$; dein ab hoc auferendum $\frac{2}{3}$, & reſtabit $\frac{61}{21}$.

SECT. IV.

De REDUCTIONE RADICALIUM *ad minimos terminos.*

Radicalis, ubi totius radix extrahi nequit, plerumque concinnatur extrahendo radicem diviſoris alicujus.

Sic $\sqrt{aabc}$, extrahendo radicem diviſoris aa, fit $a\sqrt{bc}$. Et $\sqrt{48}$, extrahendo radicem diviſoris 16, fit $4\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48aabc}$, extrahendo radicem diviſoris $16aa$, fit $4a\sqrt{3bc}$. Et $\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{aa-4ab+4bb}{cc}$, fit $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Et

CAPUT SEPTIMUM.

$\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aamm^3}{pzz}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{aamm}{ppzz}$, fit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Et $6\sqrt{\frac{75}{98}}$, extrahendo radicem diviſoris $\frac{25}{49}$, fit $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, ſive $\frac{30}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$: radicemque denominatoris adhuc extrahendo, fit $\frac{15}{7}\sqrt{6}$. Et ſic $a\sqrt{\frac{b}{a}}$, ſive $a\sqrt{\frac{ab}{aa}}$, extrahendo radicem denominatoris, fit $\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$, extrahendo radicem cubicam diviſoris $8a^3$, fit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$.[°] Haud ſecus $\sqrt{4}\,a^3x$, extrahendo radicem quadraticam diviſoris aa fit, $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}\,ax$; vel extrahendo radicem quadrato-quadraticam diviſoris a^4, fit $a\sqrt{4}\,\frac{x}{a}$. Atque ita $\sqrt{6}:a^7x^5$ convertitur in $a\sqrt{6}:ax^5$, vel in $ax\sqrt{6}:\frac{a}{x}$, vel in $\sqrt{ax} \times \sqrt{3}:aax$.

Cæterùm hæc reductio non tantùm concinnandis radicalibus inſervit, ſed & earum Additioni & Subductioni; ſi modò ex parte radicali conveniant, ubi ad formam ſimpliciſſimam reducuntur. Tunc enim uniri poſſunt, quod aliter non fit. Sic $\sqrt{48}+\sqrt{75}$, per reductionem, evadit $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}$, hoc eſt $9\sqrt{3}$. Et $\sqrt{48}-\sqrt{\frac{16}{27}}$, per reductionem evadit $4\sqrt{3}-\frac{4}{9}\sqrt{3}$, hoc eſt $\frac{32}{9}\sqrt{3}$. Et ſic $\sqrt{\frac{4ab^3}{cc}}+\sqrt{\frac{a^3b-4aabb+4ab^3}{cc}}$, extrahendo quicquid eſt rationale, evadit $\frac{2b}{c}\sqrt{ab}+\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$, hoc eſt $\frac{a}{c}\sqrt{ab}$. Et $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}-\sqrt{3}:\overline{b^4+2ab^3}$, evadit $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}-b\sqrt{3}:\overline{b+2a}$, hoc eſt $2a-b\sqrt{3}:\overline{b+2a}$.

SECT.

(°) Invento ſcilicet numero quem minimum indices datarum radicalium dividant, datarum unaquæque in aliam tranſmutanda eſt, quæ minimum illum numerum indicem habeat. Eò igitur res redit, ut quantitas radicalis data in aliam tranſmutetur dato indice. Detur igitur quantitas radicalis $\sqrt{n}\,a^m$, ad aliam reducenda, cujus index dato numero p æqualis ſit. Factum puta: ſit $\sqrt{p}\,a^{mx} = \sqrt{n}\,a^m$. Extrahendo igitur utrobique radicem à numero m denominatam, $\sqrt{p}\,a^x = \sqrt{n}\,a$: capiendoque utrinque poteſtates à numero n denominatas, $\overline{\sqrt{p}\,a^x}|^n = a$: atque rurſum capiendo utrinque poteſtates à numero p denominatas, $a^{xn} = a^p$. Ergo $xn = p$, & $x = \frac{p}{n}$. Numeri autem p, n, dati. Numerus igitur x datus, qui index eſt poteſtatis illius quantitatis a^m, cujus radix à numero p denominata, quantitatis a^m radici à numero n denominatæ æqualis eſt. Datam igitur radicalem $\sqrt{n}\,a^m$ ita in aliam transformaveris, quæ indicem habeat numero p æqualem, ſi ſigno radicali $\sqrt{p}$ quantitatem illam ſuffixeris, quæ provenerit ſi quantitatem ſigno radicali $\sqrt{n}$ ſuffixam, nimirum

SECT. V.

Reductio Radicalium.

De Reductione Radicalium *ad eandem denominationem.*

CUM in radicalibus diverſæ denominationis inſtituenda eſt multiplicatio vel diviſio, oportet omnes ad eandem denominationem reducere; idque præfigendo ſignum radicale, cujus index eſt minimus numerus quem earum indices dividunt abſque reſiduo, & ſuffixas quantitates toties, demptâ unâ vice, in ſe ducendo, quoties index ille jam major evaſerit. (°)

Sic enim $\sqrt{ax}$ in $\sqrt{3}:aax$ evadit $\sqrt{6}:a^3x^3$ in $\sqrt{6}:a^4xx$, hoc eſt $\sqrt{6}:a^7x^5$. Et $\sqrt{a}$ in $\sqrt{4}:ax$ evadit $\sqrt{4}:aa$ in $\sqrt{4}:ax$, hoc eſt $\sqrt{4}:a^3x$. Et $\sqrt{6}$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$ evadit $\sqrt{4}:36$ in $\sqrt{4}:\frac{5}{6}$, hoc eſt $\sqrt{4}:30$. Eadem ratione $a\sqrt{bc}$ evadit $\sqrt{aa}$ in $\sqrt{bc}$, hoc eſt $\sqrt{aabc}$. Et $4a\sqrt{3bc}$ evadit $\sqrt{16aa}$ in $\sqrt{3bc}$, hoc eſt $\sqrt{48aabc}$. Et $2a\sqrt{3}:\overline{b+2a}$ evadit $\sqrt{3}:8a^3$ in $\sqrt{3}:\overline{b+2a}$, hoc eſt $\sqrt{3}:\overline{8a^3b+16a^4}$. Atque ita $\frac{\sqrt{ac}}{b}$ fit $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{bb}}$, ſive $\sqrt{\frac{ac}{bb}}$. Et $\frac{6abb}{\sqrt{18ab^3}}$ fit $\frac{\sqrt{36aab^4}}{\sqrt{18ab^3}}$, ſive $\sqrt{2ab}$. Et ſic in aliis.

SECT. VI.

De Reductione Radicalium *ad ſimpliciores radicales per extractionem radicum.*

RAdices quantitatum, quæ ex integris & radicalibus quadraticis componuntur, ſic extrahe.

nimirum ſi ipſam $a^{\frac{m}{n}}$, toties demptâ unâ vice in ſe ipſam duxeris, quoties multiplicandus eſt numerus n, ut numerum numero p æqualem faciat. Atque ita tandem verum ni fallor ſenſum præcepti Newtoniani aſſecuti ſumus, quod verborum ambiguitate incautos facilè deciperet: cùm ita intelligi poſſet, ac ſi quantitas ſigno radicali ſubjecta toties in ſe ducenda eſſet, quot, unâ ſaltem demptâ, unitates fuerint in numero quo novus index p datum n exuperaverit.

Cæterùm radicalium, necnon potentialium, reductiones adhibitis indicibus fractis facillimè peragendæ ſunt, cum nihil aliud requiritur niſi ut dati indices ad denominatorem revocentur communem. Exempli gratiâ, $\overline{ax}|^{\frac{1}{2}} \times \overline{a^2x}|^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} \times \overline{a}|^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{6}} \times x^{\frac{5}{6}} = \overline{a^7 \times x^5}|^{\frac{1}{6}}$. Rurſum $a^{\frac{1}{2}} \times \overline{ax}|^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}} \times x^{\frac{1}{4}} = \overline{a^3x}|^{\frac{1}{4}}$. Sic etiam $a^5 \times x^2 \times \overline{ab}|^{\frac{2}{11}} = a^5 \times a^{\frac{2}{11}} \times b^{\frac{2}{11}} \times x^2 = a^{\frac{57}{11}} \times b^{\frac{2}{11}} \times x^{\frac{22}{11}} = \overline{a^{57}b^2x^{22}}|^{\frac{1}{11}}$. Rurſum $\overline{ax}|^{\frac{1}{2}} \times \overline{a^2x}|^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{2}{3}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{6}} = \overline{\frac{x}{a}}|^{\frac{1}{6}}$.

Designet A *quantitatis alicujus partem majorem,* B *partem minorem: Et erit* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum majoris partis radicis;* & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ *quadratum partis minoris, quæ quidem majori adnectenda est cum signo ipsius* B.

Ut si quantitas sit $3+\sqrt{8}$, scribendo 3 pro A, & $\sqrt{8}$ pro B, erit $\sqrt{AA-BB}=1$; indeque quadratum majoris partis radicis, $\frac{3+1}{2}$, id est 2; & quadratum minoris partis $\frac{3-1}{2}$, id est 1. Ergo radix est $1+\sqrt{2}$. Rursus si ex $\sqrt{32}-\sqrt{24}$ radix extrahenda sit, ponendo $\sqrt{32}$ pro A, & $\sqrt{24}$ pro B, erit $\sqrt{AA-BB}=\sqrt{8}$; & inde $\frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2}$, & $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{8}}{2}$, hoc est $3\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}$, quadrata partium radicis. Radix itaque est $\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$. Eodem modo; si de $aa+2x\sqrt{aa-xx}$ radix extrahi debet, pro A scribe aa; & pro B, $2x\sqrt{aa-xx}$, & erit $AA-BB=a^4-4aaxx+4x^4$. Cujus radix est $aa-2xx$. Unde quadratum unius partis radicis erit $aa-xx$, illud alterius xx; adeoque radix, $x+\sqrt{aa-xx}$. Rursus si habeatur $aa+5ax-2a\sqrt{ax+4xx}$, scribendo $aa+5ax$ pro A, & $2a\sqrt{ax+4xx}$ pro B, fiet $AA-BB=a^4+6a^3x+9aaxx$; cujus radix est $aa+3ax$. Unde quadratum majoris partis radicis erit $aa+4ax$, illud minoris ax; & radix, $\sqrt{aa+4ax}-\sqrt{ax}$. Denique si habeatur $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, ponendo $6+\sqrt{8}=A$, & $-\sqrt{12}-\sqrt{24}=B$, fiet $AA-BB=8$. Unde radicis pars major $\sqrt{3+\sqrt{8}}$; hoc est (ut supra) $1+\sqrt{2}$; & pars minor $\sqrt{3}$; atque adeo radix ipsa $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Cæterùm ubi plures sunt hujusmodi termini radicales, possunt partes radicis citiùs inveniri, dividendo factum quarumvis duarum radicalium per tertiam aliquam radicalem, quæ producit quotum rationalem & integrum. Nam dupli quoti istius radix erit duplum partis radicis quæsitæ. Ut in exemplo novissimo $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{12}}{\sqrt{24}}=2$, $\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{24}}{\sqrt{12}}=4$, $\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=6$. Ergo partes radicis sunt 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ut suprà.

Est & regula extrahendi altiores radices ex quantitatibus numeralibus duarum potentiâ commensurabilium partium.

Sit

Sit quantitas A ± B. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ c. Quære minimum numerum n, cujus poteſtas n^c dividitur per* AA − BB *ſine reſiduo, & ſit quotus* Q. *Computa* $\sqrt[c]{A+B\times\sqrt{Q}}$ *in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide* $A\sqrt{Q}$ *per maximum diviſorem rationalem: Sit quotus s, ſitque* $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et erit* $\frac{ts\pm\sqrt{ttss-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæſita, ſi modò radix extrahi poteſt.* REDUCTIO RADICALIUM.

Ut ſi radix cubica extrahenda ſit ex $\sqrt{968}+25$; erit $AA-BB = 343$; ejus diviſores 7, 7, 7; ergo $n = 7$, & $Q = 1$. Porro $\overline{A+B}\times\sqrt{Q}$, ſeu $\sqrt{968}+25$, extractâ prioris partis radice, fit paulo major quam 56; ejus radix cubica in numeris proximis eſt 4. Ergo $r = 4$. Inſuper $A\sqrt{Q}$, ſeu $\sqrt{968}$, extrahendo quicquid rationale eſt, fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$, ejus pars radicalis, eſt s; & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, ſeu $\frac{5\frac{3}{4}}{2\sqrt{2}}$, in numeris integris proximis eſt 2. Ergo $t = 2$. Denique ts eſt $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss-n}$ eſt 1, & $\sqrt[2c]{Q}$, ſeu $\sqrt[6]{1}$, eſt 1. Ergo $2\sqrt{2}+1$ eſt radix quæſita, ſi modò radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem ſi cubus ipſius $2\sqrt{2}+1$ ſit $\sqrt{968}+25$, & res ſuccedit.

Rurſus ſi radix cubica extrahenda ſit ex $68-\sqrt{4374}$; erit $AA-BB=250$, cujus diviſores ſunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n=5\times2=10$, & $Q=4$. Et $\sqrt[c]{A+B\times\sqrt{Q}}$, ſeu $\sqrt[c]{68+\sqrt{4374}\times 2}$, in numeris proximis integris, eſt $7=r$. Inſuper $A\sqrt{Q}$, ſeu $68\sqrt{4}$, extrahendo quicquid rationale eſt, fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s = 1$, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$, ſeu $\frac{7+\frac{10}{7}}{2}$, in numeris integris proximis eſt $4 = t$: ergo $ts = 4$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{6}$, & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[6]{4}$, ſeu $\sqrt[3]{2}$; atque adeo radix tentanda $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Iterum ſi radix quadrato-cubica extrahenda ſit ex $29\sqrt{6}+41\sqrt{3}$; erit $AA-BB = 3$, adeoque $n=3$, $Q=81$, $r=5$, $s=\sqrt{6}$, $t=1$, $ts=\sqrt{6}$, $\sqrt{ttss-n}=\sqrt{3}$ & $\sqrt[2c]{Q}=\sqrt[10]{81}$ ſeu $\sqrt[5]{9}$; atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

Cæterùm

CAPUT OCTAVUM.

Cæterùm in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit, vel partes ejus communem habent diviſorem; radices denominatoris & factorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242 - 12\frac{1}{2}}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein, extractâ ſeorſim numeratoris ac denominatoris radice cubicâ, orietur $\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$. Rurſus ſi ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda ſit; divide partes per communem diviſorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11 + \sqrt{125}$. Unde quantitas propoſita valet $\sqrt[3]{3}$ in $\overline{11 + \sqrt{125}}$; cujus radix invenietur, extrahendo ſeorſim radicem factoris utriuſque, $\sqrt[3]{3}$, & $11 + \sqrt{125}$.

CAPUT OCTAVUM.

De formâ ÆQUATIONIS.

ÆQuationes, quæ ſunt quantitatum aut ſibi mutuò æqualium, aut ſimul nihilo æquipollentium, congeries, duobus præcipuè modis conſiderandæ veniunt; vel ut ultimæ concluſiones ad quas in Problematis ſolvendis deventum eſt, vel ut media, quorum ope finales æquationes acquirendæ ſunt. Prioris generis æquatio ex unicâ tantum incognitâ quantitate cognitis involutâ conflatur, modò Problema ſit definitum, & aliquid certi quærendum innuat. Sed eæ poſterioris generis involvunt plures quantitates incognitas, quæ ideo debent inter ſe comparari, & ita connecti, ut ex omnibus una tandem emerget æquatio nova, cui ineſt unica, quam quærimus, incognita quantitas admiſta cognitis. Quæ quantitas ut exinde faciliùs eliciatur, æquatio iſta variis plerumque modis transformanda eſt, donec evadat ea ſimpliciſſima quæ poteſt, atque etiam ſimilis alicui ex ſequentibus earum gradibus; in quibus x deſignat quantitatem quæſitam, ad cujus dimenſiones termini, ut vides, ordinantur; & p, q, r, s, alias quaſcunque quantitates, ex quibus determinatis & cognitis etiam x determinatur, &, per methodos explicandas, inveſtigari poteſt.

$$\begin{array}{ll} x = p. & x - p = 0. \\ xx = px + q & \text{Vel } xx - px - q = 0. \\ x^3 = pxx + qx + r. & x^3 - pxx - qx - r = 0. \\ x^4 = px^3 + qxx + rx + s. & x^4 - px^3 - qxx - rx - s = 0. \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

Ad

Ad horum normam itaque termini æquationum, ſecundùm dimenſiones incognitæ quantitatis, in ordinem ſemper redigendi ſunt; ita ut primum locum occupent in quibus incognita quantitas eſt plurimarum dimenſionum, inſtar x, xx, x^3, x^4; & ſecundum locum, in quibus ea eſt unâ dimenſione minor, inſtar p, px, pxx, px^3, & ſic præterea. Et quod ſigna terminorum attinet, poſſunt ea omnibus modis ſe habere: Imò & unus vel plures ex intermediis terminis aliquando deeſſe. Sic $x^3 \quad * - bbx + b^3 = 0$ vel $x^3 = bbx - b^3$, eſt æquatio tertii gradûs; $Z^4 \begin{smallmatrix}+a\\-b\end{smallmatrix} Z^3 \quad * \begin{smallmatrix}+ab^3\\-b^4\end{smallmatrix} = 0$ æquatio quarti. Nam gradus æquationum æſtimantur ex maximâ dimenſione quantitatis incognitæ, nullo reſpectu ad quantitates cognitas habito, nec ad intermedios terminos. Attamen ex defectu intermediorum terminorum æquatio plerumque fit multò ſimplicior, & nonnunquam ad gradum inferiorum quodammodo deprimitur. Sic enim $x^4 = qxx + s$ æquatio ſecundi gradûs cenſenda eſt, ſiquidem ea in duas ſecundi gradûs æquationes reſolvi poteſt. Nam ſuppoſito $xx = y$, & y pro xx in æquatione illâ perinde ſcripto, ejus vice prodibit $yy = qy + s$, æquatio ſecundi gradûs; cujus ope, cum y inventa fuerit, æquatio $xx = y$, ſecundi etiam gradûs, dabit x.

De Forma Æquationis.

Atque hæ ſunt concluſiones ad quas Problemata deduci debent. Sed antequam eorum reſolutionem aggrediar, opus erit ut modos transformandi & in ordinem redigendi æquationes, & ex mediis eliciendi finales æquationes abſtractè doceam. Æquationis autem ſolitariæ reductionem in ſequentibus regulis complectar.

CAPUT NONUM.

De concinnandâ Æquatione ſolitariâ.

REGULA PRIMA.

SIquæ ſunt quantitates quæ ſe mutuo deſtruere, vel per Additionem aut Subductionem coaleſcere poſſunt, termini perinde minuendi ſunt.

Veluti ſi habeatur $5b - 3a + 2x = 5a + 3x$, aufer utrinque $2x$, & adde $3a$, proditque $5b = 8a + x$. Atque ita $\frac{2ab+bx}{a} - b = a + b$, delendo æquipollentes $\frac{2ab}{a} - b = b$, evadit $\frac{bx}{a} = a$.

Ad

Caput Nonum.

Ad hanc Regulam referri debet etiam ordinatio terminorum æquationis, quæ fieri folet per tranflationem ad contrarias partes cum figno contrario. Ut fi habitâ æquatione $5b = 8a + x$ defideretur x; aufer utrinque $8a$, vel, quod eodem recidit, transfer $8a$ ad contrarias partes cum figno mutato, & prodibit $5b - 8a = x$. Eodem modo fi habeatur $aa - 3ay = ab - bb + by$, ac defideretur y, tranfpone $-3ay$, & $ab - bb$, eò ut ex unâ parte confiftant termini multiplicati per y, & ex alterâ reliqui termini, & prodibit $aa - ab + bb = 3ay + by$; unde y elicietur per Reg. 5. fequentem, dividendo fcilicet utramque partem per $3a + b$, prodibit enim $\frac{aa - ab + bb}{3a + b} = y$. Atque ita æquatio $abx + a^3 - aax = abb - 2abx - x^3$, per debitam tranfpofitionem & ordinationem, evadit $x^3 = \begin{matrix} aa \\ -3ab \end{matrix} x \begin{matrix} -a^3 \\ +abb \end{matrix}$, vel $x^3 \begin{matrix} -aa \\ +3ab \end{matrix} x \begin{matrix} +a^3 \\ -abb \end{matrix} = 0$.

REGULA SECUNDA.

Siqua compareat quantitas per quam omnes æquationis termini multiplicantur, debent omnes per illam quantitatem dividi; vel fi per eandem quantitatem omnes dividantur, debent omnes per illam multiplicari.

Sic habito $15bb = 24ab + 3bx$, divide terminos omnes per b, & fit $15b = 24a + 3x$: deinde per 3, & fit $5b = 8a + x$. Vel habito $\frac{b^3}{ac} - \frac{bbx}{cc} = \frac{xx}{c}$, multiplica omnes per c, & prodit $\frac{b^3}{a} - \frac{bbx}{c} = xx$.

REG.

(p) Hanc quidem operationem Francifcus Vieta *Symmetricam Climactifmum* vocavit: eandem Juniores *involutionem* dixerunt. Haud verò in omni cafu fufficiet ad irrationalium expurgationem, ne quidem fi omnia fubquadratica fint, quod genus eft fimpliciffimum. Puta enim æquationem proponi ex quatuor fubquadraticis compofitam, $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d} = 0$. Hujufce æquationis nomina fi ita diftribuas, ut ex utrâque parte bina fint, veluti hoc modo $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$, partibus quadratis, veniet utrinque nomen unum irrationale; hinc enim orietur $a - 2\sqrt{ab} + b$, illinc $c + 2\sqrt{cd} + d$. Novæ hujus æquationis nomina fic difponito, ut ab unâ parte nomina omnia rationalia fint, ab alterâ irrationalia, nempe $a + b - c - d = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$. Pro nominum rationalium fummâ ponatur litera g, ut fit $g = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}$. Partibus rurfum quadratis, à binomio irrationali veniet unum tantùm nomen irrationale; è multiplicatione enim quadraticâ fiet $g^2 = 4 \times \overline{ab + 2\sqrt{abcd} + cd}$: collectifque nominibus quæ utrinque rationalia funt, $g^2 - 4ab - 4cd = 8\sqrt{abcd}$. Pro $\frac{g^2 - 4ab - 4cd}{8}$ ponatur litera h, & ex tertiâ demum multiplicatione quadraticâ veniet æquatio irrationalibus libera, $h^2 = abcd$. Atque idem femper fiet, quoties æquationis propofitæ nomina non plura fint numero quàm quatuor; tolletur fanè id omne quod irrationale eft per fymmetricam climactifmum Vietæ, idque etiamfi omnia nomina irrationalia fint, dummodo fubquadratici tantùm generis. Pro uno autem nomine irrationali in hoc negotio haberi volo

3 quicquid

De Æquatione Concinnanda.

Regula Tertia.

Siqua ſit fractio irreducibilis, in cujus denominatore reperiatur litera illa ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, omnes æquationis termini per iſtum denominatorem, aut per aliquem diviſorem ejus, multiplicandi ſunt.

Ut ſi æquatio $\frac{ax}{a-x}+b=x$ ſecundum x ordinanda ſit, multiplicentur omnes ejus termini per $a-x$, denominatorem fractionis $\frac{ax}{a-x}$, ſiquidem x inibi reperiatur; & prodit $ax+ab-bx=ax-xx$, ſeu $ab-bx=-xx$, &, factâ utriuſque partis tranſlatione, $xx=bx-ab$. Atque ita ſi habeatur $\frac{a^3-abb}{2cy-cc}=y-c$, terminique juxta y ordinandi ſint, multiplicentur per denominatorem $2cy-cc$, vel ſaltem per diviſorem $2y-c$, quo y tollatur è denominatore, & exurget $\frac{a^3-abb}{c}=2yy-3cy+cc$; & ordinando $\frac{a^3-abb}{c}-cc+3cy=2yy$. Ad eundem modum $\frac{aa}{x}-a=x$, multiplicando per x, evadit $aa-ax=xx$; & $\frac{aabb}{cxx}=\frac{xx}{a+b-x}$, multiplicando primò per xx, dein per $a+b-x$, evadit $\frac{a^3bb+aab^3-aabbx}{c}=x^4$.

Regula Quarta.

Sicut ſurdæ quantitati irreducibili litera illa involvatur, ad cujus dimenſiones æquatio ordinanda eſt, cæteri omnes termini ad contrarias partes cum ſignis mutatis transferendi ſunt, & utraque pars æquationis in ſe ſemel *multiplicanda, ſi radix* quadratica *ſit, vel* bis *ſi ſit* cubica, *&c.* P

quicquid ſimul ſigno radicali ſubſit, licet ex pluribus conflatum ſit. Exempli gratiâ, æquationis $\sqrt{a^2-bx}+\sqrt{cx-gb+d^2}=\sqrt{gd}$, tria ſunt nomina irrationalia, quorum unum eſt $\sqrt{gd}$, alterum $\sqrt{a^2-bx}$, tertium $\sqrt{cx-gb+d^2}$. At ſi æquationis propoſitæ nominibus quatuor ſubquadraticè irrationalibus nomen quintum accedat, ſive rationale, ſive ſubquadraticè etiam irrationale, nomina quidem irrationalia multiplicatione quadraticâ nunquam ſuſtuleris. Quum enim quinque nomina aliter diſtribui nequeant, quin vel ex alterâ parte trinomium conſiſtat, binomium ex alterâ; vel ex alterâ quidem parte quadrinomium, ex alterâ nomen ſingulare; vel denique ex unâ parte quinquenomium; quadratica verò trimonii multiplicatio tria nomina irrationalia ſemper pariat, binomii nomen irrationale unum, quadrinomii autem ſex, quinquenomii decem, non ex ullâ quidem dati quinquenomii diſtributione obtinebis, quin nomina irrationalia, ex quadraticis partium multiplicationibus facta, vel plura ſint numero quàm quatuor, vel ſaltem non pauciora, accedente etiam nomine rationali. Factâque quovis modo partium tranſlatione, partibuſque iterum quadratis, iterum provenient nomina irrationalia numero haud pauciora quàm quatuor, quibus etiam accedet nomen unum rationale: idque toties fiet quoties multiplicatio quadratica iterata fuerit. Quoties igitur æquationis propoſitæ, ex quinque pluribuſve nominibus conflatæ, quatuor plurave nomina irrationalia ſint, Climactiſmi opera ad irrationalitatem tollendam, licet illa in infimo quidem ſubſiſtat ſubquadraticorum gradu, nihil prorſus juvabit: ſed confugiendum erit ad viam generalem Fermatii, Newtono ſub fine hujuſce capitis traditam, quæ ſanè nullam non aſymmetriam exulare cogit.

 Sic

Sic ad ordinandum juxta x æquationem $\sqrt{aa - xx} + a = x$, transferatur a ad alteras partes, fitque $\sqrt{aa - ax} = x - a$; & quadratis partibus, $aa - ax = xx - 2ax + aa$, seu $0 = xx - ax$; hoc est $x = a$. Sic etiam $\sqrt[3]{:aax + 2axx - x^3} - a + x = 0$, transponendo $-a + x$, evadit $\sqrt[3]{:aax + 2axx - x^3} = a - x$; & partibus cubicè multiplicatis, $aax + 2axx - x^3 = a^3 - 3aax + 3axx - x^3$; seu $xx = 4ax - aa$. Et sic $y = \sqrt{ay + yy - a\sqrt{ay - yy}}$, quadratis partibus, evadit $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$: &, terminis debitè transpositis, $ay = a\sqrt{ay - yy}$, seu $y = \sqrt{ay - yy}$; & partibus iterum quadratis, $yy = ay - yy$; & transponendo denuo, $2yy = ay$, sive $2y = a$.

Regula Quinta.

Terminis secundùm Dimensiones literæ alicujus, ope præcedentium regularum, dispositis, si maxima ejusdem literæ dimensio per cognitam quamlibet quantitatem multiplicetur, debet tota æquatio per eandem dividi.

Sic $2y = a$, dividendo per 2, evadit $y = \frac{1}{2}a$. Et $\frac{bx}{a} = a$, dividendo per $\frac{b}{a}$, evadat $x = \frac{aa}{b}$. Et $\begin{matrix} 2ac \\ -cc \end{matrix} x \begin{matrix} +a^3 \\ +aac \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix} x - a^3cc = 0$, dividendo per $2ac - cc$, evadit $x^3 + \frac{\begin{matrix} a^3 \\ aac \end{matrix} xx \begin{matrix} -2a^3c \\ +aacc \end{matrix} x - a^3cc}{2ac - cc} = 0$, sive $x^3 + \frac{a^3 + aac}{2ac - cc} xx - aax - \frac{a^3c}{2a - c} = 0$.

Regula Sexta.

Aliquando reductio institui potest dividendo æquationem per compositam aliquam quantitatem.

Sic enim $y^3 = \mp \frac{2c}{b} yy + 3bcy - bbc$, ad hanc, $yy = -2cy + bc$, reducitur, transferendo terminos omnes ad easdem partes, hoc modo, $y^3 \pm \frac{2c}{b} yy - 3bcy + bbc = 0$, & dividendo per $y - b$; ut in capite de divisione ostensum est: prodibit enim $yy + 2cy - bc = 0$. Ast hujusmodi divisorum inventio difficilis est, & eam priùs docuimus.

Regula Septima.

Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utrâque æquationis parte instituitur.

Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extractâ utrobique radice, prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quòd si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$,

transfer

transfer $2ax$, & exurget $xx-2ax+aa=bb$; extractisque partium radicibus, $x-a=+$ vel $-b$, seu $x=a\pm b$. Sic etiam habito $xx=ax-bb$, adde utrinque $-ax+\frac{1}{4}aa$, & prodit $xx-ax+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa-bb$; & extractâ utrobique radice $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, seu $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. De Æquatione Concinnanda.

Et sic universaliter: Si sit $xx=.px.q$, erit $x=.\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp.q}$. Ubi $\frac{1}{2}p$ & q iisdem signis, ac p & q in æquatione priori, afficienda sunt; sed $\frac{1}{4}pp$ semper affirmativè ponendum. Estque hoc exemplum Regula, ad cujus similitudinem æquationes omnes quadraticæ ad formam simplicium reduci possunt. *E. g.* Propositâ æquatione $yy=\frac{2xxy}{a}+xx$, ad extrahendam radicem y, confer $\frac{2xx}{a}$ cum p, & xx cum q; hoc est, scribe $\frac{xx}{a}$ pro $\frac{1}{2}p$, & $\frac{x^4}{aa}+xx$ pro $\frac{1}{4}pp.q$, atque orietur $y=\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, vel $y=\frac{xx}{a}-\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$. Eodem modo æquatio $yy=ay-2cy+aa-cc$, conferendo $a-2c$ cum p, & $aa-cc$ cum q, dabit $y=\frac{1}{2}a-c+\sqrt{\frac{5}{4}aa-ac}$. Quinetiam æquatio quadrato-quadratica $x^4=-aaxx+ab^3$, cujus termini impares desunt, ope hujus regulæ evadit $xx=-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}$, & extractâ iterum radice, $x=\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4+ab^3}}$. Et sic in aliis.

Suntque hæ regulæ pro concinnandâ æquatione solitariâ; quarum usum cùm Analysta satis perspexerit, ita ut æquationem quamcunque propositam secundum quamlibet literarum in eâ complexarum disponere noverit, & ejusdem literæ, si ea unius sit dimensionis, aut maximæ potestatis ejus si plurium, valorem elicere; haud difficilem sentiet comparationem plurium æquationum inter se: quam pergo jam docere.

CAPUT DECIMUM.

De duabus pluribusve æquationibus in unum transformandis, ut incognitæ quantitates exterminentur.

CUM in alicujus problematis solutionem plures habentur æquationes statum quæstionis comprehendentes, quarum unicuique plures etiam incognitæ quantitates involvuntur; æquationes istæ (duæ per vices si modò sint plures duabus) sunt ita connectendæ, ut una ex incognitis quantitatibus per singulas operationes tollatur; & emergat æquatio nova. Sic habitis æquationibus $2x = y + 5$, & $x = y + 2$, demendo æqualia ex æqualibus, prodibit $x = 3$. Et sciendum est, quòd per quamlibet æquationem una quantitas incognita potest tolli; atque adeo cùm tot sunt æquationes quot quantitates incognitæ, omnes possunt ad unam denique reduci, in quâ unica manebit quantitas incognita. Sin quantitates incognitæ sint unâ plures quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò resultante duæ manebunt quantitates incognitæ; & si sint duabus plures quàm æquationes habentur, tum in æquatione ultimò resultante manebunt tres, & sic præterea.

Possunt etiam duæ vel plures quantitates incognitæ per duas tantùm æquationes fortasse tolli. Ut si sit $ax - by = ab - az$, & $bx + by = bb + az$: tum, æqualibus ad æqualia additis, prodibit $ax + bx = ab + bb$, exterminatis utrisque y & z. Sed ejusmodi casus vel arguunt vitium aliquod in statu quæstionis latere, vel calculum erroneum esse, aut non satis artificiosum. Modus autem quo una quantitas incognita per singulas æquationes tollatur, ex sequentibus patebit.

SECT. II.

Exterminatio quantitatis incognitæ per æqualitatem valorum ejus.

CUM quantitas tollenda unius est tantùm dimensionis in utrâque æquatione, valor ejus uterque per regulas jam ante traditas quærendus est, & alter valor statuendus æqualis alteri.

Sic

Sic pofitis $a+x=b+y$, & $2x+y=3b$; ut exterminetur y, æquatio prima dabit $a+x-b=y$; & fecunda dabit $3b-2x=y$. Eft ergo $a+x-b=3b-2x$, five ordinando $x=\frac{4b-a}{3}$.

De Quantitatibus Exterminandis.

Atque ita $2x=y$, & $5+x=y$ dant $2x=5+x$, feu $x=5$.

Et $ax-2by=ab$, & $xy=bb$ dant $\frac{ax-ab}{2b}$ $(=y)$ $=\frac{bb}{x}$; five ordinando, $xx-bx-\frac{2b^3}{a}=0$.

Item $\frac{bbx-aby}{a}=ab+xy$, & $bx+\frac{ayy}{c}=2aa$, tollendo x, dant $\frac{aby+aab}{bb-ay}$ $(=x)$ $=\frac{2aac-ayy}{bc}$: Et reducendo, $y^3-\frac{bb}{a}yy-\frac{2aac-bbc}{a}y+bbc=0$.

Denique $x+y-z=0$, & $ay=xz$, tollendo z, dant $x+y$ $(=z)$ $=\frac{ay}{x}$, five $xx+xy=ay$.

Hoc idem quoque perficitur, fubducendo alterutrum valorem quantitatis incognitæ ab altero, & ponendo refiduum æquale nihilo. Sic in exemplorum primo, tolle $3b-2x$ ab $a+x-b$, & manebit $a+3x-4b=0$, five $x=\frac{4b-a}{3}$.

SECT. III.

Exterminatio quantitatis incognitæ fubftituendo pro eâ valorem fuum.

CUM in alterâ faltem æquatione, tollenda quantitas unius tantùm dimenfionis exiftit, valor ejus in eâ quærendus eft; & pro fe in æquationem alteram fubftituendus. Sic propofitis $xyy=b^3$, & $xx+yy=by-ax$; ut exterminetur x, prima dabit $\frac{b^3}{yy}=x$: Quare in fecundam fubftituo $\frac{b^3}{yy}$ pro x, & prodit $\frac{b^6}{y^4}+yy=by-\frac{ab^3}{yy}$, ac reducendo $y^6-by^5+ab^3yy+b^6=0$.

Propofitis autèm $ayy+aay=z^3$; & $yz-ay=az$, ut y tollatur, fecunda dabit $y=\frac{az}{z-a}$. Quare pro y fubftituo $\frac{az}{z-a}$ in primam, proditque $\frac{a^3zz}{zz-2az+aa}+\frac{a^3z}{z-a}=z^3$. Et reducendo, $z^4-2az^3+aazz-2a^3z+a^4=0$.

Pari modo propofitis $\frac{xy}{c}=z$, & $cy+zx=cc$, ad z tollendum, pro eo fubftituo $\frac{xy}{c}$ in æquationem fecundam, & prodit $cy+\frac{xxy}{c}=cc$.

Cæterùm

Caput Decimum.

Cæterùm qui in hujusmodi computationibus exercitatus fuerit, sæpenumero contractiores modos percipiet, quibus incognita quantitas exterminari possit. Sic habitis $ax = \frac{bbx - b^3}{z}$, & $x = \frac{az}{x-b}$, si æqualia multiplicentur æqualibus, prodibunt æqualia $axx = abb$, sive $x = b$. Sed casus ejusmodi particulares studiosis proprio marte, cùm res tulerit, investigandos linquo.

SECT. IV.

Exterminatio quantitatis incognitæ quæ plurium in utrâque æquatione dimensionum existit.

CUM in neutrâ æquatione tollenda quantitas unius tantùm dimensionis existit, valor maximæ potestatis ejus in utrâque quærendus est; deinde, si potestates istæ non sint eædem, æquatio potestatis minoris multiplicanda est per tollendam quantitatem, aut per ejus quadratum aut cubum, *&c.* ut ea evadat ejusdem potestatis cum æquatione alterâ. Tum valores illarum potestatum ponendæ sunt æquales, & æquatio nova prodibit, ubi maxima potestas, sive dimensio, tollendæ quantitatis diminuitur. Et hanc operationem iterando quantitas illa tandem auferetur.

Quemadmodum sit $xx + 5x = 3yy$, & $2xy - 3xx = 4$; ut x tollatur, prima dabit $xx = -5x + 3yy$, & secunda $xx = \frac{2xy-4}{3}$. Pono itaque $3yy - 5x = \frac{2xy-4}{3}$, & sic x ad unicam tantùm dimensionem reducitur, adeoque tolli potest per ea quæ paulo ante ostendi. Scilicet æquationem novissimam debitè reducendo prodit $9yy - 15x = 2xy - 4$, sive $x = \frac{9yy+4}{2y+15}$. Hunc itaque valorem pro x in aliquam ex æquationibus primo propositis (velut in $xx + 5x = 3yy$) substituo, & oritur $\frac{81y^4 + 72yy + 16}{4yy + 60y + 225} + \frac{45yy + 20}{2y + 15} = 3yy$. Quam, ut in ordinem redigatur, multiplico per $4yy + 60y + 225$, & prodit $81y^4 + 72yy + 16 + 90y^3 + 40y + 675yy + 300 = 12y^4 + 180y^3 + 675yy$; sive $69y^4 - 90y^3 + 72yy + 40y + 316 = 0$.

Præterea si sit $y^3 = xyy + 3x$, & $yy = xx - xy - 3$; ut y tollatur, multiplico posteriorem æquationem per y, & fit $y^3 = xxy - xyy - 3y$,

totidem dimenſionum quot prior. Jam ponendo valores ipſius y^3 ſibimet æquales, habeo $xyy+3x=xxy-xyy-3y$, ubi y deprimitur ad duas dimenſiones. Per hanc itaque, & ſimpliciorem ex æquationibus primo propoſitis, $yy=xx-xy-3$, quantitas y prorſus tolli poteſt, inſiſtendo veſtigiis prioris exempli.

De Quantitatibus Exterminandis.

Sunt & alii modi quibus hæc eadem abſolvi poſſunt; idque ſæpenumero contractiùs. Quemadmodum ex $yy=\frac{2xxy}{a}+xx$, & $yy=2xy+\frac{x^4}{aa}$; ut y deleatur, extrahe in utrâque radicem y, ſicut in Reg. 7. oſtenſum eſt; & prodibunt $y=\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, & $=x+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$. Jam hos ipſius y valores ponendo æquales, habebitur $\frac{xx}{a}+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}=x+\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, & rejiciendo æqualia $\sqrt{\frac{x^4}{aa}+xx}$, reſtabit $\frac{xx}{a}=x$, vel $xx=ax$, & $x=a$.

Porro ut ex æquationibus $x+y+\frac{yy}{x}=20$, & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$, tollatur x; aufer y de partibus æquationis primæ, & reſtabit $x+\frac{yy}{x}=20-y$; & partibus quadratis fit $xx+2yy+\frac{y^4}{xx}=400-40y+yy$; tollendoque utrinque yy, reſtat $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=400-40y$. Quare cum $400-40y$ & 140 iiſdem quantitatibus æquentur, erit $400-40y=140$, ſive $y=6\frac{1}{2}$. Et ſic opus in pleriſque aliis æquationibus contrahere liceat.

Cæterùm cùm quantitas exterminanda multarum dimenſionum exiſtit, ad eam ex æquationibus tollendam calculus maximè laborioſus nonnunquam requiritur: Sed labor tunc plurimum minuetur per exempla ſequentia tanquam regulas adhibita.

Regula Prima.

Ex $axx+bx+c=0$, & $fxx+gx+h=0$,

Exterminato x prodit.

$$\overline{ah-bg-2cf}\times ah: +\overline{bh-cg}\times bf: +\overline{agg+cff}\times c=0.$$

Regula

Regula Secunda.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$\overline{ah - bg - 2cf} \times ahh : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfh : + \overline{ch - dg} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff} \times df = 0.$

Regula Tertia.

Ex $ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, & $fxx + gx + h = 0$,

Exterminato x prodit

$\overline{ah - bg - 2cf} \times ah^3 : + \overline{bh - cg - 2df} \times bfhh : + \overline{agg + cff} \times \overline{chh - dgh + egg - 2efh} : + \overline{3agh + bgg + dff} \times dfh : + \overline{2ahh + 3bgh - dfg + eff} \times eff : - \overline{bg - 2ah} \times efgg = 0.$

Regula Quarta.

Ex $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, & $fx^3 + gxx + hx + k = 0$,

Exterminato x prodit

$\overline{ah - bg - 2cf} \times \overline{adhh - achk} : + \overline{ak + bh - cg - 2df} \times bdfh : - \overline{ak + bh + 2cg + 3df} \times aakk : + \overline{cdh - ddg - cck + 2bdk} \times \overline{agg + cff} : + \overline{3agh + bgg + dff - 3afk} \times ddf : - \overline{3ak - bh + cg + df} \times bcfk : + \overline{bk - 2dg} \times bbfk - \overline{bbk - 3adh - cdf} \times agk = 0.$

Verbi gratiâ, ut ex æquationibus $xx + 5x - 3yy = 0$, & $3xx - 2xy + 4 = 0$, exterminetur x: in regulam primam pro a, b, c; f, g, & h reſpectivè ſubſtituo 1, 5, $-3yy$; 3, $-2y$, & 4. Et ſignis + & − probè obſervatis, oritur $\overline{4 + 10y + 18yy} \times 4 : + \overline{20 - 6y^3} \times 15 : + \overline{4yy - 27yy} \times -3yy = 0$. Sive $16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$.

Simili ratione, ut y deleatur ex æquationibus $y^3 - xyy - 3x = 0$ & $yy + xy - xx + 3 = 0$, in regulam ſecundam pro a, b, c, d; f, g, h, & x ſubſtituo, 1, $-x$, 0, $-3x$; 1, x, $-xx + 3$, & y, reſpectivè; proditque $\overline{3 - xx + xx} \times \overline{9 - 6xx + x^4} : - \overline{3x + x^3 + 6x} \times \overline{-3x + x^3} : + 3xx \times xx : + \overline{9x - 3x^3 - x^3 - 3x} \times -3x = 0$. Tum delendo ſuperflua & multiplicando, fit $27 - 18xx + 3x^4, - 9xx + x^6, + 3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$. Et ordinando, $x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0$.

Hactenus

Hactenus de unicâ incognitâ quantitate è duabus æquationibus tollendâ. Quòd si plures è pluribus tollendæ sunt, opus per gradus peragetur. Ex æquationibus $ax = yz$, $x + y = z$, & $5x = y + 3z$, si quantitas y elicienda sit, imprimis tolle alteram quantitatem x, aut z, puta x; substituendo pro eâ valorem ejus $\frac{yz}{a}$ (per æquationem primam inventum) in æquationem secundam ac tertiam. Quo pacto obtinebuntur $\frac{yz}{a} + y = z$, & $\frac{5yz}{a} = y + 3z$: è quibus deinde tolle z ut suprà. De Quantitatibus Exterminandis.

SECT. IV.

De modo tollendi quantitates quotcunque surdas ex æquationibus.

HUC referre licet quantitatum surdarum exterminationem, fingendo eas literis quibuslibet æquales [q]. Quemadmodum si sit $\sqrt{ay} - \sqrt{aa - ay} = 2a + \sqrt[3]{:ayy}$, scribendo t, pro $\sqrt{ay}$, v pro $\sqrt{aa - ay}$, & x pro $\sqrt[3]{:ayy}$, habebuntur æquationes $t - v = 2a + x$, $tt = ay$, $vv = aa - ay$, & $x^3 = ayy$: ex quibus tollendo gradatim t, v, & x, resultabit tandem æquatio libera ab omni Asymmetriâ.

CAPUT UNDECIMUM.

Quomodo Quæstio aliqua ad æquationem redigatur.

POstquam Tiro in æquationibus pro arbitrio transformandis & concinnandis aliquamdiu exercitatus fuerit, ordo exigit, ut ingenii vires in quæstionibus ad æquationem redigendis tentet. Propositâ autem aliquâ Questione, Artificis ingenium in eo præsertim requiritur, ut omnes ejus conditiones totidem æquationibus designet. Ad quod faciendum perpendet imprimis, an propositiones sive sententiæ, quibus enunciatur, sint omnes aptæ quæ terminis algebraicis designari possint, haud secùs quàm conceptus nostri characteribus græcis vel latinis. Et si ita (ut solet in quæstionibus quæ circa numeros vel abstractas quantitates ver-

[q] Vide Fermatii dissertationem de Novo secundarum, et ulterioris ordinis, radicum in analyticis usu, inter opera ejus mathematica, p. 58.

CAPUT XI. fantur), tunc nomina quantitatibus ignotis, atque etiam notis, si opus fuerit, imponat; & sensum quæstionis sermone, ut ita loquar, analytico designet. Et conditiones ejus, ad algebraicos terminos sic translatæ, tot dabunt æquationes, quot ei solvendæ sufficiunt.

Quemadmodum si quærantur tres numeri continuè proportionales, quorum summa sit 20, & quadratorum summa 140; positis x, y, & z nominibus numerorum trium quæsitorum, quæstio è latinis literis in algebraicas vertetur, ut sequitur.

Quæstio Latinè enunciata.	Eadem Algebraicè.
Quæruntur tres numeri his conditionibus,	$x. y. z$?
Ut sint continue proportionales,	$x.y::y.z.$ sive $xz=yy$
Ut omnium summa sit 20,	$x+y+z=20.$
Et ut quadratorum summa sit 140.	$xx+yy+zz=140.$

Atque ita quæstio deducitur ad æquationes $xz=yy$; $x+y+z=20$; & $xx+yy+zz=140$; quarum ope x, y & z per regulas suprà traditas investigandi sunt.

Cæterùm notandum est solutiones quæstionum eo magis expeditas & artificiosas ut plurimùm evadere, quo pauciores incognitæ quantitates sub initio ponuntur. Sic in hâc quæstione posito x pro primo numero & y pro secundo, erit $\frac{yy}{x}$ tertius continuè proportionalis; quem proinde ponens pro tertio numero quæstionem ad æquationes sic reduco.

Quæstio Latinè enunciata.	Eadem Algebraicè.
Quæruntur tres numeri continue proportionales,	$x. y. \frac{yy}{x}$?
Quorum summa sit 20,	$x+y+\frac{yy}{x}=20.$
Et quadratorum summa 140.	$xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140.$

Habentur itaque æquationes $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$; quarum reductione x & y determinandi sunt.

Aliud exemplum accipe. Mercator quidam nummos ejus triente quotannis adauget, demptis 100 lb. quas annuatim impendit in familiam; & poſt tres annos fit duplo ditior. Quæruntur nummi. De Quæst. ad æquat. redigend.

Ad hoc autem reſolvendum ſciendum eſt, quòd plures latent propoſitiones, quæ omnes ſic eruuntur & enunciantur.

Latinè.	Algebraicè.
Mercator habet nummos quoſdam.	x.
Ex quibus anno primo expendit 100 lb.	$x - 100$.
Et reliquum adauget triente.	$x - 100 + \frac{x-100}{3}$, ſive $\frac{4x-400}{3}$.
Annoque ſecundo expendit 100 lb.	$\frac{4x-400}{3} - 100$, ſive $\frac{4x-700}{3}$.
Et reliquum adauget triente.	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9}$, ſive $\frac{16x-2800}{9}$.
Et ſic anno tertio expendit 100 lb.	$\frac{16x-2800}{9} - 100$, ſive $\frac{16x-3700}{9}$.
Et reliquo trientem ſimiliter lucratus eſt.	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27}$, ſive $\frac{64x-14800}{27}$.
Fitque duplo ditior quam ſub initio.	$\frac{64x-14800}{27} = 2x$.

Quæſtio itaque ad æquationem $\frac{64x-14800}{27} = 2x$ redigitur; cujus reductione eruendus eſt x. Nempe duc eam in 27, & fit $64x - 14800 = 54x$: ſubduc $54x$, & reſtat $10x - 14800 = 0$, ſeu $10x = 14800$, & dividendo per 10 fit $x = 1480$. Quare 1480 lb. ſunt nummi ſub initio, ut & lucrum.

Vides itaque quòd ad ſolutiones quæſtionum, quæ circa numeros vel abſtractas quantitatum relationes ſolummodo verſantur, nihil aliud fere requiritur, quàm ut è ſermone Latino, vel alio quovis in quo Problema proponitur, tranſlatio fiat in ſermonem (ſi ita loquar) Algebraicum; hoc eſt, in Characteres qui apti ſunt ut noſtros de quantitatum relationibus conceptus deſignent. Nonnunquam verò poteſt accidere, quòd ſermo, quocum ſtatus quæſtionis exprimitur, ineptus videatur qui in Algebraicum poſſit verti; ſed paucis mutationibus adhibitis, & ad ſenſum potiùs quàm verborum ſonos attendendo, verſio reddetur facilis. Sic

 enim

Caput XII. enim quælibet apud Gentes loquendi formæ propria habent Idiomata: Quæ ubi obvenerint, tranflatio ex unis in alias non verbotenus inftituenda eft, fed ex fenfu determinanda. Cæterùm ut hujufmodi problemata hâc methodo ad æquationes redigendi familiaritatem convincam & illuftrem, & cùm Artes exemplis faciliùs quàm præceptis addifcantur, placuit fequentium problematum folutiones adjungere.

CAPUT DUODECIMUM.

PROB. I.

Datâ duorum numerorum fummâ a, & differentia quadratorum b, invenire numeros?

Sit eorum minor x, & erit alter $a-x$, eorumque quadrata xx & $aa-2ax+xx$: Quorum differentia $aa-2ax$ fupponitur b. Eft itaque $aa-2ax=b$, indeque per reductionem $aa-b=2ax$ feu $\frac{aa-b}{2a}\ (=\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a})=x$.

Exempli Gr. Si fumma numerorum, feu a, fit 8, & quadratorum differentia feu b 16; erit $\frac{1}{2}a-\frac{b}{2a}\ (=4-1)=3=x$ & $a-x=5$. Quare numeri funt 3 & 5.

PROB. II.

Invenire tres quantitates, x, y & z, quarum paris cujufque fumma datur.

Si fumma paris x & y fit a; paris x & z, b; ac paris y & z, c: Pro determinandis tribus quæfitis x, y & z, tres habebuntur æquationes, $x+y=a$; $x+z=b$; & $y+z=c$. Jam ut incognitarum duæ, puta y & z, exterminentur, aufer x utrinque in primâ & fecundâ æquatione, & emergent $y=a-x$, & $z=b-x$; quos valores pro y & z fubftitue in tertiâ, & orietur $a-x+b-x=c$; & per reductionem $x=\frac{a+b-c}{2}$. Invento x, æquationes fuperiores, $y=a-x$, & $z=b-x$, dabunt y & z.

Exemp. Si ſumma paris x & y ſit 9; paris x & z, 10; & paris y & z, 13; tum in valoribus x, y & z ſcribe 9 pro a, 10 pro b, & 13 pro c; & evadet $a+b-c=6$, adeoque $x\ (=\frac{a+b-c}{2}) = 3$, $y(=a-x) = 6$, & $z(=b-x) = 7$. Quæstiones Arithmeticæ.

P R O B. III.

Quantitatem datam ita in partes quotcunque dividere, ut majores partes ſuperent minimam per datas differentias.

Sit a quantitas in quatuor ejuſmodi partes dividenda; ejuſque prima atque minima pars, x; & ſuper hanc exceſſus ſecundæ partis, b; tertia partis, c; & quartæ partis, d; & erit $x+b$ ſecunda pars, $x+c$ tertia pars, & $x+d$ quarta pars; quarum omnium aggregatum, $4x+b+c+d$, æquatur toti lineæ a. Aufer jam utrinque $b+c+d$, & reſtat $4x=a-b-c-d$, ſive $x=\frac{a-b-c-d}{4}$.

Exemp. Proponatur linea 20 pedum, ſic in 4 partes diſtribuenda, ut ſuper primam partem exceſſus ſecundæ ſit 2 pedum, tertiæ 3 ped. & quartæ 7 ped. Et quatuor partes erunt $x\ (=\frac{a-b-c-d}{4}$ ſive $\frac{20-2-3-7}{4}) = 2$, $x+b=4$, $x+c=5$, & $x+d=9$.

Eodem modo quantitas in plures partes iiſdem conditionibus dividitur.

P R O B. IV.

Viro cuidam nummos inter mendicantes diſtribuere volenti, deſunt octo denarii quo minùs det ſingulis tres denarios. Dat itaque ſingulis duos denarios, & tres denarii ſuperſunt. Quæritur numerus mendicantium.

Eſto numerus mendicantium x, & deerunt 8 denarii quo minùs det omnibus $3x$ denarios; habet itaque $3x-8$ denarios. Ex his autem dat $2x$ denarios, & reliqui denarii $x-8$ ſunt tres. Hoc eſt $x-8=3$, ſeu $x=11$.

P R O B.

CAPUT XII.

PROB. V.

Si Tabellarii duo, A & B, 59 milliaribus diftantes, tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B 8 mill. in 3 horis, ac B unâ horâ ferius iter inftituit quàm A: Quæritur longitudo itineris quod A conficiet antequam conveniet B.

Dic longitudinem illam x; & erit $59 - x$ longitudo itineris B: Et cùm A pertranfeat 7 mill. in 2 hor. pertranfibit fpatium x in $\frac{2x}{7}$ horis, eo quòd fit 7 mill. x mill. :: 2 hor. . $\frac{2x}{7}$ hor. Atque ita cùm B pertranfeat 8 mill. in 3 hor. pertranfibit fpatium fuum $59 - x$ in $\frac{177 - 3x}{8}$ horis. Jam cùm horum temporum differentia fit 1 hor.; ut evadant æqualia, adde differentiam illam breviori tempori, nempe tempori $\frac{177 - 3x}{8}$, & emerget $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Et per reductionem $35 = x$. Nam, multiplicando per 8, fit $185 - 3x = \frac{16x}{7}$. Dein, multiplicando etiam per 7, fit $1295 - 21x = 16x$, feu $1295 = 37x$. Et, dividendo denique per 37, exoritur $35 = x$. Sunt itaque 35 mill. iter quod A conficiet antequam conveniet B.

Idem generaliùs.

Datis duorum mobilium A & B eodem curfu pergentium celeritatibus, unà cum intervallo locorum ac temporum à quibus incipiunt moveri: Determinare metam in quâ convenient.

Pone mobilis A eam effe celeritatem quâ fpatium c pertranfire poffit in tempore f, & mobilis B eam effe quâ fpacium d pertranfire poffit in tempore g; & locorum intervallum effe e; ac h, temporum in quibus moveri incipiunt.

CASUS I.

Deinde fi ambo ad eafdem plagas tendant, & A fit mobile quod fub initio motûs longius diftat à metâ: Pone diftantiam illam effe x, indeque aufer intervallum e, & reftabit $x - e$ pro diftantiâ B à metâ. Et cùm A pertranfeat fpatium c in tempore f, tempus in quo pertranfibit fpatium x erit $\frac{fx}{c}$, eo quòd fit fpatium c ad fpa-

tium

tium x, ut tempus f ad tempus $\frac{fx}{c}$. Atque ita cùm B pertranseat spatium d in g, tempus, in quo pertransibit spatium $x-e$, erit $\frac{gx-ge}{d}$. Jam cùm horum temporum differentia supponatur h, ut ea evadant æqualia, adde h breviori tempori, nempe tempori $\frac{fx}{c}$ (si modò B priùs incipiat moveri) & evadet $\frac{fx}{c}+h=\frac{gx-ge}{d}$. Et per reductionem $\frac{cge+cdh}{cg-df}$, vel $\frac{ge+dh}{g-\frac{d}{c}f}$, $=x$. Sin A priùs moveri incipiat, adde h tempori $\frac{gx-ge}{d}$, & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{gx-ge}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdh}{cg-df}=x$. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

CASUS II.

Quòd si mobilia obviam eant, & x ut antè ponatur initialis distantia mobilis A à metâ, tum $e-x$ erit initialis distantia ipsius B ab eâdem metâ; & $\frac{fx}{c}$ tempus in quo A conficiet distantiam x, atque $\frac{ge-gx}{d}$ tempus in quo B conficiet distantiam suam $e-x$. Quorum temporum minori, ut suprà, adde differentiam h, nempe tempori $\frac{fx}{c}$, si B priùs incipiat moveri, & sic habebitur $\frac{fx}{c}+h=\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge-cdh}{cg+df}=x$. Sin A priùs incipiat moveri, adde h tempori $\frac{ge-gx}{d}$, & evadet $\frac{fx}{c}=h+\frac{ge-gx}{d}$, & per reductionem $\frac{cge+cdh}{cg+df}=x$.

EXEMPL. I. Si quotidie Sol unum gradum conficit, & Luna tredecim; & ad tempus aliquod, Sol sit in principio Cancri, atque post tres dies Luna in principio Arietis: Quæritur locus conjunctionis proximè futuræ. Resp. in $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri. Nam cùm ambo ad easdem plagas eant, & serior sit Epocha motûs Lunæ, quæ longius distat à metâ: erit A Luna, B Sol, & $\frac{cge+cdh}{cg-df}$ longitudo itineris lunaris; quæ, si scribatur 13 pro c, 1 pro f, d, ac g, 90 pro e, & 3 pro h, evadet $\frac{13\times1\times90+13\times1\times3}{13\times1-1\times1}$; hoc est $\frac{1209}{12}$, sive $100\frac{3}{4}$. Hos itaque gradus adjice principio Arietis, & prodibit $10\frac{3}{4}$ gr. Cancri.

EXEMPL.

Exempl. II. Si Tabellarii duo A & B, 59 milliaribus diſtantes tempore matutino obviam eant, quorum A conficit 7 milliaria in 2 horis, & B, 8 milliaria in 3 horis, & B unâ horâ ſeriùs iter inſtituit quàm A: Quæritur iter quod A conficiet antequam conveniat B. Reſp. 35 mill. Nam cùm obviam eant, & A primò inſtituat iter, erit $\frac{cge+cdh}{cg+df}$ iter quæſitum. Et hoc, ſi ſcribatur 7 pro c, 2 pro f, 8 pro d, 3 pro g, 59 pro e, & 1 pro h, evadet $\frac{7\times3\times59+7\times8\times1}{7\times3+8\times2}$; hoc eſt $\frac{1295}{37}$, ſive 35.

PROB. VI.

Datâ agentis alicujus poteſtate, invenire quot ejuſmodi agentes datum effectum a in dato tempore b producent.

Sit ea agentis poteſtas quâ effectum c producere poteſt in tempore d; & erit ut tempus d ad tempus b, ita effectus c, quem agens iſte producere poteſt in tempore d, ad effectum quem poteſt producere in tempore b, qui proinde erit $\frac{bc}{d}$. Deinde ut unius agentis effectus, $\frac{bc}{d}$, ad omnium effectum, a, ita agens iſte unicus ad omnes agentes: adeoque agentium numerus erit $\frac{ad}{bc}$.

Exempl. Si ſcriba in 8 diebus 15 folia deſcribere poteſt, quot ejuſmodi ſcribæ requiruntur ad deſcribendum 405 folia in 9 diebus? Reſp. 24. Nam ſi ſubſtituantur 8 pro d, 15 pro c, 405 pro a, & 9 pro b, numerus $\frac{ad}{bc}$ evadet $\frac{405\times8}{9\times15}$, hoc eſt $\frac{3240}{135}$, ſive 24.

PROB. VII.

Datis plurium agentium viribus, tempus x determinare in quo datum effectum d conjunctim producent.

Agentium A, B, C, vires ponantur, quæ in temporibus e, f, g, producant effectus a, b, c reſpectivè; & hæ in tempore x producent effectus $\frac{ax}{e}$, $\frac{bx}{f}$, $\frac{cx}{g}$. Quare eſt $\frac{ax}{e}+\frac{bx}{f}+\frac{cx}{g}=d$, & per reductionem $x=\dfrac{d}{\frac{a}{e}+\frac{b}{f}+\frac{c}{g}}$.

Exempl.

Exempl. Tres mercenarii opus aliquod certis temporibus perficere poſſunt, *viz.* A ſemel in tribus ſeptimanis, B ter in octo ſeptimanis, & C quinquies in duodecim ſeptimanis. Quæritur quanto tempore ſimul abſolvent? Sunt itaque Agentium A, B, C, vires, quæ temporibus 3, 8, 12 producant effectus 1, 3, 5 reſpective: et quæritur tempus quo abſolvent effectum 1. Quare pro a, b, c; d; e, f, g; ſcribe 1, 3, 5; 1; 3, 8, 12, & proveniet $x = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}}$, ſive $\frac{8}{9}$ ſept. hoc eſt 6 dies $5\frac{1}{3}$ horæ, tempus quo ſimul abſolvent. Quæstiones Arithmeticæ.

PROB. VIII.

Diſſimiles duarum pluriumve rerum miſturas ita componere, ut res illæ commiſtæ datam inter ſe rationem acquirant.

Sit unius miſturæ data quantitas dA + eB + fC, alterius eadem quantitas gA + hB + kC, & eadem tertiæ lA + mB + nC ubi A, B, & C denotent res miſtas, & d, e, f, g, h, &c. Proportiones earundem in miſturis. Et ſit pA + qB + rC miſtura, quam ex his tribus oportet componere; fingeque x, y & z numeros eſſe, per quos ſi tres datæ miſturæ reſpective multiplicentur, earum ſumma evadet pA + qB + rC.

$$\text{Eſt itaque}\quad \left.\begin{array}{lll} dx\text{A} & +\,ex\text{B} & +\,fx\text{C} \\ +\,gy\text{A} & +\,hy\text{B} & +\,ky\text{C} \\ +\,lx\text{A} & +\,mz\text{B} & +\,nz\text{C} \end{array}\right\} = p\text{A} + q\text{B} + r\text{C},$$

Adeoque, collatis terminis, $dx + gy + lz = p$; $ex + hy + mz = q$; & $fx + ky + nz = r$; & per reductionem $x = \frac{p-gy-lz}{d} = \frac{q-hy-mz}{e} = \frac{r-ky-nz}{f}$. Et rurſus æquationes $\frac{p-gy-lz}{d} = \frac{q-hy-mz}{e}$, & $\frac{q-hy-mz}{e} = \frac{r-ky-nz}{f}$ per reductionem dant $\frac{ep-dq+dmz-elz}{eg-dh}\ (= y) = \frac{fq-er+enz-fmz}{fh-ek}$: Quæ, ſi abbrevietur ſcribendo α pro $ep-dq$, β pro $dm-el$, γ pro $eg-dh$, δ pro $fq-er$, ζ pro $en-fm$, & θ pro $fh-ek$, evadet $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma} = \frac{\delta+\zeta z}{\theta}$; & per reductionem $\frac{\theta\alpha-\gamma\delta}{\gamma\zeta-\beta\theta} = z$. Invento z, pone $\frac{\alpha+\beta z}{\gamma} = y$, & $\frac{p-gy-lz}{d} = x$.

 Exempl. Si tres ſint metallorum colliquefactorum miſturæ, quarum primæ pondo continet argenti ℥ 12, æris ℥ 1, & ſtanni ℥ 3, ſecundæ pondo continet argenti ℥ 1, æris ℥ 12, & ſtanni ℥ 3, & tertiæ pondo continet æris ℥ 14, ſtanni ℥ 2, & argenti nihil; ſintque hæ miſturæ ita componendæ, ut pondo compoſitionis contineat argenti ℥ 4, æris ℥ 9, & ſtanni ℥ 3: pro d, e, f; g, h, k; l, m, n; p, q, r ſcribe 12, 1, 3; 1, 12, 3; 0, 14, 2; 4, 9, 3 reſpectivè, & erit α $(= ep - dq = 1 \times 4 - 12 \times 9) = -104$, & β $(= dm - el = 12 \times 14 - 1 \times 0) = 168$, & ſic $\gamma = -143$, $\delta = 24$, $\zeta = -40$, & $\theta = 33$. Adeoque z $(= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{-3432 + 3432}{5720 - 5544}) = 0$, y $(= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-104 + 0}{-143}) = \frac{8}{11}$, & x $(= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{4 - \frac{8}{11}}{12}) = \frac{3}{11}$. Quare ſi miſceantur $\frac{8}{11}$ partes pondo miſturæ ſecundæ, $\frac{3}{11}$ partes pondo primæ, & nihil tertiæ, aggregatum erit pondo continens quatuor uncias argenti, novem æris, & tres ſtanni.

PROB. IX.

Datis plurium ex iiſdem rebus miſturarum pretiis, & proportionibus miſtorum inter ſe, pretium cujuſvis è miſtis determinare.

Cujuſvis rerum A, B, C, miſturæ, dA + gB + lC, pretium eſto p; miſturæ eA + hB + mC pretium q; & miſturæ fA + kB + nC pretium r; & rerum illarum A, B, C quærantur pretia x, y & z. Utpote pro rebus A, B, & C ſubſtitue earum pretia x, y & z, & exurgent æquationes $dx + gy + lz = p$, $ex + hy + mz = q$, & $fx + ky + nz = r$, ex quibus pergendo ut in præcedente Problemate, elicientur itidem $\frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = z$; $\frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = y$; & $\frac{p - gy - lz}{d} = x$.

Exempl. Emit quidam 40 modios tritici, 24 modios hordei, & 20 modios avenæ ſimul 15 libris 12 ſolidis; Deinde conſimilis grani emit 26 modios tritici, 30 modios hordei, & 50 modios avenæ ſimul 16 libris: ac tertiò conſimilis etiam grani emit 24 modios tritici, 120 modios hordei, & 100 modios avenæ ſimul 34 lib. Quæritur quanti æſtimandus ſit modius cujuſque grani? Reſp. Modius tritici 5 ſolidis, hordei 3 ſolidis, & avenæ 2 ſolidis. Nam pro d, g, l; e, h, m; f, k, n; p, q, & r ſcribendo reſpectivè 40, 24, 20; 26, 30, 50; 24, 120, 100; $15\frac{3}{5}$, 16, & 34; prodit

prodit $\alpha\ (= ep - dq = 26 \times 15\frac{3}{5} - 40 \times 16) = -234\frac{2}{5}$; & $\beta\ (= dm - el = 40 \times 50 - 26 \times 20) = 1480$. Atque ita $\gamma = -576$, $\delta = -500$, $\zeta = 1400$, & $\theta = -2400$. Adeoque $z\ (= \frac{\theta\alpha - \gamma\delta}{\gamma\zeta - \beta\theta} = \frac{562560 - 288000}{-806400 + 3552000} = \frac{274560}{2745600}) = \frac{1}{10}$, $y\ (= \frac{\alpha + \beta z}{\gamma} = \frac{-234\frac{2}{5} + 148}{-567}) = \frac{3}{20}$. Et $x\ (= \frac{p - gy - lz}{d} = \frac{15\frac{3}{5} - \frac{18}{5} - 2}{40}) = \frac{1}{4}$. Conſtitit itaque modius tritici $\frac{1}{4}$ lb ſeu 5 ſolidis, modius hordei $\frac{3}{20}$ lb ſeu 3 ſolidis, & modius avenæ $\frac{1}{10}$ lb ſeu 2 ſolidis. QUÆSTIONES ARITHMETICÆ.

PROB. X.

Datis & miſturæ & miſtorum gravitatibus ſpecificis invenire proportionem miſtorum inter ſe.

Sit e gravitas ſpecifica miſturæ $A + B$, cujus A gravitas ſpecifica eſt a, & B gravitas b; & cùm gravitas abſoluta, ſeu pondus, componatur ex mole corporis & gravitate ſpecificâ, erit aA pondus ipſius A, bB pondus ipſius B, & $eA + eB$ pondus aggregati $A + B$; adeoque $aA + bB = eA + eB$, indeque $aA - eA = eB - bB$, ſeu $e - b.\ a - e :: A.\ B$.

EXEMPL. Sit auri gravitas ut 19, argenti ut $10\frac{1}{3}$, & Coronæ Hieronis ut 17; eritque $10.\ 3\ (:: e - b.\ a - e :: A.\ B) ::$ moles auri in coronâ, ad molem argenti: vel $190.\ 31\ (:: 19 \times 10.\ 10\frac{1}{3} \times 3 :: a \times \overline{e - b}.\ b \times \overline{a - e}) ::$ pondus auri in coronâ, ad pondus argenti: & $221.\ 31 ::$ pondus coronæ, ad pondus argenti.

PROB. XI.

Si boves a depaſcant pratum b in tempore c; & boves d depaſcant pratum æquè bonum e in tempore f, & gramen uniformiter creſcat: Quæritur quot boves depaſcent pratum ſimile g in tempore h.

Si boves a in tempore c depaſcant pratum b; tum, per analogiam, boves $\frac{e}{b}a$ in eodem tempore c, vel boves $\frac{ec}{bf}a$ in tempore f, vel boves $\frac{ec}{bh}a$ in tempore h, depaſcent pratum e: puta ſi

 gramen

CAPUT XII. gramen poſt tempus c non creſceret. Sed cùm propter graminis incrementum boves d in tempore f, depaſcant ſolummodo pratum e, ideo graminis in prato e incrementum illud per tempus $f-c$ tantum erit, quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus $d - \frac{eca}{bf}$ per tempus f, hoc eſt, quantum ſufficit paſcendis bobus $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bb}$ per tempus h. Et in tempore $h-c$, per analogiam, tantum erit incrementum, quantum per ſe ſufficit paſcendis bobus $\frac{h-c}{f-c}$ in $\frac{df}{b} - \frac{eca}{bb}$, ſive $\frac{bdfh - ecah - bdcf + aecc}{bfh - bch}$. Hoc incrementum adjice bobus $\frac{aec}{bh}$, & prodibit $\frac{bdfh - ecah - bdcf + ecfa}{bfh - bch}$ numerus boum quibus paſcendis ſufficit pratum e per tempus h. Adeoque per analogiam pratum g bobus $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ per idem tempus h paſcendis ſufficiet.

EXEMPL. Si 12 boves depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera prati in 4 ſeptimanis; & 21 boves depaſcant 10 jugera conſimilis prati in 9 ſeptimanis; quæritur quot boves depaſcant 24 jugera in 18 ſeptimanis? Reſp. 36. Iſte enim numerus invenietur ſubſtituendo in $\frac{bdfgh - ecagh - bdcgf + ecfga}{befh - bceh}$ numeros 12, $3\frac{1}{3}$, 4, 21, 10, 9, 24, & 18 pro literis a, b, c, d, e, f, g & h reſpectivè. Sed ſolutio fortè haud minùs expedita erit, ſi è primis principiis ad formam ſolutionis præcedentis literalis eruatur. Utpote ſi 12 boves in 4 ſeptimanis depaſcant $3\frac{1}{3}$ jugera, tum, per analogiam, 36 boves in 4 ſeptimanis, vel 16 boves in 9 ſeptimanis, vel 8 boves in 18 ſeptimanis depaſcent 10 jugera: puta ſi gramen non creſceret. Sed cùm propter graminis incrementum 21 boves in 9 ſeptimanis depaſcant ſolummodo 10 jugera, illud graminis in 10 jugeris per poſteriores 5 ſeptimanas incrementum tantum erit, quantum per ſe ſufficit exceſſui boum 21 ſupra 16, hoc eſt 5 bobus per 9 ſeptimanas, vel quod perinde eſt $\frac{5}{2}$ bobus per 18 ſeptimanas paſcendis. Et in 14 ſeptimanis (exceſſu 18 ſupra 4 primas) incrementum illud graminis, per analogiam, tantum erit quantum ſufficiat 7 bobus per 18 ſeptimanas paſcendis; eſt enim 5 ſept. 14 ſept. $\frac{5}{2}$ boves 7 boves. Quare 8 bobus, quos 10 jugera ſine incremento graminis paſcere poſſunt per 18 ſeptimanas,

timanas, adde hosce 7 boves, quibus pascendis solum incrementum graminis sufficit, & summa erit 15 boves. Ac denique si 10 jugera 15 bobus per 18 septimanas pascendis sufficiant, tum, per analogiam, 24 jugera per idem tempus sufficient 36 bobus. Quæstiones Arithmeticæ.

PROB. XII.

Datis sphæricorum corporum in eâdem rectâ motorum, sibique occurrentium, magnitudinibus & motibus, determinare motus eorundem post reflexionem.

Hujus resolutio ex his dependet conditionibus, ut corpus utrumque tantum reactione patiatur quantum agit in alterum, & ut eâdem celeritate post reflexionem recedant ab invicem, quâ ante accedebant. His positis sint corporum A & B celeritates a & b respectivè; & motus (siquidem componantur ex mole & celeritate corporum) erunt $a\mathrm{A}$ & $b\mathrm{B}$. Et si corpora ad easdem plagas tendant, & A celerius movens insequatur B, pone x decrementum motûs $a\mathrm{A}$, & incrementum motûs $b\mathrm{B}$, percussione exortum; & post reflectionem motus erunt $a\mathrm{A}-x$, & $b\mathrm{B}+x$; & celeritates $\frac{a\mathrm{A}-x}{\mathrm{A}}$ ac $\frac{b\mathrm{B}+x}{\mathrm{B}}$; quarum differentia æquatur $a-b$ differentiæ celeritatum ante reflexionem. Habetur itaque æquatio $\frac{b\mathrm{B}+x}{\mathrm{B}}-\frac{a\mathrm{A}-x}{\mathrm{A}}=a-b$, & inde per reductionem fit $x=\frac{2a\mathrm{AB}-2b\mathrm{AB}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$; quo pro x in celeritatibus, $\frac{a\mathrm{A}-x}{\mathrm{A}}$, & $\frac{b\mathrm{B}+x}{\mathrm{B}}$, substituto, prodeunt $\frac{a\mathrm{A}-a\mathrm{B}+2b\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ celeritas ipsius A, & $\frac{2a\mathrm{A}-b\mathrm{A}+b\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ celeritas ipsius B, post reflexionem.

Quòd si corpora obviam eant, tum signo ipsius b ubique mutato, celeritates post reflectionem erunt $\frac{a\mathrm{A}-a\mathrm{B}-2b\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ & $\frac{2a\mathrm{A}+b\mathrm{A}-b\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$: Quarum alterutra si fortè negativa obvenerit, id arguit motum illum post reflexionem ad plagam dirigi ei contrariam, ad quam A tendebat ante reflexionem. Id quod etiam de motu ipsius A in casu priori intelligendum est.

EXEMPL.

CAPUT XII. EXEMPL. Si corpora homogenea A trium librarum cum celeritatis gradibus 8, & B novem librarum cum celeritatis gradibus 2 ad easdem plagas tendant: tunc pro A, a, B & b scribe 3, 8, 9 & 2; & $\left(\frac{aA-aB+2bB}{A+B}\right)$ evadit -1, ac $\left(\frac{2aA-bA+bB}{A+B}\right)$ 5. Recedet itaque A cum uno gradu celeritatis post reflexionem, & B cum quinque gradibus progredietur.

PROB. XIII.

Invenire tres numeros continuè proportionales quorum summa sit 20, *&* *quadratorum summa* 140.

Pone numerorum primum x, & secundum y; eritque tertius $\frac{yy}{x}$, adeoque $x+y+\frac{yy}{x}=20$; & $xx+yy+\frac{y^4}{xx}=140$. Et per reductionem $xx\begin{matrix}+y\\-20\end{matrix}x+yy=0$, & $x^4\begin{matrix}+yy\\-140\end{matrix}xx+y^4=0$. Jam ut exterminetur x, pro a, b, c, d, e, f, g & h, in Reg. 3. substitue respectivè $1,\ 0,\ yy-140,\ 0,\ y^4;\ 1,\ y-20,$ & yy; et emerget $-yy+280\times y^6:+2yy-40y+260\times 260y^4-40y^5:+3y^4\times y^4:$ $-2yy\times y^6-40y^5+400y^4:=0$. Et, per multiplicationem, $1600y^6+20800y^5-67600y^4=0$. Ac reducendo, $4yy-52y+169=0$. Sive (radice extractâ) $2y-13=0$, seu $y=6\frac{1}{2}$. Id quod etiam breviùs aliâ methodo sed minùs obviâ suprà inventum est. Porro, ut inveniatur x, substitue $6\frac{1}{2}$ pro y in æquatione $xx\begin{matrix}+y\\-20\end{matrix}x+yy=0$. Et exurget $xx-13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}=0$, seu $xx=13\frac{1}{2}x+42\frac{1}{4}$. Et, extractâ radice, $x=6\frac{3}{4}$ + vel $-\sqrt{3\frac{5}{16}}$. Nempe $6\frac{3}{4}+\sqrt{3\frac{5}{16}}$ est maximus quæsitorum trium numerorum, & $6\frac{3}{4}-\sqrt{3\frac{5}{16}}$ minimus. Nam x alterutrum extremorum numerorum ambiguè designat, indeque gemini prodeunt valores, quorum alteruter potest esse x, existente altero $\frac{yy}{x}$.

Idem aliter. Positis numeris x, y & $\frac{yy}{x}$, ut antè, erit $x+y+\frac{yy}{x}=20$, seu $xx=\begin{matrix}20\\-y\end{matrix}x-yy$; & extractâ radice, $x=10-\frac{1}{2}y+\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}yy}$ primus numerus: Hunc & y aufer de 20, & restat $\frac{yy}{x}=10-\frac{1}{2}y-\sqrt{100-10y-\frac{3}{4}yy}$ tertius numerus. Estque summa quadratorum a tribus hisce numeris $400-40y$, adeoque $400-40y$

$= 140$, five $y = 6\frac{1}{2}$. Invento medio numero $6\frac{1}{2}$, fubftitue eum pro y in primo ac tertio numero fuprà invento; & evadet primus $6\frac{3}{4} + \sqrt{3\frac{5}{16}}$, ac tertius $6\frac{3}{4} - \sqrt{3\frac{5}{16}}$, ut antè. Quæstiones Arithmeticæ.

PROB. XIV.

Invenire quatuor numeros continuè proportionales quorum duo medii fimul conftituant 12, *& duo extremi* 20.

Sit x fecundus numerus; & erit $12 - x$ tertius; $\frac{xx}{12 - x}$ primus; & $\frac{144 - 24x + xx}{x}$ quartus; adeoque $\frac{xx}{12 - x} + \frac{144 - 24x + xx}{x} = 20$. Et, per reductionem, $xx = 12x - 30\frac{6}{7}$, feu $x = 6 + \sqrt{5\frac{1}{7}}$. Quo invento cæteri numeri è fuperioribus dantur.

PROB. XV.

Invenire quatuor numeros continuè proportionales, quorum datur fumma a, & fumma quadratorum b.

Etfi defideratas quantitates ut plurimùm immediatè quærere folemus, fiquando tamen duæ obvenerint ambiguæ, hoc eft, quæ conditionibus omnino fimilibus præditæ funt, (ut hîc duo medii & duo extremi numerorum quatuor proportionalium) præftat alias quantitates non ambiguas quærere, per quas hæ determinantur: quemadmodum harum fummam, vel differentiam, vel rectangulum. Ponamus ergo fummam duorum mediorum numerorum effe s, & rectangulum r; & erit fumma extremorum $a - s$, & rectangulum etiam r, propter proportionalitatem. Jam ut ex his eruantur quatuor illi numeri, pone x primum & y fecundum; eritque $s - y$ tertius; & $a - s - x$ quartus; & rectangulum fub mediis $sy - yy = r$; indeque medii, $y = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$, & $s - y = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - r}$. Item rectangulum fub extremis $ax - sx - xx = r$; indeq; extremi, $x = \frac{a - s}{2} + \sqrt{\frac{ss - 2as + aa}{4} - r}$, & $a - s - x = \frac{a - s}{2} - \sqrt{\frac{ss - 2as + aa}{4} - r}$.

Summa

CAPUT XII.

Summa quadratorum ex hisce quatuor numeris est $2ss - 2as + aa - 4r$, quæ est $= b$. Ergo $r = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}as + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}b$, quo substituto pro r prodeunt quatuor numeri ut sequitur.

$$\text{Duo medii} \begin{cases} \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \\ \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}. \end{cases}$$

$$\text{Duo extremi} \begin{cases} \frac{a-s}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \\ \frac{a-s}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}. \end{cases}$$

Restat tamen etiamnum inquirendus valor ipsius s. Quare ad abbreviandos terminos pro numeris hisce substitue.

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}s + p. & & \frac{a-s}{2} + q. \\ & \& & \\ \frac{1}{2}s - p. & & \frac{a-s}{2} - q. \end{matrix}$$

Et pone rectangulum sub secundo & quarto æquale quadrato tertii, siquidem hæc problematis conditio nondum impleatur; eritque $\frac{as-ss}{4} - \frac{1}{2}qs + \frac{pa-ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss - ps + pp$. Pone etiam rectangulum sub primo & tertio æquale quadrato secundi; & erit $\frac{as-ss}{4} + \frac{1}{2}qs \frac{-pa+ps}{2} - pq = \frac{1}{4}ss + ps + pp$. Harum æquationum priorem aufer è posteriori, & restabit $qs - pa + ps = 2ps$, seu $qs = pa + ps$. Restitue jam $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$ in locum p, & $\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss}$ in locum q, & habebitur $s\sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss} = a + s \times \sqrt{\frac{1}{4}b - \frac{1}{4}ss + \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}aa}$. Et quadrando $ss = -\frac{b}{a}s + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b$, seu $s = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}b}$; quo invento, dantur quatuor numeri quæsiti è superioribus.

PROB. XVI.

Si pensio annua librarum a per quinque annos proximè sequentes solvenda, ematur paratâ pecuniâ c, quæritur quanti æstimanda sit usura usuræ centum librarum per annum.

Pone $1 - x$ usuram usuræ pecuniæ x in anno, hoc est quod pecunia 1 post annum solvenda valeat x paratæ pecuniæ; &, per analogiam, pecunia a post annum solvenda valebit ax paratæ pecu-

2 niæ,

niæ, poſt duos annos, axx; poſt tres, ax^3; poſt quatuor, ax^4; & poſt quinque, ax^5. Adde jam hos quinque terminos, & erit $ax^5 + ax^4 + ax^3 + axx + ax = c$, ſeu $x^5 + x^4 + x^3 + xx + x = \frac{c}{a}$, æquatio quinque dimenſionum; cu*jus ope cùm x, per regulas poſt docendas, inventum fuerit *, pone $x . 1 :: 100 . y$. Et erit $y - 100$ uſura uſuræ centum librarum per annum. Quæstiones Arithmeticæ.

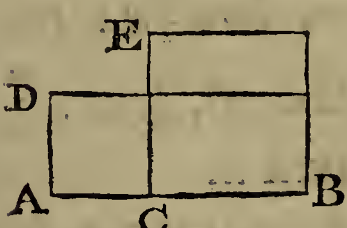
*Nempe inveniendo figuras primas radicis per conſtructionem quamvis mechanicam & reliquas per methodum Vietæ.

Atque has, in quæſtionibus ubi ſolæ quantitatum proportiones abſque poſitionibus linearum conſiderandæ veniunt, inſtantias dediſſe ſufficiat: Pergamus jam ad Problematum Geometricorum ſolutiones.

CAPUT DECIMUM TERTIUM.

Quomodo Quæſtiones Geometricæ ad æquationem redigantur.

Quæſtiones *Geometricæ* eâdem facilitate iiſdemque legibus ad æquationes nonnunquam redigi poſſunt, ac quæ de abſtractis quantitatibus proponuntur. Ut ſi recta AB in extremâ & mediâ proportione ſecanda ſit in C, hoc eſt, ita ut BE, quadratum maximæ partis, ſit æquale rectangulo, BD, ſub totâ & minore parte contento:

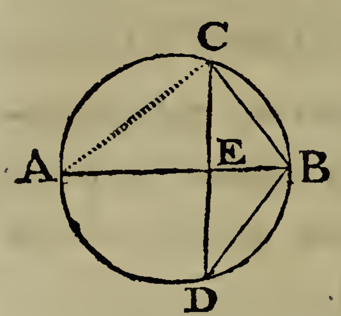


poſito $AB = a$, & $BC = x$, erit $AC = a - x$, & $xx = a$ in $a - x$; æquatio quæ per reductionem dat $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$.

Sed in rebus Geometricis quæ frequentiùs occurrunt, à variis linearum poſitionibus & relationibus complexis ita dependere ſolent, ut egeant ulteriori inventione & artificio, quo ad Algebraicos terminos deduci poſſint. Et licet in hujuſmodi caſibus difficile ſit aliquid præſcribere, & cujuſque ingenium ſibi debeat eſſe operandi norma: conabor tamen diſcentibus viam præſternere. Sciendum eſt itaque, quòd quæſtiones circa eaſdem lineas, definito quolibet modo ſibi invicem relatas, poſſint variè proponi, ponendo alias atque alias quærendas eſſe ex aliis atque aliis datis. Sed de quibuſcunque tamen datis vel quæſitis inſtituitur quæſtio, ſolutio ejus eâdem planè methodo ex Analyſeos ſerie perficietur, nullâ omninò circumſtantiâ variatâ præter fictas linearum ſpecies,

 ſive

CAPUT XIII. five nomina, quibus datas à quæfitis folemus diftinguere. Quemadmodum fi quæftio fit de Ifofcele CBD in circulum infcripto, cujus latera BC, BD, & bafis CD cum diametro circuli AB conferenda funt: ea vel proponi poteft de inveftigatione *diametri* ex datis lateribus & bafi, vel de inveftigatione *bafis* ex datis lateribus & diametro, vel denique de inveftigatione *laterum* ex datis bafi & diametro: Sed utcunque proponitur, redigetur ad æquationem per eandem feriem Analyfeos. Nempe fi quæratur *Diameter* pono $AB = x$, $CD = a$, & BC vel $BD = b$. Tum, ductâ AC, propter fimilia triangula ABC & CBE, eft AB. BC : : BC. BE, five $x. b : : b.$ BE. Quare $BE = \frac{bb}{x}$. Eft & $CE = \frac{1}{2}CD$, five $\frac{1}{2}a$: et, propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$; hoc eft, $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$. Quæ æquatio, per reductionem, dabit quæfitum x.



Sin quæratur *Bafis*, pono $AB = c$, $CD = x$, & BC vel $BD = b$. Tum (ductâ AC) propter fimilia triangula ABC & CBE, eft AB. BC : : BC. BE, five $c.b :: b.$BE. Quare $BE = \frac{bb}{c}$. Eft & $CE = \frac{1}{2}CD$, five $\frac{1}{2}x$: &, propter angulum CEB rectum, $CEq + BEq = BCq$; hoc eft, $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$; æquatio quæ per reductionem dabit quæfitum x.

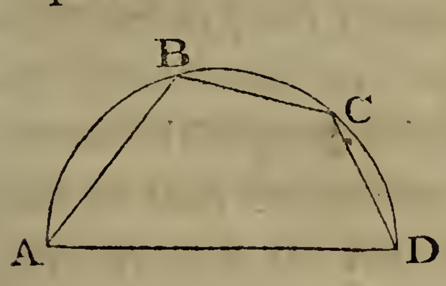
Atque ita fi *Latus* BC vel BD quæratur, pono $AB = c$, $CD = a$, & BC vel $BD = x$. Et (AC ut antè ductâ) propter fimilia triangula ABC & CBE, eft AB. BC : : BC. BE; five $c. x : : x.$ BE. Quare $BE = \frac{xx}{c}$. Eft & $CE = \frac{1}{2}CD$, five $\frac{1}{2}a$; &, propter angulum CEB rectum, eft $CEq + BEq = BCq$; hoc eft, $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$; æquatio quæ per reductionem dabit quæfitum x.

Vides itaque quòd in unoquoque cafu calculus, quo pervenitur ad æquationem, per omnia fimilis fit, & eandem æquationem pariat, excepto tantùm quòd lineas aliis atque aliis literis defignavi, prout datæ vel quæfitæ ponuntur. Ex diverfis quidem datis & quæfitis oritur diverfitas in reductione æquationis inventæ: Nam æquationis, $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{xx} = bb$, alia eft reductio, ut obtineatur $x = \frac{2bb}{\sqrt{4bb - aa}}$, valor de AB; & æquationis, $\frac{1}{4}xx + \frac{b^4}{cc} = bb$, alia re-

ductio,

ductio, ut obtineatur $x = \frac{2b}{c}\sqrt{cc - bb}$, valor de CD; & æquationis, $\frac{1}{4}aa + \frac{x^4}{cc} = xx$, reductio longè alia, ut obtineatur $x = \sqrt{\frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}c\sqrt{cc - aa}}$, valor de BC vel BD: perinde ut hæc $\frac{1}{4}aa + \frac{b^4}{cc} = bb$, ad eliciendum c, a, vel b diverſis modis reduci debet: ſed in harum æquationum inventione nulla fuit diverſitas. Et hinc eſt quod jubent, ut nullum inter datas & quæſitas quantitates habeatur diſcrimen. Nam cùm eadem computatio cuique caſui datorum & quæſitorum competat, convenit, ut ſine diſcrimine concipiantur & conferantur, quo rectiùs judicetur de modis computandi: vel potiùs convenit, ut fingas quæſtionem de ejuſmodi datis & quæſitis propoſitam eſſe, per quas arbitreris te poſſe ad æquationem facillimè pervenire. De Quæst. Geometr.

Propoſito igitur aliquo Problemate, quantitates quas involvit confer, & nullo inter datas & quæſitas habito diſcrimine, perpende quomodo aliæ ex aliis dependeant, ut cognoſcas, quænam, ſi aſſumantur, ſyntheticè gradiendo dabunt cæteras. Ad quod faciendum, non opus eſt, ut primâ fronte de modo cogites, quo aliæ ex aliis per calculum Algebraicum deduci poſſint; ſed ſufficit animadverſio generalis, quòd poſſint directo nexu quomodocunque deduci. Verbi gratiâ; ſi quæſtio ſit de circuli diametro AD, tribuſque lineis AB, BC, & CD in ſemicirculo inſcriptis, & ex reliquis datis quæratur BC; primo intuitu manifeſtum eſt diametrum AD determinare ſemicirculum; dein lineas AB & CD per inſcriptionem determinare puncta B & C, atque adeo quæſitum BC, idque nexu maximè directo; & quo pacto tamen BC ex his datis per Analyſin eruatur, non ita manifeſtum eſt. Hoc idem quoque de AB vel CD, ſi ex reliquis datis quærerentur, intelligendum eſt. Quòd ſi AD ex datis AB, BC & CD quæreretur, æquè patet id non fieri poſſe Syntheticè; ſiquidem punctorum A ac D diſtantia dependet ex angulis B & C; & illi anguli ex circulo cui datæ lineæ ſunt inſcribendæ; & ille circulus non datur, ignotâ AD diametro. Rei igitur natura poſtulat, ut AD non Syntheticè, ſed ex ejus aſſumptione, quæratur, ut ad data fiat regreſſus.



CAPUT XIII. Cùm varios ordines, quibus termini quæſtionis ſic evolvi poſſint, perſpexeris, *E ſyntheticis quoſlibet adhibe, aſſumendo lineas tanquam datas à quibus ad alias facillimus videtur progreſſus, & ad ipſas viciſſim difficillimus.* Nam computatio, ut per varia media poſſit incedere, tamen ab iſtis lineis initium ſumet; ac promptiùs perficietur, fingendo quæſtionem ejuſmodi eſſe, ac ſi de iſtis datis & quæſito aliquo, ab iſtis facillimè prodituro, inſtitueretur, quàm de quæſtione, prout reverâ, proponitur cogitando. Sic in exemplo jam allato, ſi ex reliquis datis quæritur AD; cùm id ſynthecticè fieri non poſſe percipiam, ſed ab ipſo tamen, ſi modò daretur, diſcurſum ad alia directo nexu incedere, aſſumo AD tanquam datum; & abinde computationem non ſecùs incipio, quàm ſi reverâ daretur, & aliqua ex datis, AB, BC & CD, quæreretur. Atque hâc methodo, computationem ab aſſumptis ad cæteras quantitates eo more promovendo quo linearum relationes dirigunt, æquatio tandem inter duos ejuſdem alicujus quantitatis valores ſemper obtinebitur; ſive ex valoribus unus ſit litera, ſub initio operis, quantitati pro nomine impoſita, & alter per computationem inventus; ſive uterque per computationem diverſimodè inſtitutam inveniatur.

Cæterùm ubi terminos quæſtionis ſic in genere comparaveris, plus artis & inventionis in eo requiritur, ut advertas particulares iſtos nexus, ſive linearum relationes, quæ computationi accommodantur. Nam quæ laxiùs perpendenti videantur immediatè & relatione proximâ connecti, cùm illam relationem algebraicè deſignare volumus, circuitum plerumque, quoad conſtructiones Schematum de novo moliendas & computationem per gradus promovendam, exigunt: Quemadmodum de BC ex AD, AB & CD colligendo conſtare poteſt. Per ejuſmodi enim propoſitiones vel enunciationes ſolummodò gradiendum eſt, quæ aptæ ſunt ut terminis algebraicis deſignentur, quales præſertim ab Axiom. 19, Prop. 4, lib. 6, & Prop. 47, lib. 1. Elem. proveniunt.

Imprimis itaque promovetur calculus per additionem vel ſubductionem linearum, eò ut ex valoribus partium obtineatur valor totius, vel ex valoribus totius & unius partis obtineatur valor alterius.

Secundò promovetur ex linearum proportionalitate: ponimus enim,

enim, ut ſuprà, factum à mediis terminis diviſum per alterutrum extremorum eſſe valorem alterius. Vel quod perinde eſt, ſi valores omnium quatuor proportionalium priùs habeantur, ponimus æqualitatem inter factos extremorum & factos mediorum. Linearum verò proportionalitas ex triangulorum ſimilitudine maximè ſe prodit; quæ cùm ex æqualitate angulorum dignoſcatur, in iis comparandis Analyſta debet eſſe perſpicax, atque adeo non ignorabit Prop. 5, 13, 15, 29, & 32. lib. 1. Prop. 4, 5, 6, 7, & 8, lib. 6. Et Prop. 20, 21, 22, 27 ac 31, lib. 3. Elementorum. Quibus etiam referri poteſt Prop. 3, lib. 6, ubi ex proportionalitate linearum colligitur angulorum æqualitas, & contrà. Atque idem aliquandò præſtant Prop. 35 & 36, lib. 3.

Tertiò promovetur per additionem vel ſubductionem quadratorum. In triangulis nempe rectangulis addimus quadrata minorum laterum, ut obtineatur quadratum maximi; vel à quadrato maximi lateris ſubducimus quadratum unius è minoribus, ut obtineatur quadratum alterius.

Atque his paucis fundamentis (ſi adnumeretur Prop. 1, lib. 6, Elem. cùm de ſuperficiebus agitur, ut & aliquæ propoſitiones ex lib. 11 & 12, deſumptæ cùm agitur de ſolidis) tota Ars Analytica, quoad Geometriam rectilineam, innititur. Quin etiam ad ſolas linearum ex partibus compoſitiones & ſimilitudines triangulorum poſſunt omnes Problematum difficultates reduci; adeo ut non opus ſit alia Theoremata adhibere: quippe quæ omnia in hæc duo reſolvi poſſunt, & proinde ſolutiones etiam quæ ex iſtis depromuntur. Inque hujus rei inſtantiam ſubjunxi Problema de perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demittendo ſine adjumento Prop. 47. lib. 1. ſolutum. Etſi verò juvet ſimpliciſſima principia à quibus problematum ſolutiones dependet non ignoràſſe, & iſtis ſolis adhibitis poſſe quælibet ſolvere; expeditionis tamen gratiâ convenit, ut non ſolùm Prop. 47. lib. 1. Elem. cujus uſus eſt frequentiſſimus; ſed & alia etiam *Theoremata* nonnunquam adhibeantur.

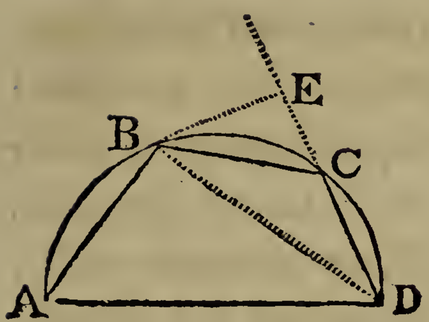
Quemadmodum ſi, perpendiculo in baſem obliquanguli trianguli demiſſo, de ſegmentis baſis ad calculum promovendum agatur; ex uſu erit ſcire, quòd Differentia quadratorum è lateribus æquetur duplo rectangulo ſub baſi & diſtantiâ perpendiculi à medio baſis.

Caput XIII. Si trianguli alicujus verticalis angulus bifecetur, computationi non folum inferviet, quòd bafis fecetur in ratione laterum, fed etiam quòd differentia factorum à lateribus & à fegmentis bafis æquetur quadrato lineæ bifecantis angulum.

Si de figuris in circulo infcriptis res eft, Theorema non rarò fubveniet, quòd Infcripti cujuflibet quadrilateri factus à diagoniis æquetur fummæ factorum à lateribus oppofitis.

Et hujufmodi plura inter exercendum obfervet Analyfta, & in penum fortè refervet; fed parciùs utatur, fi pari facilitate, aut non multo difficiliùs, poffit folutionem è fimplicioribus computandi principiis extruere. Quamobrem ad tria primò propofita tanquam notiora, fimpliciora, magis generalia, pauca, & omnibus tamen fufficientia animum præfertim advertat, & omnes difficultates ad ea præ cæteris reducere conetur.

Sed ut hujufmodi Theoremata ad folvenda Problemata accommodari poffint, *Schemata* plerumquè funt ultrà *conftruenda*, idque fæpiffimè producendo aliquas ex lineis donec fecent alias, aut fint affignatæ longitudinis; vel ab infigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel infigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam conftruendo, prout exigunt ftatus Problematis, & Theoremata quæ ad ejus folutionem adhibentur. Quemadmodum fi duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertiâ quâdam efficiant, producimus fortè, ut concurrentes conftituant triangulum, cujus anguli, & proinde laterum rationes, dantur. Vel fi quilibet angulus detur, aut fit alicui æqualis, in triangulum fæpè complemus fpecie datum, aut alicui fimile, idque vel producendo aliquas ex lineis in fchemate, vel fubtenfam aliter ducendo. Si triangulum fit obliquangulum, in duo rectangula fæpè refolvimus, demittendo perpendiculum. Si de figuris multilateris agatur, refolvimus in triangula, ducendo lineas diagonales: et fic in cæteris; ad hanc metam femper collimando, *ut fchema in triangula vel data, vel fimilia, vel rectangula, refolvatur.* Sic in exemplo propofito duco diagonium BD, ut Trapezium ABCD in duo triangula, ABD rectangulum, & BDC obliquangulum, refolvatur. Deinde refolvo triangulum obliquangulum in duo rectangula, demittendo perpendiculum à quolibet ejus



ejus angulo, B, C, vel D, in latus oppofitum: quemadmodum à B in CD, productam ad E, ut huic perpendiculo BE occurrat. Interea verò cùm anguli BAD & BCD duos rectos (per 22. 3. Elem.) perindè ac BCE & BCD conftituant; percipio angulos BAD & BCE æquales effe, adeoque triangula BCE ac DAB fimilia. Atque ita video computationem, affumendo AD, AB & BC tanquam fi CD quæreretur, ad hunc modum inftitui poffe; viz. AD & AB (propter tri. ABD rect.) dant BD. AD, AB, BD & BC, propter fim. tri. ABD & CEB, dant BE & CE. BD & BE, propter triang. BED rect. dant ED; & ED − EC dat CD. Unde continebitur æquatio inter valorem de CD fic inventum & literam pro eâ fuffectam. Poffumus etiam (& maximam partem fatiùs eft quàm opus in ferie continuatâ nimis profequi,) à diverfis principiis computationem incipere, aut faltem diverfis modis ad eandem quamlibet conclufionem promovere; ut duo tandem obtineantur ejufdem cujufvis quantitatis valores, qui æquales ponantur. Sic AD, AB & BC dant BD, BE & CE, ut priùs; deinde CD + CE dat ED; ac denique BD & ED, propter triang. rect. BED, dant BE. Poteft etiam computatio hâc lege optimè inftitui, ut valores quantitatum inveftigentur, quibus alia quæpiam relatio cognita intercedit, & illa deinde relatio æquationem dabit. Sic cùm relatio inter lineas BD, DC, BC & CE ex Prop. 12, lib. 2, Elem. conftet; nempe quòd fit $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$: Quæro BDq ex affumptis AD & AB; ac CE ex affumptis AD, AB & BC. Et, affumendo denique CD, facio $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$. Ad hos modos & hujufmodi confiliis ductus, de ferie Analyfeos, deque fchemate propter eam conftruendo, femper debes unà profpicere.

De Quæst. Geometr.

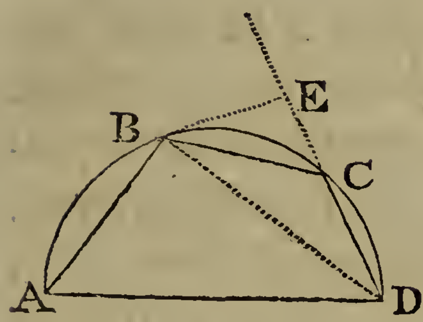
Ex his, credo, manifeftum eft, quid fibi velint Geometræ, cùm jubent, putes factum effe quod quæris. Nullo enim inter cognitas & incognitas quantitates habito difcrimine, quaflibet ad ineundum calculum affumere potes, quafi omnes ex præviâ folutione fuiffent notæ, & non ampliùs de folutione Problematis, fed de probatione folutionis ageretur. Sic in primo ex tribus jam defcriptis computandi modis, etfi fortè AD reverâ quæratur, fingo tamen CD quærendum effe, quafi vellem probare an valor ejus ab

AD

CaputXIII. AD derivatus quadret cum ejus quantitate prius cognitâ. Sic etiam in duobus posterioribus modis, pro metâ non propono quantitatem aliquam quærendam esse, sed æquationem è relationibus linearum utcunque eruendam: et in ejus rei gratiam assumo omnes, AD, AB, BC & CD, tanquam notas; perinde ac si, quæstione priùs solutâ, de tentamine jam ageretur, an conditionibus ejus hæ probè satisfaciant, quadrando cum quibuslibet æquationibus quas linearum relationes produnt. Opus quidem hâc ratione & consiliis primâ fronte aggressus sum; sed, cùm ad æquationem deventum est, sententiam muto, & quantitatem desideratam per istius æquationis reductionem & solutionem quæro. Sic denique plures quantitates tanquam cognitas sæpenumerò assumimus, quàm in statu quæstionis exprimuntur. Hujusque rei insignem in 55° sequentium problematum instantiam videre est, ubi a, b & c in æquatione $aa + bx + cxx = yy$, pro determinatione Sectionis Conicæ assumpsi, ut & alias etiam lineas r, s, t, v de quibus Problema, prout proponitur, nihil innuit. Nam quaslibet quantitates assumere licet, quarum ope possibile sit ad æquationes pervenire: hoc solum cavendo, ut ex illis tot æquationes obtineri possint, quot assumptæ sunt quantitates reverâ incognitæ.

Postquam de computandi methodo constat, & ornatur schema, quantitatibus, quæ computationem ingredientur (hoc est ex quibus assumptis aliarum valores derivandi sunt, donec tandem ad æquationem perveniatur) nomina impone; delegendo quæ problematis omnes conditiones involvunt, & operi præ cæteris accommodatæ videntur, & conclusionem, quantum possis conjicere, simpliciorem reddent, sed non plures tamen quàm proposito sufficiunt. Itaque pro quantitatibus, quæ ex aliarum vocabulis facilè deduci possint, propria vocabula vix tribuas. Sic ex totâ lineâ & ejus partibus, ex tribus lateribus trianguli rectanguli, & ex tribus vel quatuor proportionalibus, unum aliquod minimùm sine nomine permittere solemus; eo quòd valor ejus è reliquorum nominibus facilè derivari possit. Quemadmodum in exemplo jam allato, si dicam AD $= x$ & AB $= a$, ipsum BD nullâ literâ designo; quòd sit tertium latus trianguli rectanguli ABD, & proinde valeat $\sqrt{xx - aa}$. Dein si dicam BC $= b$, cùm triangula DAB & BCE sint similia, & inde lineæ AD, AB, BC, CE proportionales, quarum tribus, AD,

AB,



AB, & BC, impoſita ſunt nomina; ea propter quartam CE ſine nomine permitto, & ejus vice valorem $\frac{ab}{x}$, ex hâc proportionalitate detectum, uſurpo. Atque ita ſi DC vocetur c, ipſi DE nomen non aſſigno; quòd ex partibus ejus DC & CE, ſive c & $\frac{ab}{x}$, valor $c + \frac{ab}{x}$ prodeat. De Quæst. Geometr.

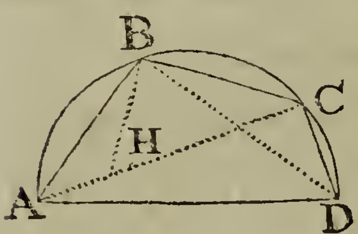
Cæterùm dum de his moneo, Problema ad æquationem penè redactum eſt. Nam poſtquam literæ pro ſpeciebus principalium linearum præſcriptæ ſunt, nihil aliud agendum reſtat, quàm ut ex iſtis ſpeciebus valores aliarum linearum, juxta methodum præconceptam, eruantur, donec modo quovis proviſo in æquationem coeant. Et in hoc caſu nihil reſtare video, niſi ut per triangula rectangula BCE & BDE dupliciter eliciam BE. Nempe eſt $BCq - CEq$ (ſive $bb - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$, ut & $BDq - DEq$) ſive $xx - aa - cc - \frac{2abc}{x} - \frac{aabb}{xx}$) $= BEq$. Et hinc, utrobique deleto $\frac{aabb}{xx}$, æquationem habebo $bb = xx - aa - cc - \frac{2abc}{x}$: quæ reducta ſit

$$x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bb \\ + cc \end{matrix} x + 2abc.$$

Cùm verò de ſolutione Problematis hujus plures modos, etſi non multum diſſimiles, in præcedentibus recenſuerim, quorum iſte, de Prop. 12, Lib. 2, Elem. deſumptus, ſit cæteris quodammodo concinnior; eundem placet etiam ſubjungere. Sit itaque $AD = x$, $AB = a$, $BC = b$, & $CD = c$, eritque $BDq = xx - aa$, & $CE = \frac{ab}{x}$, ut priùs. Hiſce dein ſpeciebus in Theorema $BDq - BCq - CDq = 2CD \times CE$ ſubſtitutis, orietur $xx - aa - bb - cc = \frac{2abc}{x}$; & factâ reductione, $x^3 = \begin{matrix} + aa \\ + bb \\ + cc \end{matrix} x + 2abc$; ut antè.

Sed ut pateat quanta ſit in ſolutionum inventione varietas, & proinde quòd in eas incidere prudenti Geometræ non ſit admodum difficile: viſum fuit plures adhuc modos hoc idem perficiendi docere. Atque equidem, ducto diagonio BD, ſi, vice perpendiculi BE à puncto B in latus DC ſuprà demiſſi, demittatur per-

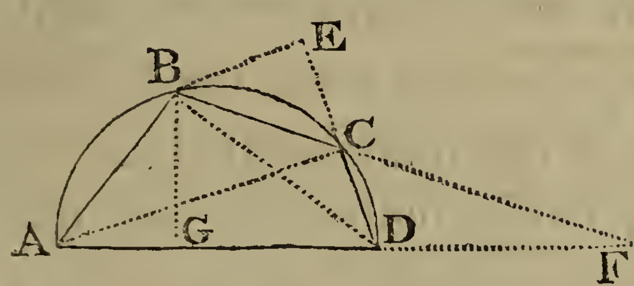
CAPUT XIII. pendiculum à puncto D in latus BC, vel à puncto C in latus BD, quo obliquangulum triangulum BCD in duo rectangula utcunque resolvatur, iisdem fermè, quas jam descripsi, methodis ad æquationem pervenire licet. Sunt & alii modi ab istis satis differentes. Quemadmodum si diagonii duo AC & BD ducantur, dabitur BD ex assumptis AD & AB; ut & AC ex assumptis AD & CD; deinde, per notum Theorema de figuris quadrilateris in circulo inscriptis, nempe quòd sit $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$ obtinebitur æquatio. Stantibus itaque linearum AD, AB, BC, CD vocabulis x, a, b, c; erit $BD = \sqrt{xx - aa}$, & $AC = \sqrt{xx - cc}$ per 47. 1. Elem. Et his linearum speciebus in Theorema jam recensitum substitutis, exibit $xb + ac = \sqrt{xx - cc} \times \sqrt{xx - aa}$. Cujus æquationis partibus denique quadratis & reductis, obtinebitur



$$\text{iterum } x^3 = \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix}\, x + 2abc.$$

Cæterùm ut pateat etiam quo pacto solutiones, ex isto Theoremate petitæ, possint inde ad solas triangulorum similitudines redigi; erigatur BH ipsi BC perpendicularis & occurrens AC in H, & fient triangula BCH, BDA similia, propter angulos ad B rectos, & ad C ac D (per 21. 3. Elem.) æquales; ut & triangula BCD, BHA similia, propter æquales angulos tum ad B (ut pateat demendo communem angulum DBH à duobus rectis,) tum ad D ac A (per 21. 3. Elem.) Videre est itaque, quòd ex proportionalitate, BD. AD : : BC. HC, detur HC; ut & AH ex proportionalitate BD. CD : : AB. AH. Unde cùm sit AH + AC = AC, habebitur æquatio. Stantibus ergo præfatis linearum vocabulis x, a, b, c, nec non ipsarum AC & BD valoribus, $\sqrt{xx - cc}$, & $\sqrt{xx - aa}$; prima proportionalitas dabit $HC = \frac{bx}{\sqrt{xx - aa}}$; & secunda dabit $AH = \frac{ac}{\sqrt{xx - aa}}$. Unde propter $AA + HC = AC$ erit $\frac{bx + ac}{\sqrt{xx - aa}} = \sqrt{xx - cc}$; æquatio quæ, multiplicando per $\sqrt{xx - aa}$, & quadrando, reducetur ad formam in præcedentibus sæpiùs descriptam.

Adhæc ut magis pateat quanta sit solvendi copia; producantur BC & AD donec conveniant in F, & fient triangula ABF & CDF similia,



ſimilia, quippe quorum angulus ad F communis eſt, & anguli ABF & CDF (dum complent ang. CDA ad duos rectos per 13. 1 & 22. 3. Elem.) æquales. Quamobrem, ſi præter quatuor terminos de quibus inſtituitur quæſtio, daretur AF, proportio, AB. AF : : CD. CF, daret CF. Item AF − AD daret DF; & proportio, CD. DF : : AB. BF, daret BF; unde, cùm ſit BF − CF = BC, emergeret æquatio. Sed cùm duæ quantitates incognitæ, AD ac DF, tanquam datæ aſſumantur, reſtat alia æquatio invenienda. Demitto ergo BG in AF ad rectos angulos, & proportio, AD. AB : : AB. AG, dabit AG; quo habito, Theorema è 13. 2. Elem. petitum, nempe quòd ſit $BFq + 2FAG = ABq + AFq$, dabit æquationem alteram. Stantibus ergo a, b, c, x ut priùs, & dicto $AF = y$: erit, inſiſtendo veſtigiis Theoriæ jam excogitatæ, $\frac{cy}{a} = CF$. $y - x = DF$. $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} = BF$. Indeque $\frac{\overline{y-x} \times a}{c} - \frac{cy}{a} = b$, æquatio prima. Erit etiam $\frac{aa}{x} = AG$, adeoque $\frac{aayy - 2aaxy + aaxx}{cc} + \frac{2aay}{x} = aa + yy$, æquatio ſecunda. Quæ duæ, per reductionem, dabunt æquationem deſideratam. Nempe valor ipſius y, per æquationem priorem, inventus eſt $\frac{abc + aax}{aa - cc}$; qui in ſecundam ſubſtitutus, dabit æquationem ex quâ rectè diſpoſitâ fiet

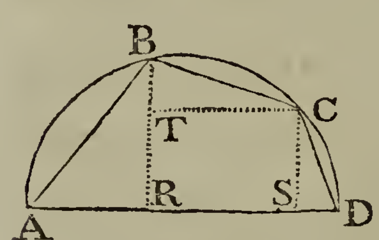
$$x^3 = \begin{array}{l} +aa \\ +bb \\ +cc \end{array} x + 2abc, \text{ ut antè.}$$

Atque ita ſi AB ac DC producantur donec ſibi mutuò occurrant, ſolutio haud aliter ſe habebit, niſi fortè futura ſit paulò facilior. Quare aliud hujus rei ſpecimen, è fonte multum diſſimili petitum, potiùs ſubjungam, quærendo nempe aream quadrilateri propoſiti, idque dupliciter. Duco igitur diagonium BD, ut in duo triangula quadrilaterum reſolvatur. Dein, uſurpatis linearum vocabulis x, a, b, c ut antè, invenio $BD = \sqrt{xx - aa}$; indeque $\frac{1}{2}a\sqrt{xx - aa}$ ($= \frac{1}{2}AB \times BD$) aream trianguli ABD. Porro, demiſſo BE perpendiculariter in CD, erit (propter ſimilia triangula ABD, BCE) AD. BD : : BC. BE, & proinde $BE = \frac{b}{x}\sqrt{xx - aa}$. Quare

 etiam

CAPUT XIII. etiam $\frac{bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ ($=\frac{1}{2}$ CD × BE) erit area trianguli BCD. Hasce jam areas addendo, orietur $\frac{ax+bc}{2x}\sqrt{xx-aa}$ area totius quadrilateri. Non secùs, ducendo diagonium AC, & quærendo areas triangulorum ACD & ACB, easque addendo, rursus obtinebitur area quadrilateri $\frac{cx+ba}{2x}\sqrt{xx-cc}$. Quare, ponendo hasce areas æquales & utrasque multiplicando per $2x$, habebitur $\overline{ax+bc}\sqrt{xx-aa} = \overline{cx+ba}\times\sqrt{xx-cc}$; æquatio quæ, quadrando ac dividendo per $aax-ccx$, redigetur ad formam sæpiùs inventam $x^3 = \begin{matrix}+aa\\+bb\\+cc\end{matrix}\, x + 2abc$.

Ex his constare potest quanta sit solvendi copia; & obiter quòd alii modi sint aliis multo concinniores. Quapropter si in primas de solutione Problematis alicujus cogitationes modus computationi malè accommodatus inciderit, relationes linearum iterùm evolvendæ sunt, donec modum quàm poteris idoneum & elegantem machinatus fueris. Nam quæ leviori curæ se offerunt laborem satis molestum plerumque parient, si ad opus adhibeantur. Sic in Problemate de quo agitur, nil difficilius foret in sequentem modum quàm in aliquem è præcedentibus incidere.



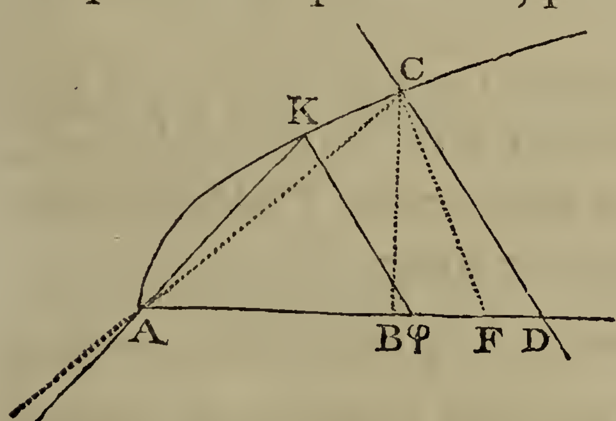
Demissis nempe BR & CS ad AD nomalibus, ut & CT ad BR, figura resolvetur in triangula rectangula. Et videre est, quòd AD & AB dant AR; AD & CD dant SD; AD − AR − SD dat RS, vel TC. Item AB & AR dant BR; CD & SD dant CS, vel TR; & BR − TR dat BT. Denique BT ac TC dant BC, unde obtinebitur æquatio. Siquis autem hoc modo computationem aggressus fuerit, is in terminos Algebraicos profusiores, quàm sunt ulli præcedentium, incidet, & ad finalem æquationem ægriùs reducibiles.

Et hæc de solutione problematum in rectilineâ Geometriâ; nisi fortè operæ pretium fuerit annotâsse præterea, quòd cùm anguli, sive positiones linearum per angulos expressæ, statum quæstionis ingrediuntur, angulorum vice debent adhiberi lineæ aut linearum proportiones; tales nempe quæ ab angulis datis possunt, per calculum Trigonometricum, derivari; aut à quibus inventis anguli quæsiti, per eundem calculum, prodeunt; hoc est, quæ se

mutuò

mutuò determinant: cujus rei plures inſtantias videre eſt in ſequentibus.

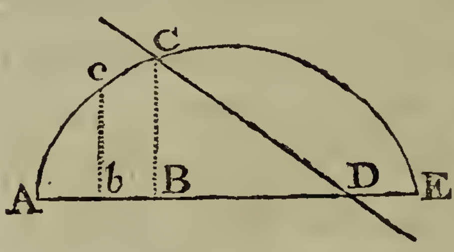
Quod ad Geometriam circa lineas curvas attinet, illæ deſignari ſolent vel deſcribendo eas per motum localem rectarum, vel adhibendo æquationes indefinitè exprimentes relationem rectarum certâ aliquâ lege diſpoſitarum, & ad curvas deſinentium. Idem fecerunt Veteres per ſectiones Solidorum, ſed minùs commodè. Computationes verò, quæ curvas primo modo deſcriptas reſpiciunt, haud ſecùs quàm in præcedentibus peraguntur. Quemadmodum ſi AKC ſit curva linea deſcripta per K, verticale punctum normæ AKϕ, cujus unum crus, AK, per punctum A, poſitione datum, liberè dilabitur, dum alterum, Kϕ, datæ longitudinis, ſuper rectam AD poſitione datam promovetur; & quæratur punctum C, in quo recta quævis CD, poſitione data, hanc curvam ſecabit: duco



rectas ACF, quæ normam in poſitione quæſitâ referant, & relatione linearum (ſine aliquo dati & quæſiti diſcrimine aut reſpectu ad curvam) conſideratâ, percipio dependentiam cæterarum à CF, et quâlibet harum quatuor BC, BF, AF & AC, Syntheticam eſſe; quarum duas itaque, ut CF $= a$ & CB $= x$, aſſumo; & inde computum ordiendo ſtatim lucratus ſum BF $= \sqrt{aa - xx}$, & AB $= \frac{xx}{\sqrt{aa - xx}}$; propter ang. rectum CBF, lineaſque BF, BC, BC, AB continuè proportionales. Porro ex datâ poſitione CD, datur AD; quam itaque dico b; datur etiam ratio BC ad BD, quam pono d ad e; & fit BD $= \frac{ex}{d}$, & AB $= b - \frac{ex}{d}$. Eſt ergo $b - \frac{ex}{d} = \frac{xx}{\sqrt{xx - aa}}$; æquatio quæ, quadrando partes & multiplicando per $aa - xx$ &c. reducetur ad hanc formam $x^4 = \frac{2bdex^3 \begin{smallmatrix} -bbdd \\ +aaee \end{smallmatrix} xx - 2aabdex + aabbdd}{dd + ee}$; unde demum, è datis a, b, d & e, erui debet x, per regulas poſt tradendas; & intervallo iſto x, ſive BC, acta ipſi AD parallela recta ſecabit CD in quæſito puncto C.

Quòd ſi non deſcriptiones Geometricæ, ſed æquationes, pro curvis lineis deſignandis adhibeantur, computationes eo pacto faciliores & breviores evadent, in quantum ejuſmodi æquationes ipſis lucro

Caput XIII. lucro cedunt. Quemadmodum si datæ Ellipseos, ACE, intersectio C cum rectâ CD positione datâ quæratur; pro Ellipsi designandâ sumo notam aliquam æquationem ei propriam, ut $rx - \frac{r}{q}xx = yy$, ubi x indefinitè ponitur pro quâlibet axis parte Ab vel AB, & y pro perpendiculo bc, vel BC, ad curvam terminato; r vero & q dantur ex datâ specie Ellipsis. Cùm itaque CD positione detur, dabitur & AD, quam dic a, & erit BD $a - x$; dabitur etiam angulus ADC, & inde ratio BD ad BC, quam dic 1 ad e; & erit BC $(y) = ea - ex$; cujus quadratum $eeaa - 2eeax + eexx$ æquabitur $rx - \frac{r}{q}xx$. Indeque, per reductionem, orietur $xx = \frac{2aeex + rx - aaee}{ee + \frac{r}{q}}$, seu $x = \frac{aee + \frac{1}{2}r \pm e\sqrt{ar + \frac{rr}{4ee} - \frac{aar}{q}}}{ee + \frac{r}{q}}$.



Quinetiam etsi Curva per descriptionem Geometricam, vel per sectionem solidi, designetur, potest tamen inde æquatio obtineri, quæ naturam Curvæ definiet, adeoque huc omnes Problematum, quæ circa eam proponuntur, difficultates reduci.

Sic in exemplo priori, si AB dicatur x, & BC, y, tertia proportionalis BF erit $\frac{yy}{x}$; cujus quadratum unà cum quadrato BC æquatur CFq, hoc est $\frac{y^4}{xx} + yy = aa$; sive $y^4 + xxyy = aaxx$. Estque hæc æquatio, quâ Curvæ AKC unumquodque punctum C unicuique basis longitudini AB congruens, adeoque ipsa Curva, definitur; & è quâ proinde solutiones Problematum, quæ de hâc curvâ proponuntur, petere liceat.

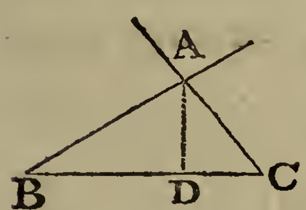
Ad eundem ferè modum, cùm curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possis pro arbitrio æquationem fingere, quæ naturam ejus generaliter contineat; & hanc pro eâ designandâ, tanquam si daretur, assumere; ut ex ejus assumptione quomodocunque preveniatur ad æquationes, ex quibus assumpta tandem determinentur: Cujus rei exempla habes in nonnullis sequentium problematum, quæ, in pleniorem illustrationem hujus doctrinæ & exercitium discentium, congessi, quæque jam pergo tradere.

CAPUT

CAPUT DECIMUM QUARTUM.

PROB. I.

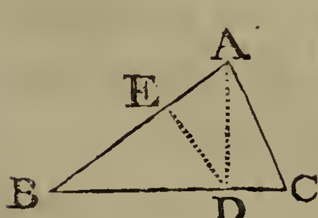
Datâ rectâ terminatâ, BC, *a cujus extremitatibus duæ rectæ,* BA, CA, *ducuntur in datis angulis,* ABC, ACB*: Invenire* AD *altitudinem concursûs* A *supra datam* BC.



SIT $BC = a$, & $AD = y$; & cùm angulus ABD detur, dabitur, ex tabulâ sinuum vel tangentium, ratio inter lineas AD & BD, quam pone ut d ad e. Est ergo $d.e::AD\ (y)\ BD$. Quare $BD = \frac{ey}{d}$. Similiter, propter datum angulum ACD, dabitur ratio inter AD ac DC, quam pone ut d ad f, & erit $DC = \frac{fy}{d}$. At $BD + DC = BC$, hoc est $\frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$. Quæ reducta, multiplicando utramque partem æquationis per d, ac dividendo per $e + f$, evadit $y = \frac{ad}{e+f}$.

PROB. II.

Cujuslibet Trianguli, ABC, *datis lateribus,* AB, AC, *&* *Basi,* BC, *quam perpendiculum,* AD, *ab angulo verticali, secat in* D : *Invenire segmenta* BD *ac* DC.



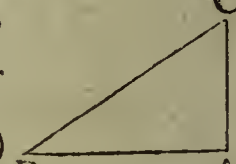
SIT $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, & $BD = x$, eritque $DC = c - x$. Jam cùm $ABq - BDq\ (aa - xx) = ADq$; & $ACq - DCq\ (bb - cc + 2cx - xx) = ADq$: Erit $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$; quæ per reductionem fit $\frac{aa - bb + cc}{2c} = x$.

Cæterùm ut pateat omnes omnium Problematum difficultates, per solam linearum proportionalitatem, sine adminiculo Prop. 47. primi Elementorum, licet non absque circuitu, enodari posse; placuit sequentem hujus solutionem, ex abundanti, subjungere. A puncto D in latus AB demitte DE normalem, &, stantibus jam

CAPUT XIV. positis linearum nominibus, erit AB . BD :: BD . BE. $a . x :: x . \frac{xx}{a}$. Et BA − BE $(a - \frac{xx}{a})$ = EA. Nec non EA . AD :: AD . AB, adeoque EA × AB $(aa - xx)$ = ADq. Et sic ratiocinando circa triangulum ACD, invenietur iterùm AD$q = bb - cc + 2cx - xx$. Unde obtinebitur, ut antè, $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$.

PROB. III.

Trianguli rectanguli, ABC, *perimetro & areâ datis, invenire hypotenusam* BC.



ESTO perimeter a, area bb, BC $= x$, & AC $= y$; eritque AB $= \sqrt{xx - yy}$; unde rursus perimeter (BC + AC + AB) est $x + y + \sqrt{xx - yy}$, & area ($\frac{1}{2}$ AC × AB) est $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy}$. Adeoque $x + y + \sqrt{xx - yy} = a$, & $\frac{1}{2}y\sqrt{xx - yy} = bb$.

Harum æquationum posterior dat $\sqrt{xx - yy} = \frac{2bb}{y}$; quare scribo $\sqrt{\frac{2bb}{y}}$ pro $\sqrt{xx - yy}$ in æquatione priori, ut assymmetria tollatur; & prodit $x + y + \frac{2bb}{y} = a$; sive multiplicando per y, & ordinando, $yy = ay - xy - 2bb$. Porro ex partibus æquationis prioris aufero $x + y$, & restat $\sqrt{xx - yy} = a - x - y$, cujus partes quadrando, ut assymmetria rursus tollatur, prodit $xx - yy = aa - 2ax - 2ay + xx + 2xy + yy$, quæ in ordinem redacta & per 2 divisa sit $yy = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$. Denique ponendo æqualitatem inter duos valores ipsius yy, habeo $ay - xy - 2bb = ay - xy + ax - \frac{1}{2}aa$, quæ reducta sit $\frac{1}{2}a - \frac{2bb}{a} = x$.

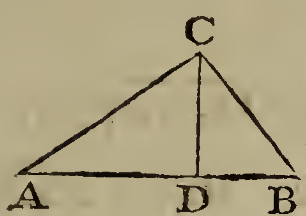
Idem aliter.

Esto $\frac{1}{2}$ perimeter $= a$, area $= bb$, & BC $= x$, eritque AC + AB $= 2a - x$. Jam cùm sit xx (BCq) = ACq + ABq, & $4bb$ = 2 AC × AB, erit $xx + 4bb$ = ACq + ABq + 2 AC × AB = quadrato ex AC + AB = quadrato ex $2a - x = 4aa - 4ax + xx$. Hoc est $xx + 4bb = 4aa - 4ax + xx$; quæ reducta sit $a - \frac{bb}{a} = x$.

PROB. IV.

Problemata Geometrica.

Dato trianguli rectanguli perimetro & perpendiculo, invenire triangulum.



TRianguli ABC sit C rectus angulus, & CD perpendiculum inde ad basem AB demissum. Detur $AB+BC+AC=a$, & $CD=b$. Pone basem $AB=x$, & erit laterum summa $a-x$. Pone laterum differentiam y, & erit majus latus $AC=\frac{a-x+y}{2}$; minus $BC=\frac{a-x-y}{2}$. Jam ex naturâ trianguli rectanguli est $ACq+BCq=ABq$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx+yy}{2}=xx$. Est & $AB.AC::BC.DC$, adeoque $AB\times DC=AC\times BC$, hoc est $bx=\frac{aa-2ax+xx-yy}{4}$. Per priorem æquationem est $yy=xx+2ax-aa$. Per posteriorem $yy=xx-2ax+aa-4bx$. Adeoque $xx+2ax-aa=xx-2ax+aa-4bx$. Et per reductionem $4ax+4bx=2aa$, sive $x=\frac{aa}{2a+2b}$.

Geometricè sic. In omni triangulo rectangulo, ut est summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita dimidium perimetri ad basem.

Aufer $2x$ de a, & restabit $\frac{ab}{a+b}$ excessus laterum super basem. Unde rursus, Ut in omni triangulo rectangulo summa perimetri & perpendiculi ad perimetrum, ita perpendiculum ad excessum laterum super basem.

PROB. V.

Datis trianguli rectanguli basi, AB, *& summâ perpendiculi & laterum,* $CA+CB+CD$, *invenire triangulum.*

ESTO $CA+CB+CD=a$, $AB=b$, $CD=x$, & erit $AC+CB=a-x$. Pone $AC-CB=y$, & erit $AC=\frac{a-x+y}{2}$, & $CB=\frac{a-x-y}{2}$. Est autem $ACq+CBq=ABq$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx+yy}{2}=bb$. Est & $AC\times CB=AB\times CD$, hoc est $\frac{aa-2ax+xx-yy}{4}=bx$. Quibus comparatis, fit $2bb-aa+2ax-xx=yy=aa-2ax+xx-4bx$. Et, per reductionem, $xx=2ax+2bx-aa+bb$, & $x=a+b-\sqrt{2ab+2bb}$.

 Geometricè

 Geometricè sic. In omni triangulo rectangulo de summâ perimetri & perpendiculi aufer mediam proportionalem inter eandem summam & duplum basis, & restabit perpendiculum.

Idem aliter.

Sit CA+CB+CD$=a$, AB$=b$, & AC$=x$, & erit BC$=\sqrt{bb-xx}$; CD$=\frac{x\sqrt{bb-xx}}{b}$. Et $x+$CB$+$CD$=a$, sive CB$+$CD$=a-x$, atque adeo $\frac{b+x}{b}\sqrt{bb-xx}=a-x$. Et, quadratis partibus atque multiplicatis per bb, fiet $-x^4-2bx^3+2b^3x+b^4=aabb-2abbx+bbxx$. Quâ æquatione per transpositionem partium ad hunc modum ordinatâ, $x^4+2bx^3 \begin{smallmatrix}+3bb\\+2ab\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+2abb\\+2b^3\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+b^4\\+2ab^3\\+aabb\end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix}+2ab\\2bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+4abb\\+4b^3\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+2ab^3\\+2b^4\end{smallmatrix}$, & extractâ utrobique radice, orietur $xx+bx+bb+ab=\overline{x+b}\sqrt{2ab+2bb}$. Et extractâ iterum radice $x=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}\pm\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{4}bb-\frac{1}{2}ab}$.

Constructio Geometrica.

Cape igitur AB$=\frac{1}{2}b$, BC$=\frac{1}{2}a$, CD$=\frac{1}{2}$AB, AE mediam proportionalem inter b & AC, & EF hinc inde mediam proportionalem inter b & DE, & erunt BF, BF duo latera trianguli.

PROB. VI.

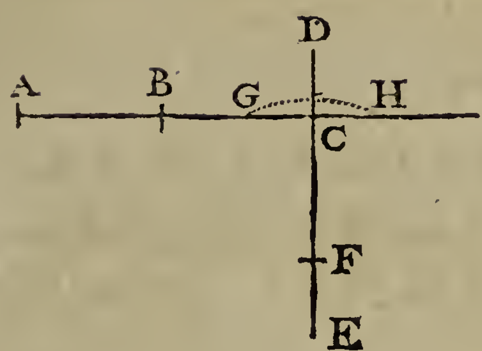
Datis in triangulo rectangulo, ABC, *summâ laterum,* AC+BC, *&* *perpendiculo* CD, *invenire triangulum. (Vide fig.* Prob. VII.)

SIT AC$+$BC$=a$, CD$=b$, AC$=x$, & erit BC$=a-x$, AB$=\sqrt{aa-2ax+2xx}$. Est & CD.AC::BC.AB. Ergo rursus AB$=\frac{ax-xx}{b}$. Quare $ax-xx=b\sqrt{aa-2ax+2xx}$; & partibus quadratis & ordinatis, $x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx+2abbx-aabb=0$. Adde ad utramque partem $aabb+b^4$, & fiet $x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2bb\end{smallmatrix} xx+2abbx+b^4=aabb+b^4$. Et, extractâ utrobique radice, $xx-ax-bb=-b\times\sqrt{aa+bb}$; &, radice iterum extractâ, $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb-b\sqrt{aa+bb}}$.

Constructio

Constructio Geometrica.

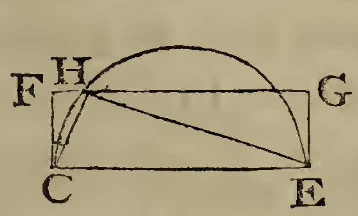
Problemata Geometrica.



Cape AB = BC = $\frac{1}{2}a$. Ad C erige perpendiculum CD $= b$. Produc DC ad E ut sit DE = DA. Et inter CD & CE cape medium proportionale CF. Centroque F, radio BC descriptus circulus GH secet rectam BC in G & H, & erunt BG & BH latera duo trianguli.

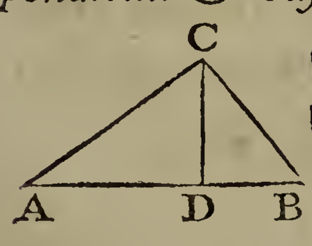
Idem aliter.

Sit AC+BC$=a$, AC − BC $=y$, AB $=x$, ac DC $=b$, & erit $\frac{a+y}{2}$ = AC; $\frac{a-y}{2}$ = BC; $\frac{aa+yy}{2}$ = ACq + BCq = ABq $= xx$. $\frac{aa-yy}{4b} = \frac{AC \times BC}{DC}$ = AB $= x$. Ergo $2xx - aa = yy = aa - 4bx$, & $xx = aa - 2bx$; &, extractâ radice, $x = -b + \sqrt{bb+aa}$. Unde in superiori constructione est CE Hypotenusa trianguli quæsiti. Datâ autem basi & perpendiculo, tam in hoc quàm in superiore Problemate, triangulum sic expeditè construitur. Fac parallelogrammum, CG, cujus latus, CE, erit basis trianguli, latus alterum, CF, perpendiculum. Et super CE describe semicirculum secantem latus oppositum, FG, in H. Age CH, EH, & erit CHE triangulum quæsitum.



PROB. VII.

In triangulo rectangulo, datis summâ laterum, & summâ perpendiculi & basis, invenire triangulum.



SIT laterum AC & BC summa a; basis AB & perpendiculi CD summa b; latus AC $= x$; basis AB $= y$; & erit BC $= a - x$; CD $= b - y$; $aa - 2ax + 2xx$ = ACq + BCq = ABq $= yy$; $ax - xx$ = AC × BC = AB × CD $= by - yy = by - aa + 2ax - 2xx$; & $by = aa - ax + xx$. Hujus quadratum $a^4 - 2a^3x + 3aaxx - 2ax^3 + x^4$, pone æquale yy in bb, hoc est æquale $aabb - 2abbx + 2bbxx$. Et, ordinatâ æquatione, fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix}+3aa\\-2bb\end{matrix} xx \begin{matrix}-2a^3\\+2abb\end{matrix} x \begin{matrix}+a^4\\-aabb\end{matrix} = 0$. Ad utramque partem æquationis adde $b^4 - aabb$, & fiet $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix}+3aa\\-2bb\end{matrix} xx \begin{matrix}-2a^3\\+2abb\end{matrix} x \begin{matrix}+a^4\\-2aabb\\+b^4\end{matrix} =$

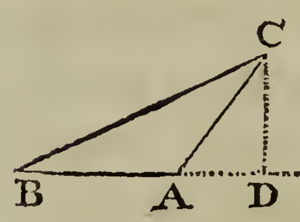
CAPUT XIV. $b^4 - aabb$. Et, extractâ utrobique radice, $xx - ax + aa - bb = -b\sqrt{bb - aa}$; &, radice iterum extractâ, $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{bb - \frac{3}{4}aa - b\sqrt{bb - aa}}$.

Constructio Geometrica.

Cape R mediam proportionalem inter $b + a$ & $b - a$; & S mediam proportionalem inter R & $b - \text{R}$; & T mediam proportionalem inter $\frac{1}{2}a + \text{S}$ & $\frac{1}{2}a - \text{S}$; & erunt $\frac{1}{2}a + \text{T}$ & $\frac{1}{2}a - \text{T}$, latera trianguli.

PROB. VIII.

Trianguli cujuscunque, ABC, *datis areâ, perimetro, & uno angulorum,* A, *cætera determinare.*



ESTO perimeter $= a$, & area $= bb$, & ab ignotorum angulorum alterutro, C, ad latus oppositum AB demitte perpendiculum CD; & propter angulum A datum, erit AC ad CD in datâ ratione, puta d ad e. Dic ergo $\text{AC} = x$, & erit $\text{CD} = \frac{ex}{d}$; per quam divide dupiam aream, & prodibit $\frac{2bbd}{ex} = \text{AB}$. Adde AD (nempe $\sqrt{\text{AC}q - \text{CD}q}$, sive $\frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$) & emerget $\text{BD} = \frac{2bbd}{ex} + \frac{x}{d}\sqrt{dd - ee}$; cujus quadrato adde CD$q$, & orietur $\frac{4b^4dd}{eexx} + xx + \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee} = \text{BC}q$. Adhæc à perimetro aufer AC & AB, & restabit $a - x - \frac{2bbd}{ex} = \text{BC}$; cujus quadratum $aa - 2ax + xx - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e} + \frac{4b^4dd}{eexx}$ pone æquale quadrato prius invento; &, neglectis æquipollentibus, erit $\frac{4bb}{e}\sqrt{dd - ee} = aa - 2ax - \frac{4abbd}{ex} + \frac{4bbd}{e}$. Et hæc, assumendo $4af$ pro datis terminis $aa + \frac{4bbd}{e} - \frac{4bb}{e} \times \sqrt{dd - ee}$, & reducendo, evadit $xx = 2fx - \frac{2bbd}{e}$, sive $x = f \pm \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$.

Eadem æquatio prodiisset etiam quærendo crus AB; nam crura AB & AC similiter se habent ad omnes conditiones problematis. Quare si AC ponatur $f - \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, erit $\text{AB} = f + \sqrt{ff - \frac{2bbd}{e}}$, & vicissim; atque horum summa $2f$ subducta de perimetro relinquit tertium latus $\text{BC} = a - 2f$.

PROB.

PROB. IX.

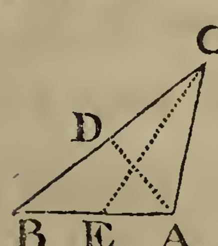
Datis altitudine, basi, & summâ laterum invenire triangulum.

SIT altitudo CD $= a$, basis AB dimidium $= b$, laterum semisumma $= c$, & semidifferentia $= z$; eritque majus latus, puta BC $= c + z$, & minus AC $= c - z$. Subduc CDq de BCq & ACq, & exibit hinc BD $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$, & inde AD $= \sqrt{cc - 2cz + zz - aa}$. Subduc etiam AB de BD, & exibit iterum AD $= \sqrt{cc + 2cz + zz - aa} - 2b$. Quadratis jam valoribus AD, & ordinatis terminis, orietur $bb + cz = b\sqrt{cc + 2cz + zz - aa}$. Rursusque quadrando & redigendo in ordinem, obtinebitur $cczz - bbzz = bbcc - bbaa - b^4$. Et $z = b\sqrt{1 - \frac{aa}{cc - bb}}$. Unde dantur latera.

PROB. X.

Datis basi, AB, *summâ laterum,* AC + BC, *& angulo verticali* C, *determinare latera.*

SIT basis $= a$, semisumma laterum $= b$, & semidifferentia $= x$, eritque majus latus BC $= b + x$, & minus AC $= b - x$.



Ab alterutro ignotorum angulorum A ad latus oppositum BC demitte perpendiculum AD; &, propter angulum C datum, dabitur ratio AC ad CD, puta d ad e, & proinde erit CD $= \frac{eb - ex}{d}$. Est etiam, per 13. II. Elementorum, $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC}$, hoc est $\frac{2bb + 2xx - aa}{2b + 2x}$, $=$ CD; adeoque habetur æquatio inter valores CD. Et hæc reducta fit $x = \sqrt{\frac{daa + 2ebb - 2dbb}{2d + 2e}}$. Unde dantur latera.

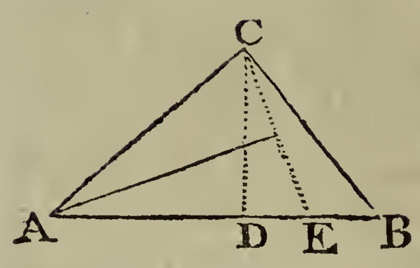
Si anguli ad basin quærerentur, conclusio foret concinnior; utpote ducatur EC datum angulum bisecans & basi occurrens in E; & erit AB. AC + BC (: : AE. AC) : : sin. ang. ACE. sin. ang. AEC. Et ab angulo AEC, ejusque complemento BEC, si subducatur dimidium anguli C, relinquentur anguli ABC, & BAC.

PROB.

Caput XIV.

PROB. XI.

Datis Trianguli lateribus invenire angulos.



Dentur latera AB $= a$, AC $= b$, BC $= c$, quæratur angulus A. Demisso ad AB perpendiculo CD, quod angulo isti opponitur, erit imprimis $bb - cc =$ AC$q -$ BC$q =$ ADq $-$ BD$q = \overline{AD + BD} \times \overline{AD - BD} = AB \times \overline{2AD - AB} =$ $2AD \times a - aa$. Adeoque $\frac{1}{2}a + \frac{bb - cc}{2a} =$ AD. Unde prodit hocce *primum Theorema.*

I. Ut AB, ad AC + BC, ita AC $-$ BC, ad quartam proportionalem N. $\frac{AB + N}{2} =$ AD. Ut AC ad AD, ia radius ad Cosinum anguli A.

Adhæc DC$q =$ AC$q -$ AD$q = \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}{4aa} =$ $\frac{\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}}{4aa}$. Unde, multiplicatis numeratoris & denominatoris radicibus per b, conflatur hocce *Theorema secundum.*

II. Ut $2ab$ ad medium proportionale inter $\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c}$, & $\overline{a-b+c} \times \overline{-a+b+c}$, ita radius ad sinum anguli A.

Insuper in AB cape AE = AC, & age CE, & erit angulus ECD æqualis dimidio anguli A. Aufer AD de AE, & restabit DE$=b-\frac{1}{2}a$ $- \frac{bb - cc}{2a} = \frac{cc - aa + 2ab - bb}{2a} = \frac{\overline{c + a - b} \times \overline{c - a + b}}{2a}$. Unde DE$q =$ $\frac{\overline{c+a-b} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b} \times \overline{c-a+b}}{4aa}$. Et hinc consit *Theorema tertium quartumque*, viz.

III. Ut $2ab$ ad $\overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$ (ita AC ad DE) ita radius ad sinum versum anguli A

IV. Et, ut medium proportionale inter $a + b + c$, & $a + b - c$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$ (ita CD ad DE) ita radius ad tangentem dimidii anguli A, vel dimidii cotangens ad radium.

Præterea est CE$q =$ CD$q +$ DE$q = \frac{2abb + bcc - baa - b^3}{a} = \frac{b}{a} \times \overline{c+a-b} \times \overline{c-a+b}$. Unde *Theorema quintum & sextum.*

V. Ut

V. Ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $c+a-b$, & $c-a+b$, vel ut I ad medi. proportionale inter $\frac{c+a-b}{2a}$, & $\frac{c-a+b}{2b}$ (ita AC ad $\frac{1}{2}$CE vel CE ad DE) ita radius ad ſinum dimidii anguli A.

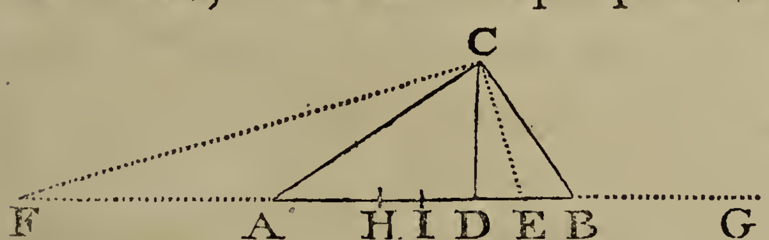
VI. Et ut medium proportionale inter $2a$ & $2b$ ad medium proportionale inter $a+b+c$, & $a+b-c$ (ita CE ad CD) ita radius ad coſinum dimidii anguli A.

Si præter angulos deſideretur etiam area trianguli, duc CDq in $\frac{1}{4}$ABq, & radix *viz.* $\frac{1}{4}\sqrt{\overline{a+b+c}\times\overline{a+b-c}\times\overline{a-b+c}\times\overline{-a+b+c}}$, erit area illa quæſita.

PROB. XII.

Trianguli cujuſvis rectilinei datis lateribus & baſi, invenire ſegmenta baſis, perpendiculum, aream & angulos.

TRianguli ABC dentur latera AC, BC & baſis AB. Biſeca AB in I, & in eâ utrinque productâ cape AF & AE æquales AC, atque BG & BH æquales BC. Junge CE, CF; & à C ad baſem demitte perpendiculum CD. Et erit ACq − BCq $=$ ADq + CDq − CDq − BDq $=$ ADq − BDq $=$ $\overline{\text{AD}+\text{BD}}\times\overline{\text{AD}-\text{BD}}$ $=$ AB $\times$ 2DI.



Ergo $\frac{\text{AC}q-\text{BC}q}{2\text{AB}}=$ DI. Et 2AB. AC + BC : : AC − BC. DI. Quod eſt Theorema pro determinandis ſegmentis baſis.

De IE, hoc eſt de AC − $\frac{1}{2}$AB, aufer DI, & reſtabit DE $=$ $\frac{\text{BC}q-\text{AC}q+2\text{AC}\times\text{AB}-\text{AB}q}{2\text{AB}}$, hoc eſt $=\frac{\overline{\text{BC}+\text{AC}-\text{AB}}\times\overline{\text{BC}-\text{AC}+\text{AB}}}{2\text{AB}}$, ſive $=\frac{\text{HE}\times\text{EG}}{2\text{AB}}$. Aufer DE de FE ſive 2AC, & reſtabit FD $=$ $\frac{\text{AC}q+2\text{AC}\times\text{AB}+\text{AB}q-\text{BC}q}{2\text{AB}}$, hoc eſt $=\frac{\overline{\text{AC}+\text{AB}+\text{BC}}\times\overline{\text{AC}+\text{AB}-\text{BC}}}{2\text{AB}}$, ſive $=$ $\frac{\text{FG}\times\text{FH}}{2\text{AB}}$. Et cùm ſit CD medium proportionale inter DE ac DF, CE medium proportionale inter DE et EF, ac CF medium proportionale inter DF & EF: erit CD $=\frac{\sqrt{\text{FG}\times\text{FH}\times\text{HE}\times\text{EG}}}{2\text{AB}}$, CE $=\sqrt{\frac{\text{AC}\times\text{HE}\times\text{EG}}{\text{AB}}}$; & CF $=\sqrt{\frac{\text{AC}\times\text{FG}\times\text{FH}}{\text{AB}}}$. Duc CD in $\frac{1}{2}$ AB, & habebitur area $=$

$\frac{1}{4}\sqrt{}$

 $\frac{1}{4}\sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$. Pro angulo verò A determinando prodeunt Theoremata multiplicia, *viz.*

1. $2AB \times AC : HE \times EG$ (: : AC. DE) : : radius ad ſinum verſum anguli A.

2. $2AB \times AC. FG \times FG$ (: : AC. FD) : : radius ad coſin verſ. A.

3. $2AB \times AC. \sqrt{FG \times FH \times HE \times EG}$ (: : AC. CD) : : rad. ad ſin. A.

4. $\sqrt{FG \times FH}. \sqrt{HE \times EG}$ (: : CF. CE) : : rad. ad tang. $\frac{1}{2}$A.

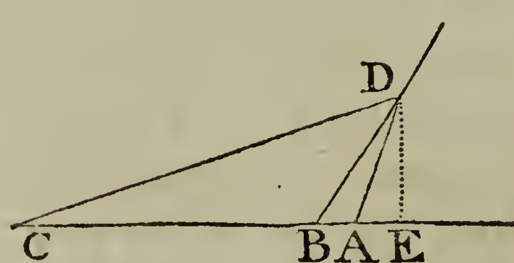
5. $\sqrt{HE \times EG}. \sqrt{FG \times FH}$ (: : CE. FC) : : rad. ad cotang. $\frac{1}{2}$A.

6. $2\sqrt{AB \times AC}. \sqrt{HE \times EG}$ (: : FE. CE) : : rad. ad ſin. $\frac{1}{2}$A.

7. $2\sqrt{AB \times AC}. \sqrt{FG \times FH}$ (: : FE. FC) : : rad. ad coſin. $\frac{1}{2}$A.

PROB. XIII.

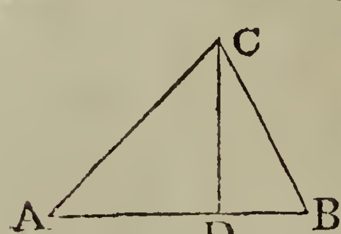
Datum angulum, CBD, *rectâ datâ,* CD, *ſubtendere; ita ut ſi à termino iſtius rectæ,* D, *ad punctum* A *in rectâ* CB *productâ datum agatur* AD, *fuerit angulus* ADC *æqualis angulo* ABD.



Dicatur $CD = a$, $AB = b$, $BD = x$, & erit BD. BA : : CD. DA $= \frac{ab}{x}$. Demitte perpendiculum DE, erit BE $= \frac{BDq - ADq + BAq}{2BA} = \frac{xx - \frac{aabb}{xx} + bb}{2b}$. Ob datum angulum DBA, pone BD. BE :: b. e, & habebitur iterum BE $= \frac{cx}{b}$: ergo $xx - \frac{aabb}{xx} + bb = 2ex$. Et $x^4 - 2ex^3 + bbxx - aabb = 0$.

PROB. XIV.

Invenire Triangulum, ABC, *cujus tria latera,* AB, AC, BC, *& perpendiculum* DC, *ſunt in Arithmeticâ progreſſione.*



Dic $AC = a$, $BC = x$; & erunt $DC = 2x - a$, & $AB = 2a - x$. Erunt etiam AD $(= \sqrt{ACq - DCq}) = \sqrt{4ax - 4xx}$, & BD $(= \sqrt{BCq - DCq}) = \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Atque adeo rurſus AB $= \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$. Quare $2a - x = \sqrt{4ax - 4xx} + \sqrt{4ax - 3xx - aa}$,

 ſive

five $2a-x-\sqrt{4ax-4xx}=\sqrt{4ax-3xx-aa}$. Et partibus quadratis $4aa-3xx-\overline{4a+2x}\times\sqrt{4ax-4xx}=4ax-3xx-aa$; five $5aa-4ax=\overline{4a-2x}\sqrt{4ax-4xx}$. Et, partibus iterum quadratis, ac terminis rite difpofitis, $16x^4-80ax^3+144aaxx-104a^3x+25a^4=0$. Hanc æquationem divide per $2x-a$, & orietur $8x^3-36axx+54aax-25a^3=0$, æquatio cujus refolutione dabitur x ex affumpto utcunque a. Habitis a & x, conftitue triangulum, cujus latera erunt $2a-x$, a, & x; & perpendiculum, in latus $2a-x$ demiffum, erit $2x-a$.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Si pofuiffem differentiam laterum trianguli effe d, & perpendiculum effe x; opus evafiffet aliquanto concinnius, prodeunte tandem æquatione $x^3=24ddx+48d^3$.

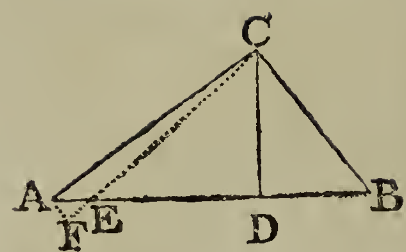
PROB. XV.

Invenire Triangulum, ABC, *cujus tria latera*, AB, AC, BC, *& perpendiculum*, CD, *funt in Geometricâ progreffione.*

DIC AC$=x$, & BC$=a$; & erit AB $=\frac{xx}{a}$; et CD $=\frac{aa}{x}$. Eft & AD $(=\sqrt{ACq-CDq})=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$; & BD $(=\sqrt{BCq-DCq})=\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$; adeoque $\frac{xx}{a}$ (= AB) $=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}+\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}$; five $\frac{xx}{a}-\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}=\sqrt{xx-\frac{a^4}{xx}}$. Et, partibus æquationis quadratis, $\frac{x^4}{aa}-\frac{2xx}{a}\times\sqrt{aa-\frac{a^4}{xx}}+aa-\frac{a^4}{xx}=xx-\frac{a^4}{xx}$; hoc eft, $x^4-aaxx+a^4=2aax\sqrt{xx-aa}$. Et, partibus iterum quadratis, $x^8-2aax^6+3a^4x^4-2a^6xx+a^8=4a^4x^4-4a^6xx$. Hoc eft $x^8-2aax^6-a^4x^4+2a^6xx+a^8=0$. Divide hanc æquationem per $x^4-aaxx-a^4$, & orietur $x^4-aaxx-a^4$. Quare eft $x^4=aaxx+a^4$. Et, extractâ radice, $xx=\frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{5}{4}a^4}$, five $x=a\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$. Cape ergo a, five BC, cujufvis longitudinis; & fac BC. AC : : AC. AB : : 1. $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}$; & trianguli ABC, ex his lateribus conftituti, perpendiculum DC erit ad latus BC in eâdem ratione.

CAPUT XIV.

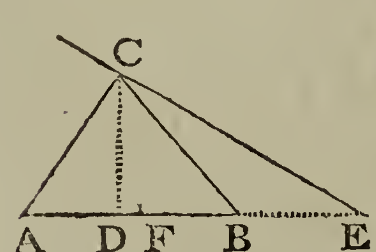
Idem aliter.



Cùm ſit AB. AC :: BC. DC dico angulum ACB rectum eſſe. Nam ſi negas, age CE conſtituentem angulum ECB rectum. Sunt ergo triangula BCE, DBC ſimilia, per 8. VI. Elem. adeoque EB. EC :: BC. DC. hoc eſt EB. EC :: AB. AC. Age AF perpendicularem CE, & propter parallelas AF, BC, erit EB. EC :: AE. FE :: AB. BC. Ergo, per 9. V. Elem. eſt AC=FC, hoc eſt Hypotenuſa trianguli rectanguli æqualis lateri, contra 19. I. Elem. Non eſt ergo angulus ECB rectus, & proinde ipſum ACB rectum eſſe oportet. Eſt itaque $ACq+BCq=ABq$. Sed eſt $ACq=AB\times BC$, ergo $AB\times BC+BCq=ABq$; &, extractâ radice, $AB=\frac{1}{2}BC+\sqrt{\frac{5}{4}BCq}$. Quamobrem cape BC. AB :: 1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, & AC mediam proportionalem inter BC & AB, & triangulo ex his lateribus conſtituto, erunt AB, AC, BC, DC continuè proportionales.

PROB. XVI.

Super datâ baſi, AB, *triangulum,* ABC, *conſtituere, cujus vertex* C *erit ad rectam,* EC, *poſitione datam, baſis autem medium exiſtet Arithmeticum inter latera.*



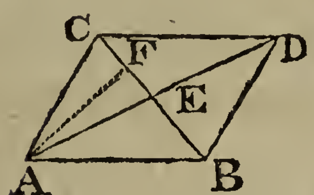
BAſis AB biſecetur in F, & producatur donec rectæ EC poſitione datæ occurrat in E, & ad ipſam demittatur perpendicularis CD; dictiſque $AB=a$, $FE=b$, & $BC-AB=x$, erit $BC=a+x$, $AC=a-x$. Et per 13. II. Elem. BD $\left(=\frac{BCq-ACq+ABq}{2AB}\right)=2x+\frac{1}{2}a$. Adeoque $FD=2x$, $DE=b+2x$, & CD $(=\sqrt{CBq-BDq})=\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Sed, propter datas poſitiones rectarum CE & AB, datur angulus CED; adeoque & ratio DE ad CD; quæ ſi ponatur d ad e dabit analogiam $d.\ e :: b+2x.\ \sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$. Unde, multiplicatis extremis & mediis in ſe, oritur æquatio $eb+2ex=d\sqrt{\frac{3}{4}aa-3xx}$; cujus partibus quadratis & ritè diſpoſitis, fit $xx=\frac{\frac{3}{4}ddaa-eebb-4eebx}{4ee+3dd}$. Et, radice extractâ, $x=$

$-2eeb$

$\frac{-2eeb+d\sqrt{3eeaa-3eebb+\frac{3}{4}ddaa}}{4ee+3dd}$. Dato autem x, datur BC $= a + x$, & AC $= a - x$.

PROB. XVII.

Datis Parallelogrammi cujuscunque lateribus, AB, BD, DC, & AC, & *unâ lineâ diagonali*, BC, *invenire alteram diagonalem*, AD.

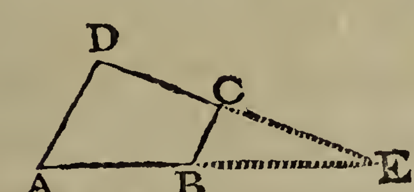


SIT E concursus diagonalium, & ad diagonalem BC demitte normalem AF, &, per 13. II. Elementorum, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = CF$; atque etiam $\frac{ACq - AEq + ECq}{2EC} = CF$. Quare cùm sit $EC = \frac{1}{2}BC$, & $AE = \frac{1}{2}AD$, erit $\frac{ACq - ABq + BCq}{2BC} = \frac{ACq - \frac{1}{4}ADq + \frac{1}{4}BCq}{BC}$; &, factâ reductione, $AD = \sqrt{2ACq + 2ABq - BCq}$.

Unde obiter, in quolibet parallelogrammo summa quadratorum laterum æquatur summæ quadratorum diagonalium.

PROB. XVIII.

Datis Trapezii, ABCD, *angulis, perimetro*, & *areâ, determinare latera*.



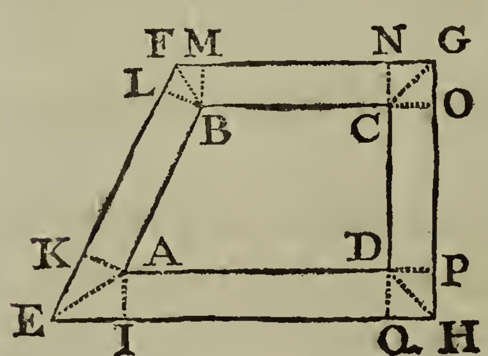
LAtera duo quælibet AB ac DC produc donec concurrant in E, sitque AB $= x$, & BC$=y$; &, propter angulos omnes datos, dantur rationes BC ad CE & BE; quas pone d ad e & f; & erit CE $= \frac{ey}{d}$; & BE$= \frac{fy}{d}$; adeoque AE$= x + \frac{fy}{d}$. Dantur etiam rationes AE ad AD ac DE; quas pone g & h ad d; & erit AD $= \frac{dx+fy}{g}$; & ED $= \frac{dx+fy}{h}$; adeoque CD $= \frac{dx+fy}{h} - \frac{ey}{d}$; & summa omnium laterum $x + y + \frac{dx+fy}{g} + \frac{dx+fy}{h} - \frac{ey}{d}$; quæ, cùm detur, esto a; & abbrevientur etiam termini scribendo $\frac{p}{r}$ pro dato $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$, & $\frac{q}{r}$ pro dato $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$, & habebitur æquatio $\frac{px+qy}{r} = a$.

Adhæc, propter datos omnes angulos, datur ratio BCq ad triangulum BCE; quam pone m ad n, & erit triang. BCE $= \frac{n}{m}yy$. Datur etiam ratio AEq ad triangulum ADE; quam pone m ad d, &

CAPUT XIV. & erit triang. ADE $= \frac{ddxx + 2dfxy + ffyy}{dm}$. Quare cùm area AC, quæ eſt horum triangulorum differentia, detur, eſto bb, & erit $\frac{ddxx + 2dfxy + ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Atque ita habentur duæ æquationes, ex quarum reductione omnia determinantur. Nempe ſuperior æquatio dat $\frac{ra - qy}{p} = x$; ſcribendo $\frac{ra - qy}{p}$ pro x in inferiori, provenit $\frac{drraa - 2dqray + dqqyy}{ppm} + \frac{2afry - 2fqyy}{pm} + \frac{ffyy - dnyy}{dm} = bb$. Et, abbreviatis terminis ſcribendo s pro dato $\frac{dqq}{pp} - \frac{2fq}{p} - \frac{ff}{d} - n$, & st pro dato $+ \frac{adqr}{pp} - \frac{afr}{q}$, ac stv pro dato $bbm - \frac{drraa}{pp}$, oritur $yy = 2ty + tv$, ſeu $y = t + \sqrt{tt + tv}$.

PROB. XIX.

Piſcinam, ABCD, *perambulatorio,* ABCD EFGH, *datæ areæ, & ejuſdem ubique latitudinis circundare.*



ESTO perambulatorii latitudo x, & ejus area aa. Et à punctis A, B, C, D, ad lineas EF, FG, GH & HE demiſſis perpendicularibus AK, BL, BM, CN, CO, DP, DQ, AI, perambulatorium dividetur in quatuor trapezia, IK, LM, NO, PQ, & in quatuor parallelogramma, AL, BN, CP, DI, latitudinis x, & ejuſdem longitudinis cum lateribus dati trapezii. Sit ergo ſumma laterum (AB+BC+CD+DA)$=b$, & erit ſumma parallelogrammorum $= bx$.

Porro ductis AE, BF, CG, DH, cùm ſit AI = AK, erit ang. AEI = ang. AEK$=\frac{1}{2}$IEK, ſive $\frac{1}{2}$DAB. Datur ergo ang. AEI, & proinde ratio ipſius AI ad IE, quam pone d ad e; & erit IE $= \frac{ex}{d}$. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AI, ſive $\frac{1}{2}x$, & fiet area trianguli AEI $= \frac{exx}{2d}$. Sed, propter æquales angulos & latera, triangula AEI & AEK ſunt æqualia; adeoque trapezium IK (= 2 triang. AEI) $= \frac{exx}{d}$. Simili modo ponendo BL. LF :: $d.f$, & CN. NG :: $d.g$, & DP. PH :: $d.h$, (nam illæ etiam rationes dantur ex datis angulis B, C, ac D) habebitur trapezium LM $= \frac{fxx}{d}$; NO $= \frac{gxx}{d}$; & PQ$= \frac{hxx}{d}$. Quamobrem $\frac{exx}{d} +$

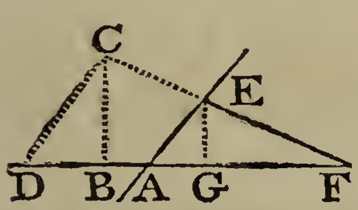
fxx

$\frac{fxx}{d} + \frac{gxx}{d} + \frac{hxx}{d}$, ſive $\frac{pxx}{d}$, ſcribendo p pro $e+f+g+h$, erit æquale trapeziis quatuor IK + LM + NO + PQ; & proinde $\frac{pxx}{d} + bx$, æquabitur toti perambulatorio aa. Quæ æquatio, dividendo omnes terminos per $\frac{p}{d}$ & extrahendo radicem ejus, evadet $x = \frac{-db + \sqrt{bbdd + 4aapd}}{2p}$. Latitudine Perambulatorii ſic inventâ, facile eſt ipſum deſcribere.

Problemata Geometrica.

PROB. XX.

A dato puncto, C, *rectam lineam,* CF, *ducere, quæ cum aliis duabus poſitione datis rectis,* AE *&* AF, *triangulum datæ magnitudinis,* AEF, *comprehendet.*

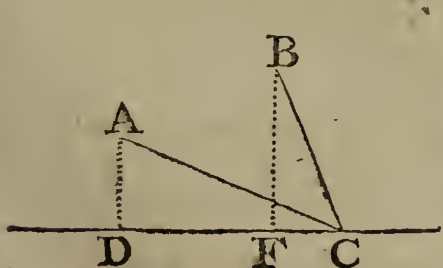


AGE CD parallelam AE, & CB ac EG perpendiculares in AF, ſitque AD $= a$, CB $= b$, AF $= x$, & trianguli AEF area cc; &, propter proportionales DF. AF (: : DC. AE) : : CB. EG, hoc eſt $a + x . x :: b . \frac{bx}{a+x}$, erit $\frac{bx}{a+x}$ = EG. Hanc duc in $\frac{1}{2}$AF, & emerget $\frac{bxx}{2a+2x}$ quantitas areæ AEF, quæ proinde æquatur cc. Atque adeo, æquatione ordinatâ, eſt $xx = \frac{2ccx + 2cca}{b}$, ſeu $x = \frac{cc + \sqrt{c^4 + 2ccab}}{b}$.

Nihil ſecus recta per datum punctum ducitur, quæ triangulum, vel trapezium quodvis, in datâ ratione ſecabit.

PROB. XXI.

Punctum C *in datâ rectâ lineâ,* DF, *determinare, à quo ad alia duo poſitione data puncta,* A *&* B, *ductæ rectæ,* AC *&* BC, *datam habeant differentiam.* Vide Prop. 45.



A Datis punctis ad datam rectam demitte perpendiculares AD & BF, & dic AD$=a$, BF$=b$, DF$=c$, DC$=x$; & erit AC$=\sqrt{aa+xx}$; FC$=x-c$; & BC$=\sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Sit jam data harum differentia d, exiſtente AC majori quàm BC; erit $\sqrt{aa+xx} - d = \sqrt{bb+xx-2cx+cc}$. Et, quadratis partibus, $aa+xx+dd-2d\sqrt{aa+xx} = bb+xx-2cx+cc$. Factâque reductione, & abbreviandi cauſâ pro datis $aa+dd-bb-cc$

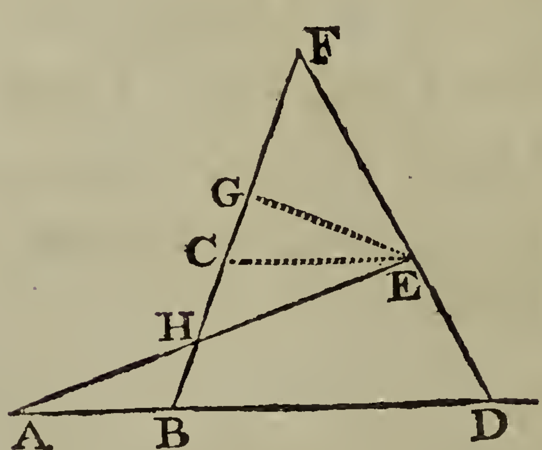
ſcripto

CAPUT XIV. ſcripto $2ee$, emerget $ee+cx=d\sqrt{aa+xx}$. Iterumque quadratis partibus, $e^4+2ceex+cexx=ddaa+ddxx$. Et, æquatione reductâ, $xx=\frac{2ceex+c^4-aadd}{dd-cc}$, ſeu $x=\frac{eec+\sqrt{e^4dd-aad^4+aaddcc}}{dd-cc}$.

Haud ſecùs problema reſolvitur, ſi linearum, AC & BC, ſumma vel quadratorum ſumma aut differentia, vel proportio, vel rectangulum, vel angulus ab ipſis comprehenſus detur; vel etiam ſi vice rectæ DC, circumferentia circuli, aut alia quævis curva linea adhibeatur, modò calculus, in hoc ultimo præſertim caſu, referatur ad lineam conjungentem puncta A & B.

PROB. XXII.

Datis poſitione tribus rectis, AD, AE, BF, *quartam* DF *ducere, cujus partes,* DE, EF, *prioribus interceptæ, datarum erunt longitudinum.*



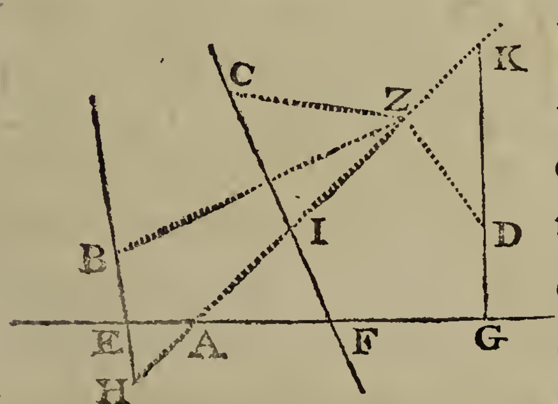
Ad BF demitte perpendicularem EG, ut & obliquam EC parallelam AD, & rectis tribus poſitione datis concurrentibus in A, B, & H, dic $AB=a$, $BH=b$, $AH=c$, $ED=d$, $EF=e$, & $HE=x$. Jam propter ſimilia triangula ABH, ECH, eſt AH. AB :: HE. EC $=\frac{ax}{c}$; & AH. HB :: HE. CH $=\frac{bx}{c}$. Adde HB, & fit CB $=\frac{bx+bc}{c}$. Inſuper, propter ſimilia triangula FEC, FDB, eſt ED.CB::EF.FC $=\frac{ebx+ebc}{dc}$. Denique (per 12 & 13 .II. Elem.) eſt $\frac{ECq-EFq}{2FC}+\frac{1}{2}FC\,(=CG)=\frac{HEq-ECq}{2CH}-\frac{1}{2}CH$; hoc eſt, $\frac{\frac{aaxx}{cc}-ee}{\frac{2ebx+2ebc}{dc}}+\frac{ebx+ebc}{2dc}=\frac{xx-\frac{aaxx}{cc}}{\frac{2bx}{c}}-\frac{bx}{2c}$. Sive $\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebx}{d}+\frac{ebc}{d}=\frac{ccx-aax-bbx}{b}$. Hic, abbreviandi cauſâ, pro $\frac{cc-aa-bb}{b}-\frac{eb}{d}$, ſcribe m; & erit $\frac{aadxx-eedcc}{ebx+ebc}+\frac{ebc}{d}=mx$; ac terminis omnibus multiplicatis per $x+c$, fiet $\frac{aadxx-eedcc}{eb}+\frac{ebcx}{d}+\frac{ebcc}{d}=mxx+mcx$. Iterum pro

aad

$\frac{aad}{cb} - m$ scribe p; pro $mc - \frac{ebc}{d}$ scribe $2pq$; & pro $- \frac{ebcc}{d} + \frac{eedcc}{eb}$ scribe prr; & evadet $xx = 2qx + rr$, & $x = q \pm \sqrt{qq + rr}$. Invento x, sive HE, age EC parallelam AB, & cape FC . BC :: $e . d$, & acta FED conditionibus quæstionis satisfaciet. PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXIII.

Punctum Z *determinare, à quo ad quatuor positione datas rectas lineas,* FA, EB, FC, GD, *si aliæ quatuor lineæ,* ZA, ZB, ZC, *&* ZD, *in datis angulis ducantur, duarum è ductis,* ZA *&* ZB, *rectangulum, & aliarum duarum,* ZC *&* ZD, *summa detur.*



E lineis elige aliquam positione datam, FA; ut & positione non datam, ZA, quæ ad illam ducitur, ex quarum longitudinibus punctum Z determinetur; & cæteras positione datas lineas produc donec his, si opus est etiam productis, occurrant, ut vides. Dictisque EA $= x$, & AZ $= y$, propter angulos trianguli AEH datos, dabitur ratio AE ad AH, quam pone p ad q, & erit AH $= \frac{qx}{p}$. Adde AZ, fitque ZH $= y + \frac{qx}{p}$. Et inde cùm propter datos angulos trianguli HZB detur ratio HZ ad BZ, si ea ponatur n ad p, habebitur ZB $= \frac{py + qx}{n}$.

Præterea si data EF dicatur a, erit AF $= a - x$; indeque, si propter datos angulos trianguli AFI, statuatur AF ad AI in ratione p ad r, evadet AI $= \frac{ra - rx}{p}$. Hanc aufer ab AZ, & restabit IZ $= y - \frac{ra - rx}{p}$. Et, propter datos angulos trianguli ICZ, si ponatur IZ ad ZC in ratione m ad p, evadet ZC $= \frac{py - ra + rx}{m}$.

Ad eundem modum, si ponatur EG $= b$. AG . AK :: $l . s$, & ZK . ZD :: $p . l$. obtinebitur ZD $= \frac{sb - sx - ly}{p}$.

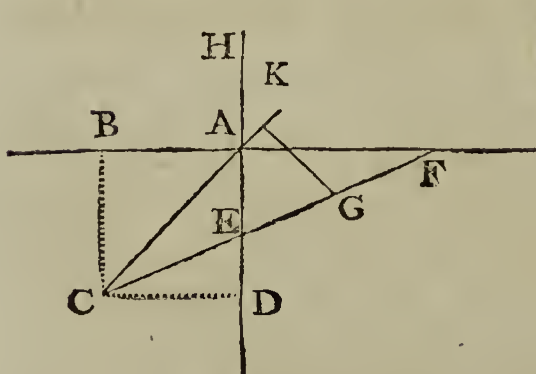
Jam ex statu quæstionis si duarum ZC & ZD summa, $\frac{py - ra + rx}{m} + \frac{sb - sx - ly}{p}$, ponatur æqualis dato alicui f; & aliarum duarum rectangulum, $\frac{pyy + qxy}{n}$, æquale gg; habebuntur duæ æquationes

CAPUT XIV. tiones pro determinandis x & y. Per poſteriorem fit $x = \frac{ngg - pyy}{qy}$; & hunc ipſius x valorem ſcribendo pro eo in priori æquatione, evadet $\frac{py - ra}{m} + \frac{rngg - rpyy}{mqy} + \frac{sb - ly}{p} - \frac{sngg - spyy}{pqy} = f$. Et reducendo, $yy = \frac{apqry - bmqsy + fmpqy + ggmns - ggnpr}{ppq - ppr - mlq + mps}$. Et abbrevi. cauſâ ſcripto $2h$ pro $\frac{apqr - bmqs + fmpq}{ppq - ppr - mlq + mps}$, & kk pro $\frac{ggmns - ggpnr}{ppq - ppr - mlq + mps}$, fiet $yy = 2hy + kk$, ſive $y = h \pm \sqrt{hh + kk}$. Cujus æquationis ope cùm y innoteſcit, æquatio $\frac{ngg - pyy}{qy} = x$ dabit x: quod ſufficit ad determinandum punctum z.

Ad eundem ferè modum punctum determinatur, à quo ad plures vel pauciores poſitione datas rectas totidem aliæ rectæ ducantur, eâ lege ut aliquarum ſumma, vel differentia, vel contentum detur; aut æquetur cæterarum ſummæ, vel differentiæ, vel contento, vel ut alias quaſlibet habeant aſſignatas conditiones.

PROB. XXIV.

Angulum rectum, EAF, *datâ rectâ,* EF, *ſubtendere, quæ tranſibit per datum punctum,* C, *a lineis rectum angulum comprehendentibus æquidiſtans.*



QUadratum ABCD compleatur, & linea EF biſcetur in G. Tum dic CB vel CD eſſe a, EG vel FG eſſe b, & CG eſſe x; eritque $CE = x - b$, & $CF = x + b$. Dein cùm $CFq - BCq = BFq$, erit $BF = \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Denique propter ſimilia triangula CDE, FBC, eſt CE.CD :: CF.BF, ſive $x - b.a :: x + b.\sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Unde $ax + ab = \overline{x - b} \times \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Cujus æquationis utrâque parte quadratâ, & prodeuntibus terminis in ordinem redactis, prodit $x^4 = \begin{matrix} 2aa \\ +2bb \end{matrix} xx \mp \frac{2aabb}{b^4}$. Et, extractâ radice, ſicut fit in æquationibus quadraticis, prodit $xx = aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}$. Adeoque $x = \sqrt{aa + bb + \sqrt{a^4 + 4aabb}}$. CG ſic inventa dat CE vel CF, quæ determinando punctum E vel F problemati ſatisfacit.

2 *Idem*

Idem aliter.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Sit CE $= x$, CD $= a$, & EF $= b$, eritque CF $= x + b$, & BF $= \sqrt{xx + 2bx + bb - aa}$. Et proinde, cùm ſit CE.CD::CF.BF, ſive $x.a::x+b.\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$, erit $ax + ab = x\sqrt{xx+2bx+bb-aa}$. Hujus æquationis partibus quadratis, & terminis in ordinem redactis, prodibit $x^4 + 2bx^3 \begin{smallmatrix}+bb\\-2aa\end{smallmatrix} xx - 2aabx - aabb = 0$, æquatio biquadratica, cujus radicis inveſtigatio difficilior eſt quàm in priori caſu. Sic autem inveſtigari poteſt. Pone $x^4 + 2bx^3 \begin{smallmatrix}+bb\\-2aa\end{smallmatrix} xx - 2aabx + a^4 = aabb + a^4$; & extractâ utrobique radice, $xx + bx - aa = \pm a\sqrt{aa+bb}$.

Ex his occaſionem nactus ſum tradendi *Regulam de electione terminorum* ad ineundum calculum.

Scilicet cùm duorum terminorum talis obvenit affinitas, ſive ſimilitudo relationis, ad cæteros terminos quæſtionis, ut oporteret æquationes per omnia ſimiles ex utrovis adhibito produci; aut ambos, ſi ſimul adhiberentur, eaſdem in æquatione finali dimenſiones, & eandem omninò formam, ſignis fortè + & – exceptis, habituros eſſe; (id quod facile proſpicitur) tunc neutrum adhibere convenit; ſed eorum vice tertium quemvis eligere, qui ſimilem utrique relationem gerit; puta ſemiſummam vel ſemidifferentiam, vel medium proportionale forſan, aut quamvis aliam quantitatem utrique indifferenter & ſine compare relatam.

Sic in præcedente problemate, cùm viderim lineam EF pariter ad utramque AB & AD referri (quod patebit ſi ducas itidem EF in angulo BAH) atque adeo nullâ ratione ſuaderi poſſem, cur ED potiùs quàm BF, vel AE potiùs quàm AF, vel CE potiùs quàm CF, pro quærendâ quantitate adhiberentur; vice punctuorum E & F undè hæc ambiguitas proficiſcitur, ſumpſi, in ſolutione priori, intermedium G, quod parem relationem ad utramque linearum AB & AD obſervat. Deinde ab hoc G non demiſi perpendiculum ad AF, pro quærendâ quantitate, quia potui eâdem ratione demiſiſſe ad AD. Et eapropter in neutrum, CB vel CD, demiſi, ſed inſtitui CG quærendum eſſe, quod nullum admittit compar; & ſic æquationem biquadraticam obtinui ſine terminis imparibus.

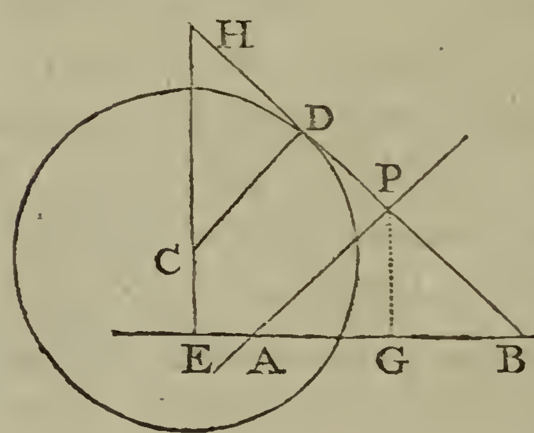
 Potui

 Potui etiam, animadverſo quod punctum G jaceat in peripheriâ circuli centro A radio EG deſcripti, demiſiſſe GK perpendiculum in diagonalem AC, & quæſiviſſe AK vel CK, quippe quæ ſimilem etiam utrique, AB & AD, relationem gerunt; atque ita in æquationem quadraticam $yy = -\frac{1}{2}ey + \frac{1}{2}bb$ incidiſſem, poſito $AK = y$, $AC = e$, & $EG = b$. Et AK ſic invento, erigendum fuiſſet perpendiculum KG præfato circulo occurrens in G, per quod CF tranſiret.

Ad hanc regulam animum advertens, in Prob. 9 & 10. ubi trianguli latera germana, BC & AC, determinanda erant, quæſivi potiùs ſemidifferentiam quàm alterutrum eorum. Sed regulæ hujus utilitas ex vigeſimo octavo Problemate magis eluceſcet.

PROB. XXV.

Ad Circulum, centro C *radio* CD *deſcriptum, ducere Tangentem* DB, *cujus pars*, PB, *inter rectas poſitione datas*, AP, AB, *ſita, ſit datæ longitudinis.*



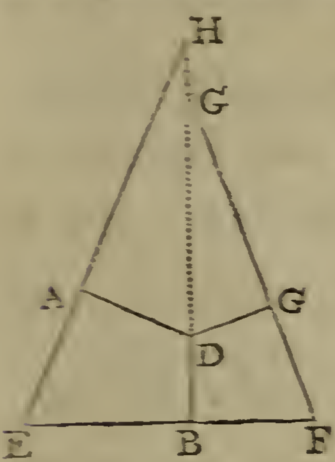
A Centro C ad alterutram rectarum poſitione datarum, puta AB, demitte normalem CE, eamque produc donec Tangenti DB occurrat in H. Ad eandem AB demitte etiam normalem PG, & dictis $EA = a$, $EC = b$, $CD = c$, $BP = d$, & $PG = x$, propter ſimilia triangula PGB, CDH, erit GB $(\sqrt{dd - xx})$. PB :: CD. $CH = \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Adde EC; & fiet $EH = b + \frac{cd}{\sqrt{dd - xx}}$. Porro eſt PG. GB :: EH. $EB = \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} + \frac{cd}{x}$. Adhæc, propter angulum PAG datum, datur ratio PG ad AG; quâ poſitâ e ad f, erit $AG = \frac{fx}{e}$. Adde EA & BG, & habebitur denuò $EB = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$. Eſt itaque $\frac{cd}{x} + \frac{b}{x}\sqrt{dd - xx} = a + \frac{fx}{e} + \sqrt{dd - xx}$: & per tranſpoſitionem terminorum $a + \frac{fx}{e} - \frac{cd}{x} = \frac{b - x}{x}\sqrt{dd - xx}$. Et partibus æquationis quadratis, $aa + \frac{2afx}{e} - \frac{2acd}{x} + \frac{ffxx}{ee} - \frac{2cdf}{e} + \frac{ccdd}{xx} = \frac{bbdd}{xx} - bb - \frac{2bdd}{x} + 2bx + dd - xx$. Et, per debitam reductionem,

$$\frac{x^4 \begin{matrix} +2aef \\ -2bee \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +aaee \\ +bbee \\ -ddee \\ -2cdef \end{matrix} xx \begin{matrix} +2bddee \\ -2acdee \end{matrix} x \begin{matrix} +ccddee \\ -bbddee \end{matrix}}{ee + ff} = 0.$$

PROB.

PROB. XXVI.

Invenire punctum D, *à quo tres rectæ*, DA, DB, DC, *ad totidem alias poſitione datas rectas*, AE, BF, CF, *perpendiculariter demiſſæ, datam inter ſe rationem obtineant.*



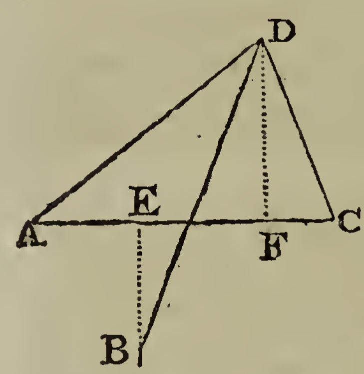
E Rectis poſitione datis producatur una, puta BF, ut & ejus perpendicularis, BD, donec reliquis, AE & CF, occurrant, BF quidem in E & F, BD autem in H & G. Jam ſit EB$=x$ & EF$=a$; eritque BF $= a - x$. Cùm autem propter datam poſitionem rectarum EF, EA, & FC, anguli E & F, adeoque rationes laterum triangulorum EBH & FBG dentur; ſit EB ad BH ut d ad e; & erit BH $= \frac{ex}{d}$, & EH $(= \sqrt{EBq + BHq}) = \sqrt{xx + \frac{eexx}{dd}}$, hoc eſt $= \frac{x}{d}\sqrt{dd+ee}$. Sit etiam BF ad BG ut d ad f; & erit BG $= \frac{fa-fx}{d}$, & FG $(=\sqrt{BFq+BGq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + \frac{ffaa - 2ffax + ffxx}{dd}}$, hoc eſt $= \frac{a-x}{d}\sqrt{dd+ff}$. Præterea dicatur BD $=y$, & erit HD $= \frac{ex}{d} - y$, & GD $= \frac{fa-fx}{d} - y$; adeoque, cùm ſit AD. HD (: : EB. EH) : : d. $\sqrt{dd+ee}$, & DC. GD (: : BF. FG) : : d. $\sqrt{dd+ff}$, erit AD $= \frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, & DC $= \frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$. Denique, ob datas rationes linearum BD, AD, DC, ſit BD. AD : : $\sqrt{dd+ee}$. $b-d$; & erit $\frac{by-dy}{\sqrt{dd+ee}}$ (= AD) $= \frac{ex-dy}{\sqrt{dd+ee}}$, ſive $by = ex$. Sit etiam BD. DC : : $\sqrt{dd+ff}$. $k-d$; & erit $\frac{ky-dy}{\sqrt{dd+ff}}$ (= DC =) $\frac{fa-fx-dy}{\sqrt{dd+ff}}$, ſive $ky = fa - fx$. Eſt itaque $\frac{ex}{b}$ $(= y) = \frac{fa-fx}{k}$; &, per reductionem, $\frac{fba}{ek+fb} = x$. Quare cape EB. EF : : b. $\frac{ek}{f} + b$; dein BD. EB : : e. b; & habebitur punctum quæſitum D.

PROB. XXVII.

Invenire punctum D, *à quo tres rectæ*, DA, DB, DC, *ad data tria puncta* A, B, C, *ductæ, datam inter ſe rationem obtineant.*

E Datis tribus punctis junge duo quævis, puta A & C; & à tertio, B, ad lineam conjungentem, AC, demitte perpendiculum

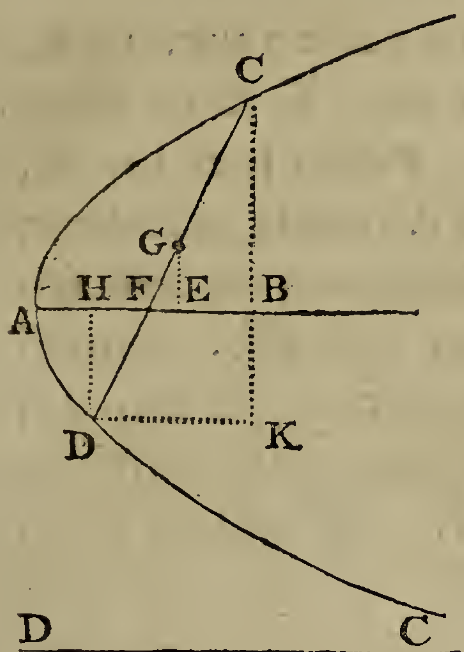
CAPUT XIV. BE, ut & perpendiculum DF à puncto quæsito D; dictisque $AE = a$, $AC = b$, $EB = c$, $AF = x$, & $FD = y$, erit $ADq = xx + yy$; $FC = b - x$; $CDq\ (= FCq + FDq) = bb - 2bx + xx + yy$; $EF = x - a$, ac $BDq\ (= EFq + \overline{EB + FD}\ \text{quad.}) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. Jam cùm sit AD ad CD in datâ ratione, sit ista ratio d ad e; & erit $CD = \frac{e}{d}\sqrt{xx+yy}$. Cùm etiam sit AD ad BD in datâ ratione, sit ista ratio d ad f, & erit $BD = \frac{f}{d}\sqrt{xx+yy}$. Adeoque est $\frac{eexx+eeyy}{dd}\ (= CDq) = bb - 2bx + xx + yy$; & $\frac{ffxx+ffyy}{dd}\ (= BDq) = xx - 2ax + aa + cc + 2cy + yy$. In quibus si, abbreviandi causâ, pro $\frac{dd-ee}{d}$ scribatur p, & q pro $\frac{dd-ff}{d}$, emerget $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, & $aa + cc - 2ax + 2cy + \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy = 0$. Per priorem est $\frac{2bqx - bbq}{p} = \frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$. Quare in posteriori pro $\frac{q}{d}xx + \frac{q}{d}yy$ scribe $\frac{2bqx - bbq}{p}$, & orietur $\frac{2bqx - bbq}{p} + aa + cc - 2ax + 2cy = 0$. Iterum, abbreviandi causâ, scribe m pro $a - \frac{bq}{p}$, & $2cn$ pro $\frac{bbq}{p} - aa - cc$; & erit $2mx + 2cn = 2cy$; terminisque per $2c$ divisis, $\frac{mx}{c} + n = y$. Quamobrem in æquatione $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{p}{d}yy = 0$, pro yy scribe quadratum de $\frac{mx}{c} + n$, & habebitur $bb - 2bx + \frac{p}{d}xx + \frac{pmm}{dcc}xx + \frac{2pmn}{dc}x + \frac{pnn}{d} = 0$. Ubi denuò si, abbreviandi causâ, $\frac{b}{r}$ scribatur pro $\frac{p}{d} + \frac{pmm}{dcc}$, $\frac{sb}{r}$ pro $b - \frac{pmn}{dc}$, & $\frac{tbb}{r}$ pro $bb + \frac{pnn}{d}$, habebitur $xx = 2sx - tb$. Et, extractâ radice, $x = s \pm \sqrt{ss - tb}$. Invento x, æquatio $\frac{mx}{c} + n = y$ dabit y; & ex datis x & y, hoc est AF & FD, determinatur punctum quæsitum D.



PROB. XXVIII.

Rectam, DC, *datæ longitudinis in datam Conicam sectionem,* DAC, *sic inscribere, ut ea per punctum,* G, *positione datum transeat.*

SIT AF axis Curvæ, & à punctis, D, G & C, ad hunc demitte normales DH, GE, & CB. Jam ad determinandam positionem



tionem rectæ DC, puncti D, aut C, inventio proponi poteſt; ſed cùm hæc ſint germana & adeo paria, ut ad alterutrum determinandum operatio ſimilis evaſura eſſet, ſive quærerem CG, CB, aut AB; ſive comparia DG, DH, aut AH; ea propter de tertio aliquo puncto proſpicio, quod utrumque D & C ſimiliter reſpectet, & unà determinet: et hujuſmodi video eſſe punctum F. Problematica Geometrica.

Jam ſit AE $= a$, EG $= b$, DC $= c$, EF $= z$; & præterea cùm relatio inter AB & BC habeatur in æquatione, quam ſuppono pro Conicâ ſectione determinandâ datam eſſe, ſit AB $= x$, & BC $= y$; & erit FB $= x - a + z$. Et propter GE . EF :: CB . FB erit iterùm FB $= \frac{yz}{b}$. Ergo $x - a + z = \frac{yz}{b}$.

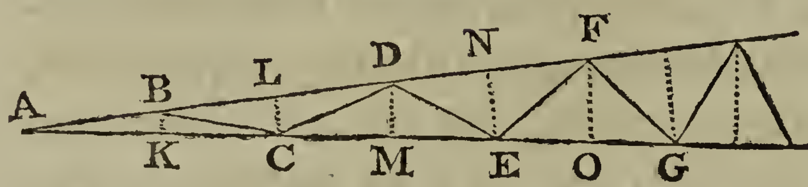
His ita præparatis, tolle x per æquationem quæ curvam deſignat. Quemadmodum ſi Curva ſit Parabola, per æquationem $rx = yy$ deſignata, ſcribe $\frac{yy}{r}$ pro x; & orietur $\frac{yy}{r} - a + x = \frac{yz}{b}$. Et, extractâ radice, $y = \frac{rz}{2b} \pm \sqrt{\frac{rrzz}{4bb} + ar - rz}$. Unde patet $\sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$ eſſe differentiam gemini valoris y, id eſt linearum $+$ BC & $-$ DH, adeoque (demiſſo DK in CB normali) valere CK. Eſt autem FG . GE :: DC . CK, hoc eſt $\sqrt{bb + zz} . b :: c . \sqrt{\frac{rrzz}{bb} + 4ar - 4rz}$. Ducendoque quadrata extremorum & mediorum in invicem, & facta ordinando, orietur $z^4 = \frac{4bbrz^3 \begin{array}{c} -4abbr \\ -bbrr \end{array} zz + 4b^4rz \begin{array}{c} -4ab^4r \\ +b^4cc \end{array}}{rr}$, æquatio quatuor tantùm dimenſionum, quæ ad octo dimenſiones aſcendiſſet, ſi quæſiviſſem CG vel CB aut AB.

PROB. XXIX.

Datum angulum per datum numerum multiplicare vel dividere.

In angulo quovis FAG inſcribe lineas AB, BC, CD, DE, &c. ejuſdem cujuſvis longitudinis; & erunt triangula, ABC, BCD, CDE, DEF, &c. Iſoſcelia; adeoque per 32. I. Elem. erit ang. CBD = ang.

CAPUT XIV. ang. A+ACB=2 ang. A. Et ang. DCE=ang. A+ADC=3 ang. A. Et ang. EDF=A+AED=4 ang. A. Et ang. FEG=5 ang. A, & sic deinceps. Positis jam AB, BC, CD, &c. radiis æqualium circulorum, perpendicula BK, CL, DM, &c. demissa in AC, BD, CE, &c. erunt sinus istorum angulorum, & AK, BL, CM, DN, &c. sinus complementorum ad rectum. Vel positâ AB diametro, illæ AK, BL, CM, &c. erunt chordæ. Sit ergo AB = $2r$, & AK = x: dein sic operare.



AB . AK : : AC . AL.

$2r \,.\, x \,::\, 2x \,.\, \frac{xx}{r}.$

$$\left.\begin{array}{r} \text{AL} - \text{AB} \\ \text{Et } \frac{xx}{r} - 2r \end{array}\right\} = \text{BL, Duplicatio.}$$

AB . AK : : AD (2AL − AB). AM.

$2r \,.\, x \,::\, \frac{2xx}{r} - 2r \,.\, \frac{x^3}{rr} - x.$

$$\left.\begin{array}{r} \text{AM} - \text{AC} \\ \text{Et } \frac{x^3}{rr} - 3x \end{array}\right\} = \text{CM, Triplicatio.}$$

AB . AK : : AE (2AM − AC). AN.

$2r \,.\, x \,::\, \frac{2x^3}{rr} - 4x \,.\, \frac{x^4}{r^3} - \frac{2xx}{r}.$

$$\left.\begin{array}{r} \text{AN} - \text{AD} \\ \text{Et } \frac{x^4}{r^3} - \frac{4xx}{r} + 2r \end{array}\right\} = \text{DN, Quadruplicatio.}$$

AB . AK : : AF (2AN − AD). AO.

$2r \,.\, x \,::\, \frac{2x^4}{r^3} - \frac{6xx}{r} + 2r \,.\, \frac{x^5}{r^4} - \frac{3x^3}{rr} + x.$

$$\left.\begin{array}{r} \text{AO} - \text{AE} \\ \text{Et } \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{rr} + 5x \end{array}\right\} = \text{EO, Quintuplicatio.}$$

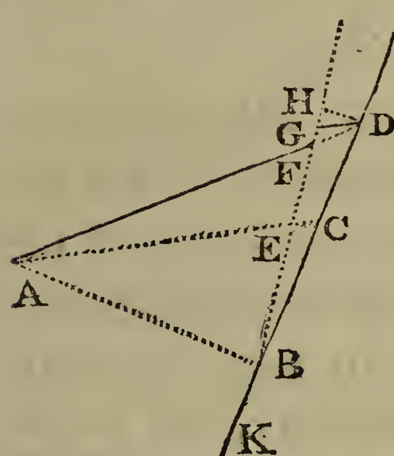
Et sic deinceps. Quòd si velis angulum in aliquot partes dividere, pone q pro BL, CM, DN, &c. Et habebis $xx - 2rr = qr$ ad bisectionem: $x^3 - 3rrx = qrr$ ad trisectionem: $x^4 - 4rrxx + 2r^4 = qr^3$ ad quadrisectionem: $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x = qr^4$ ad quinquisectionem, &c.

PROB.

PROB. XXX.

Problemata Geometrica.

Cometæ in lineâ rectâ, BD, *uniformiter progredientis positionem cursûs ex tribus observationibus determinare.*



SIT A oculus spectatoris, B locus Cometæ in primâ observatione, C in secundâ, ac D in tertiâ; quærenda erit inclinatio lineæ BD ad lineam AB. Ex observationibus itaque dantur anguli BAC, BAD; adeoque, si BH ducatur ad AB normalis & occurrens AC & AD in E & F, ex assumpto utcunque AB dabuntur BE & BF, tangentes nempe præfatorum angulorum respectu radii AB. Sit ergo $AB = r$, $BE = b$, & $BF = c$. Porrò ex datis observationum intervallis dabitur ratio BC ad BD, quæ si ponatur b ad e, & agatur DG parallela AC, cùm sit BE ad BG in eâdem ratione, & BE dicta fuerit b, erit $BG = e$; adeoque $GF = e - c$. Adhæc, si demittatur DH normalis ad BG, propter triangula ABF & DHF similia & similiter secta lineis AE ac DG, erit FE.AB::FG.HD, hoc est $c - b.\, a :: e - c.\, \frac{ac - ae}{c-b} = HD$. Erit etiam FE.FB::FG.FH, hoc est $c - b.\, c :: e - c.\, \frac{ce - cc}{c - b} = FH$; cui adde BF, sive c, & fit $BH = \frac{ce - cb}{c - b}$. Quare est $\frac{ce - cb}{c - b}$ ad $\frac{ac - ac}{c - b}$, (sive $ce - cb$ ad $ae - ac$, vel $\frac{ee - cb}{e - c}$ ad a) ut BH ad HD; hoc est, ut tangens anguli HDB, sive ABK, ad radium. Quare, cùm a supponatur esse radius, erit $\frac{ce - cb}{e - c}$ tangens anguli ABK: adeoque factâ resolutione, erit ut $e - c$ ad $e - b$ (sive GF ad GE) ita c (sive tangens anguli BAF) ad tangentem anguli ABK.

Dic itaque, ut tempus inter primam & secundam observationem, ad tempus inter primam ac tertiam, ita tangens anguli BAE, ad quartam proportionalem. Dein, ut differentia inter illam quartam proportionalem & tangentem anguli BAF, ad differentiam inter eandem quartam proportionalem & tangentem anguli BAE, ita tangens anguli BAF, ad tangentem anguli ABK.

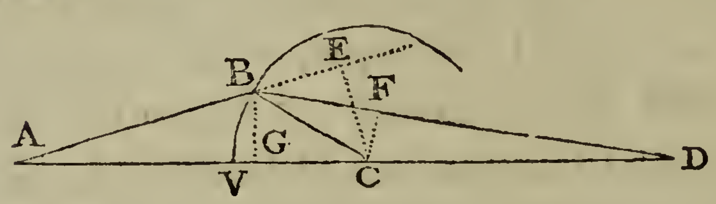
PROB.

Caput XIV.

PROB. XXXI.

Radiis à puncto lucido ad sphæricam superficiem refringentem divergentibus, invenire concursus singulorum refractorum cum axe sphæræ per punctum illud lucidum transeunte.

SIT A punctum illud lucidum, & BV sphæra, cujus axis AD, centrum C, & vertex V; sitque AB radius incidens, & BD refractus ejus, ac demissis ad radios istos perpendicularibus CE & CF, ut & BG perpendiculari ad AD, actâque BC, dic $AC = a$,



VC, vel $BC, = r$, $CG = x$, & $CD = z$: eritque $AG = a - x$, $BG = \sqrt{rr - xx}$, $AB = \sqrt{aa - 2ax + rr}$; &, propter sim. tri. ABG & ACE, $CE = \frac{a\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}}$. Item $GD = z + x$, $BD = \sqrt{zz + 2zx + rr}$: & propter sim. tri. DBG ac DCF, $CF = \frac{z\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$. Præterea cùm ratio sinuum incidentiæ & refractionis, adeoque CE ad CF detur, pone illam rationem esse a ad f; & erit $\frac{fa\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{aa - 2ax + rr}} = \frac{az\sqrt{rr - xx}}{\sqrt{zz + 2zx + rr}}$; ac multiplicando in crucem, dividendoque per $a\sqrt{rr - xx}$, erit $f\sqrt{zz + 2zx + rr} = z\sqrt{aa - 2ax + rr}$: & quadrando, ac redigendo terminos in ordinem, $zz = \frac{2ffxz + ffrr}{aa - 2ax + rr - ff}$. Denique pro dato $\frac{ff}{a}$ scribe p, & q pro dato $a + \frac{rr}{a} - p$, & erit $zz = \frac{2pxz + prr}{q - 2x}$, ac $z = \frac{px + \sqrt{ppxx - 2prrx + pqrr}}{q - 2x}$. Inventum est itaque z; hoc est longitudo CD, adeoque punctum quæsitum D, quo refractus BD concurrit cum axe. Q. E. F.

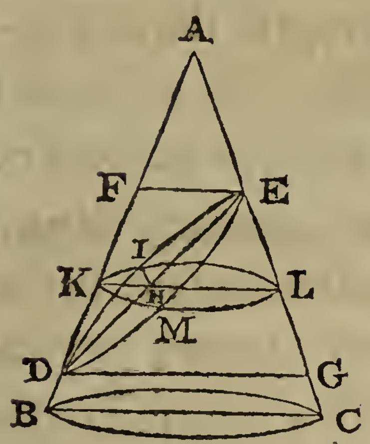
Posui hic incidentes radios divergentes esse, & in Medium densius incidere; sed mutatis mutandis Problema perinde resolvitur ubi convergunt, vel incidunt è densiori Medio in rarius.

PROB.

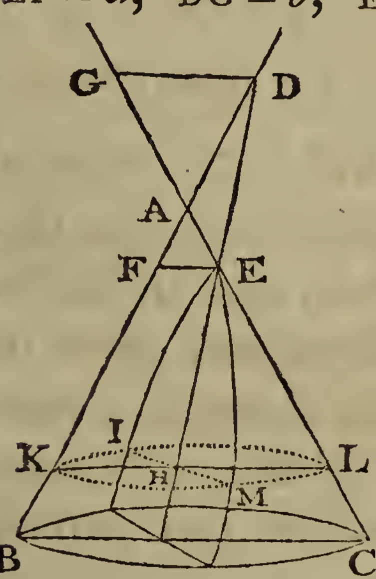
PROB. XXXII.

Problemata Geometrica.

Si Conus plano quolibet ſecetur, invenire figuram ſectionis.



SIT ABC conus circulari baſi BC inſiſtens; IEM ejus ſectio quæſita; KILM alia quælibet ſectio parallela baſi, & occurrens priori ſectioni in HI; & ABC tertia ſectio, perpendiculariter biſecans priores duas, in EH & KL, & conum in triangulo ABC. Et producto EH donec occurrat ipſi AK in D, actiſque EF ac DG parallelis KL, & occurrentibus AB & AC in F ac G, dic EF $= a$, DG $= b$, ED $= c$, EH $= x$, & HI $= y$; & propter ſim. tri. EHL, EDG, erit ED . DG :: EH . HL $= \frac{bx}{c}$. Dein propter ſim. tri. DEF, DHK, erit DE . EF :: DH. ($c - x$ in Fig. 1, & $c + x$ in Fig. 2.) HK $= \frac{ac \mp ax}{c}$. Deinque cùm ſectio KIL ſit parallela baſi, adeoque circularis; erit HK × HL = HIq; hoc eſt $\frac{ab}{c}x \mp \frac{ab}{cc}xx = yy$, æquatio quæ exprimit relationem inter EH (x) & HI (y) hoc eſt inter axem & ordinatim applicatam ſectionis EIM; quæ æquatio cùm ſit ad Ellipſin in Fig. 1, & ad Hyperbolam in Fig. 2, patet ſectionem illam perinde Ellipticam vel Hyperbolicam eſſe.



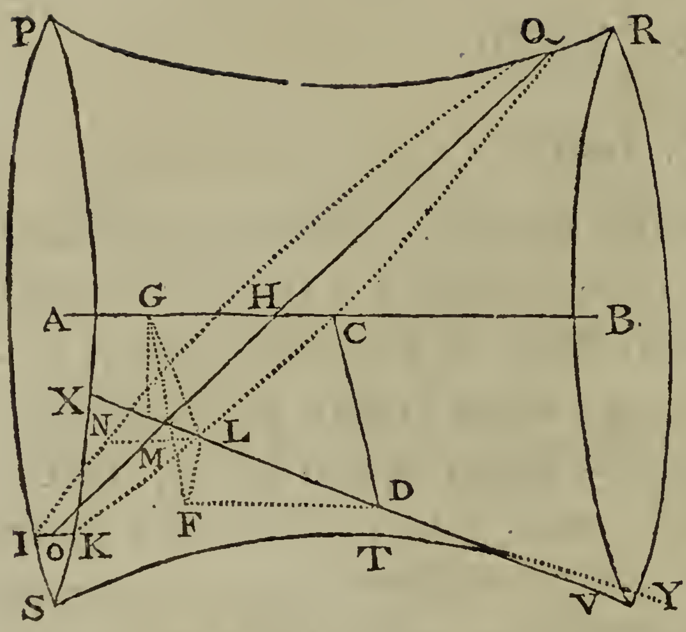
Quòd ſi ED nullibi occurrat AK, ipſi parallela exiſtens, tunc erit HK = EF (a), & inde $\frac{ab}{c}x$ (HK × HL) $= yy$, æquatio ad Parabolam.

PROB. XXXIII.

Si recta, XY, *circa axem* AB, *ad diſtantiam* CD, *in datâ inclinatione ad planum* DCB, *convolvatur, & ſolidum,* PQRVTS, *iſtâ convolutione generatum, ſecetur plano quolibet* INQLK; *invenire figuram Sectionis.*

ESTO BHQ, vel GHO, inclinatio axis, AB, ad planum ſectionis; & L quilibet concurſus rectæ XY cum plano illo. Age

CAPUT XIV.



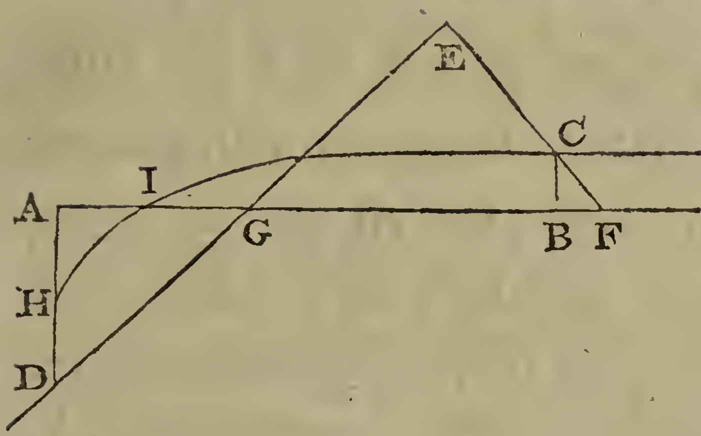
DF parallelam AB, & ad AB, DF & HO demitte perpendiculares LG, LF, LM, ac junge FG & MG. Dictisque CD $= a$, CH $= b$, HM $= x$, & ML $= y$; &, propter datum angulum GHO, posito MH. HG :: $d.e$: erit $\frac{ex}{d}$ = GH, & $b + \frac{ex}{d}$ = GC vel FD. Adhæc, propter angulum datum LDF (nempe inclinationem rectæ XY ad planum GCDF) posito FD.FL::$g.h$, erit $\frac{hb}{g} + \frac{hex}{dg}$ = FL; cujus quadrato adde FGq, (DCq seu aa) & emerget GL$q = aa + \frac{hhbb}{gg} + \frac{2hhbex}{dgg} + \frac{hheexx}{ddgg}$. Hinc aufer MG$q$ (HMq − HGq seu $xx - \frac{ee}{dd}xx$) & restabit $\frac{aagg + hhbb}{gg} + \frac{2hhbe}{dgg}x + \frac{hhee - ddgg + eegg}{ddgg}xx$ (= MLq) $= yy$: æquatio quæ exprimit relationem inter x & y, hoc est inter HM axem sectionis, & ML ordinatim applicatam. Et proinde, cùm in hâc æquatione x & y ad duas tantùm dimensiones ascendant, patet figuram INQLK esse conicam sectionem. Utpote si angulus MHG major sit angulo LDF, Ellipsis erit hæc figura; si minor, Hyperbola; si æqualis vel Parabola, vel, coincidentibus insuper punctis C & H, parallelogrammum.

PROB. XXXIV.

Si ad AF *erigatur perpendiculum,* AD, *datæ longitudinis, & normæ,* DEF, *crus unum,* ED, *continuò transeat per punctum* D, *dum alterum crus* EF, *æquale* AD, *dilabatur super* AF; *invenire curvam* HIC, *quam crus,* EF, *medio ejus puncto,* C, *describit.*

SIT EC vel CF $= a$, perpendiculum CB $= y$, AB $= x$: & propter similia triangula FBC, FEG, erit BF ($\sqrt{aa-yy}$). BC + CF ($y+a$) ::

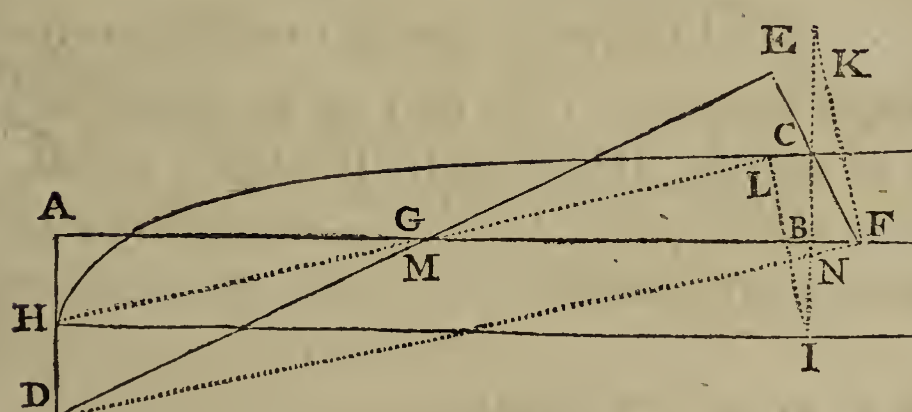
EF



EF $(2a.)$. EG + GF (AG + GF) seu AF. Quare $\frac{2ay+2aa}{\sqrt{aa-yy}}$ (= AF = AB + BF) $= x + \sqrt{aa-yy}$. Jam, multiplicando per $\sqrt{aa-yy}$, fit $2ay + 2aa = aa - yy + x\sqrt{aa-yy}$, seu $2ay + aa + yy = x\sqrt{aa-yy}$: & quadrando partes divisas per $\sqrt{a+y}$, ac ordinando, prodit $y^3 + 3ayy \begin{smallmatrix}+3aa\\+xx\end{smallmatrix} y \begin{smallmatrix}+a^3\\-axx\end{smallmatrix} = 0$.

Problemata Geometrica.

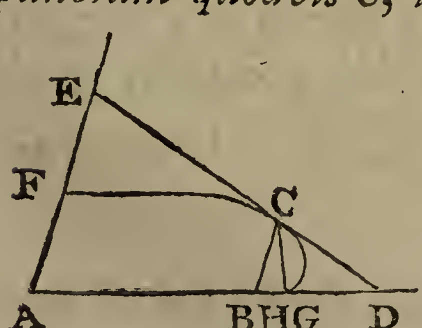
Idem aliter.



In BC cape hinc inde BI, & CK æquales CF; & age KF, HI, HC, ac DF; quarum HC ac DF occurrant ipsis AF & IK in M & N: & in HC demitte normalem IL. Eritque angulus $K = \frac{1}{2}$BCF $= \frac{1}{2}$EGF = GFD = AMH = MHI = CIL; adeoque triangula rectangula KBF, FBN, HLI & ILC similia. Dic ergo FC $= a$, HI $= x$, & IC $= y$; & erit BN $(2a - y.)$. BK (y) : : LC. LH : : CI$q(yy.)$ HIq $(xx.)$ adeoque $2axx - yxx = y^3$. Ex quâ æquatione facilè colligitur hanc curvam esse Cissoidem Veterum, ad circulum cujus centrum sit A ac radius AH, pertinentem.

PROB. XXXV.

Si datæ longitudinis recta ED, *angulum datum*, EAD, *subtendens, ita moveatur, ut termini ejus*, D *&* E, *anguli istius latera*, AD *&* AE, *perpetim contingant; proponatur Curvam* FCG *determinare, quam punctum quodvis* C, *in rectâ istâ*, ED, *datum, describit.*



A Dato puncto C age CB parallelam EA; & dic AB $= x$, BC $= y$, CE $= a$, & CD $= b$: & propter similia triangula DCB, DEA, erit EC. AB : : CD. BD. hoc est $a. x : : b.$ BD $= \frac{bx}{a}$. Præterea demisso perpendiculo CH, propter datum angulum DAE vel DBC, adeoque datam rationem laterum

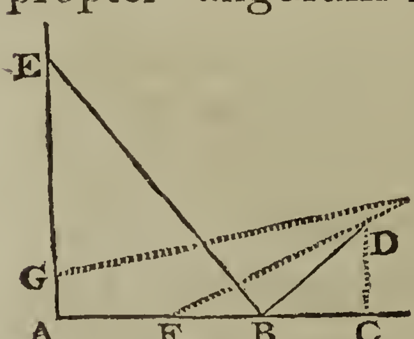
trianguli

 trianguli rectanguli BCH sit $a. e :: \text{BH}. \text{BH}$, & erit $\text{BH} = \frac{ey}{a}$. Aufer hanc de BD, & restabit $\text{HD} = \frac{bx - ey}{a}$. Jam in triangulo BCH, propter angulum rectum BHC, est $\text{BC}q - \text{BH}q = \text{CH}q$; hoc est, $yy - \frac{eeyy}{aa} = \text{CH}q$. Similiter in triangulo CDH, propter angulum CHD rectum, est $\text{CD}q - \text{CH}q = \text{DH}q$, hoc est $bb - yy + \frac{eeyy}{aa}$ $(= \text{HD}q = \frac{bx - ey}{a}$ quadrato$) = \frac{bbxx - 2bexy + eeyy}{aa}$. Et, per reductionem, $yy = \frac{2be}{aa}xy + \frac{aabb - bbxx}{aa}$: ubi cùm incognitæ quantitates sint duarum tantùm dimensionum, patet curvam esse Conicam sectionem. Præterea, extractâ radice, fit $y = \frac{bex \pm b\sqrt{eexx - aaxx + a^4}}{aa}$. Ubi in termino radicali coefficiens ipsius xx est $ee - aa$. Atqui erat $a. e :: \text{BC}. \text{BH}$; & BC necessariò major est linea quàm BH, nempe Hypotenusa trianguli rectanguli major latere; ergo a major quàm e, & $ee - aa$ negativa est quantitas; atque adeo curva erit Ellipsis.

PROB. XXXVI.

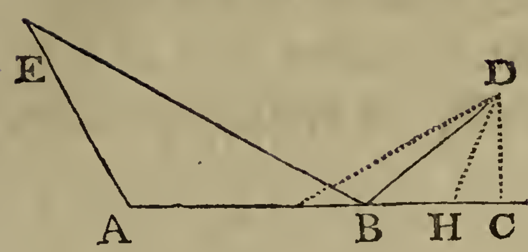
Si norma, EBD, *ita moveatur, ut ejus crus unum,* EB, *continuò subtendat angulum rectum* EAB, *dum terminus alterius cruris,* BD, *describat curvam aliquam lineam* FDG; *invenire lineam istam,* FDG, *quam punctum* D *describit.*

A Puncto D ad latus AC demitte perpendiculum DC; & dictis $\text{AC} = x$, & $\text{DC} = y$, atque $\text{EB} = a$, & $\text{BD} = b$; in triangulo BDC, propter angulum rectum ad C, est $\text{BC}q = \text{BD}q - \text{DC}q = bb - yy$.



Ergo $\text{BC} = \sqrt{bb - yy}$, & $\text{AB} = x - \sqrt{bb - yy}$. Præterea propter similia triangula BEA. DBC, est $\text{BD}. \text{DC} :: \text{EB}. \text{AB}$, hoc est $b. y :: a. x - \sqrt{bb - yy}$. Quare $bx - b\sqrt{bb - yy} = ay$, sive $bx - ay = b\sqrt{bb - yy}$. Et partibus quadratis ac debitè reductis, $yy = \frac{2abxy + b^4 - bbxx}{aa + bb}$. Et extractâ radice, $y = \frac{abx \pm bb\sqrt{aa + bb - xx}}{aa + bb}$. Unde patet iterum Curvam esse Ellipsin.

Hæc ita se habent, ubi anguli EBD & EAB recti sunt: sed si anguli isti sunt alterius cujusvis magnitudinis, dummodo sint æquales,

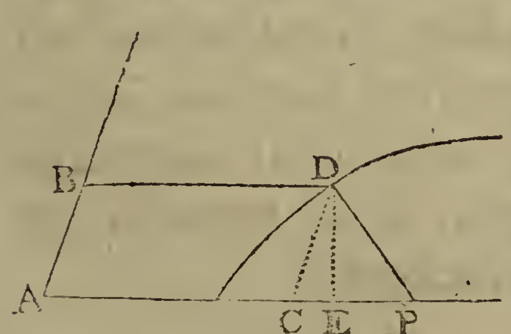


quales, fic procedendum erit. Demittatur DC perpendicularis ad AC ut antè, & agatur DH conftituens angulum DHA æqualem angulo HAE, puta obtufum: dictifque EB $= a$, BD $= b$, AH $= x$, & HD $= y$, propter fimilia triangula EAB, BHD, erit BD. DH : : EB. AB; hoc eft $b . y : : a .$ AB $= \frac{ay}{b}$. Aufer hanc de AH, & reftabit BH $= x - \frac{ay}{b}$. Præterea in triangulo DHC, propter omnes angulos datos, adeoque datam rationem laterum, affume DH ad HC in ratione quâvis datâ, puta b ad e; & cùm DH fit y, erit HC $= \frac{ey}{b}$, & HB $\times$ HC $= \frac{exy}{b} - \frac{aeyy}{bb}$. Denique per 12. II. Elem. in triangulo BHD, eft BDq = BHq + DHq + 2BH $\times$ HC, hoc eft $bb = xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} + yy + \frac{2exy}{b} - \frac{2aeyy}{bb}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{ay - ey \pm \sqrt{eeyy - bbyy + bbbb}}{b}$. Ubi cùm b fit major e, hoc eft $ee - bb$ negativa quantitas, patet iterum curvam effe Ellipfin.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. XXXVII.

In dato angulo, PAB, *actis utcunque rectis,* BD, PD, *in datâ ratione, hâc femper lege, ut* BD *fit parallela* AP, *&* PD *terminetur ad punctum,* P, *in rectâ* AP *datum; invenire locum puncti* D.



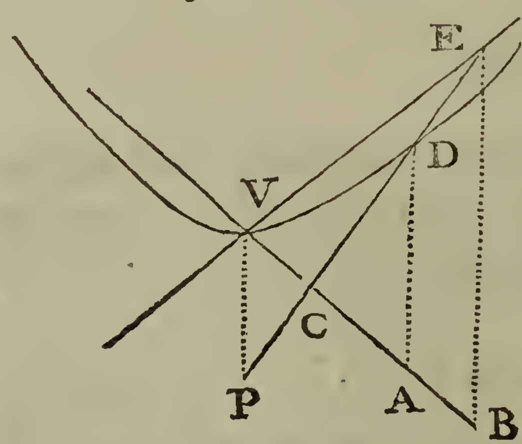
AGE CD parallelam AB, & DE perpendicularum AP; ac dic AP $= a$, CP $= x$, & CD $= y$; fitque BD ad PD in ratione d ad e; & erit AC, vel BD, $= a - x$, & PD $= \frac{ea - ex}{d}$. Sit infuper, propter datum angulum DCE, ratio CD ad CE, d ad f; & erit CE $= \frac{fy}{d}$, & EP $= x - \frac{fy}{d}$. Atqui propter angulos ad E rectos, eft CDq − CEq (= EDq) = PDq − EPq, hoc eft, $yy - \frac{ffyy}{dd} = \frac{eeaa - 2eeax + eexx}{dd} - xx + \frac{2fxy}{d} - \frac{ffyy}{dd}$. Ac deletis utrobique $- \frac{ffyy}{dd}$, terminifque ritè difpofitis, $yy = \frac{2fxy}{d} + \frac{eeaa - 2eeax + eexx - ddxx}{dd}$. Et, extractâ radice, $y = \frac{fx}{d} \pm \frac{\sqrt{eeaa - 2eeax \begin{matrix} + ee \\ - dd \\ + ff \end{matrix} xx}}{d}$. Ubi cùm x & y in æquatione penultimâ non nifi

CAPUT XIV. nisi ad duas dimensiones ascendant, locus puncti D erit Conica sectio; eaque Hyperbola, Parabola, vel Ellipsis, prout $ee - dd + ff$, (coefficiens ipsius xx in æquatione posteriori), sit majus, æquale, vel minus nihilo.

PROB. XXXVIII.

Rectis duabus, VE *&* VC, *positione datis, & ab aliâ rectâ,* PE, *circa polum positione datum,* P, *vertente, sectis utcunque in* C *&* E; *si recta intercepta,* CE, *dividatur in partes,* CD, DE, *rationem datam habentes, proponatur invenire locum puncti* D.

AGE VP, eique parallelas DA, EB occurrentes VC in A & B. Dic $VP = a$, $VA = x$, & $AD = y$: & cùm detur ratio CD ad DE, vel conversè ratio CD ad CE, hoc est ratio DA ad EB, sit ista ratio d ad e, & erit $EB = \frac{ey}{d}$. Præterea, cùm detur angulus EVB, adeoque ratio EB ad VB, sit ista ratio e ad f; & erit $VB = \frac{fy}{d}$. Denique, propter similia triangula



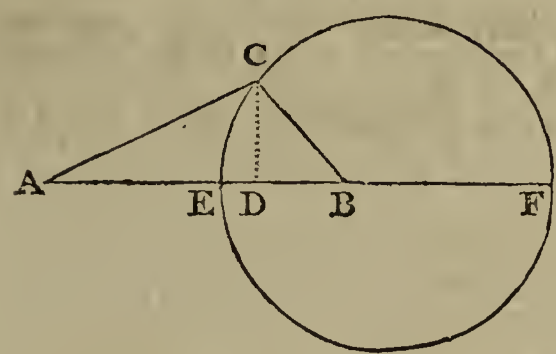
CEB, CDA, CPV, est EB.CB::DA.CA::VP.VC; & componendo, EB + VP. CB + VC:: DA + VP. CA + VC. Hoc est, $\frac{ey}{d} + a. \frac{fy}{d} :: y + a. x$. Ductisque extremis & mediis in se, $eyx + dax = fyy + fay$. Ubi cùm indefinitæ quantitates, x & y, non nisi ad duas dimensiones ascendant, sequitur curvam VD, in quâ punctum D perpetim reperitur, esse conicam sectionem, eamque Hyperbolam; quia una ex indefinitis quantitatibus, nempe x est unius tantùm dimensionis, & in termino exy multiplicatur per alteram indefinitam quantitatem y.

PROB. XXXIX.

Si rectæ duæ, AC, BC, *à duobus positione datis punctis,* A *&* B, *in datâ quâvis ratione ad tertium quodvis punctum,* C, *ducantur; invenire locum puncti concursûs* C.

JUnge AB; & ad hanc demitte normalem CD: dictisque $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$: erit $AC = \sqrt{xx + yy}$; $BD = a - x$; & $BC (= \sqrt{BDq + DCq})$ $= \sqrt{}$

$= \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Jam cùm detur ratio AC ad BC, sit ista d ad e; &, extremis & mediis in se ductis, erit $e\sqrt{xx+yy} = d\sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$. Et, per reductionem, $\sqrt{\frac{ddaa - 2ddax}{ee - dd} - xx} = y$. Ubi cùm xx sit negativum, & solâ unitate affectum, atque etiam angulus ADC rectus; patet curvam, in quâ punctum C locatur, esse circulum. Nempe in rectâ AB cape puncta E & F, ita ut sint $d.\ e :: $ AE. BE $::$ AF. BF, & erit EF circuli hujus diameter.

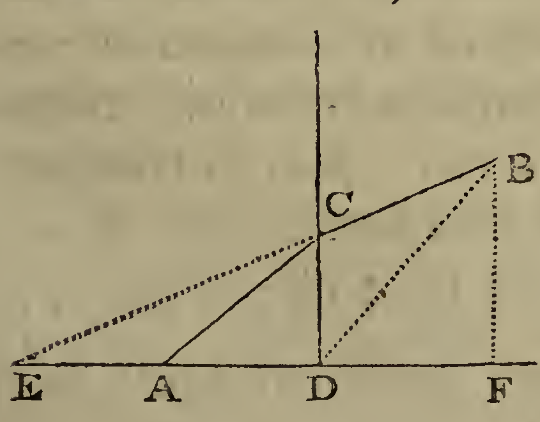


Et hinc è converso patet hoc Theorema: Quòd in circuli cujusvis diametro EF, infinitè productâ, datis utcunque duobus punctis, A & B, hâc lege, ut sit AE. AF $::$ BE. BF, & à punctis hisce actis duabus rectis, AC, BC, concurrentibus ad circulum in puncto quovis C; erit AC ad BC in datâ ratione AE ad BE.

PROB. XL.

Si punctum lucidum, A, *radios versus refringentem superficiem planam,* CD, *ejiciat; invenire radium,* AC, *cujus refractus,* CB, *impinget in datum punctum* B.

A Puncto isto lucido ad refringens planum demitte perpendiculum AD, & cum eo, utrinque producto, concurrat refractus radius BC in E, & perpendiculum à puncto B demissum, in F, & agatur BD; dictisque AD $= a$, DB $= b$, BF $= c$, DC $= x$, statue rationem sinuum incidentiæ & refractionis, hoc est sinuum angulorum CAD, CED, esse d ad e: & cùm EC & AC (ut notum est) sint in eâdem ratione, & AC sit $\sqrt{aa+xx}$, erit EC $= \frac{d}{e}\sqrt{aa+xx}$.



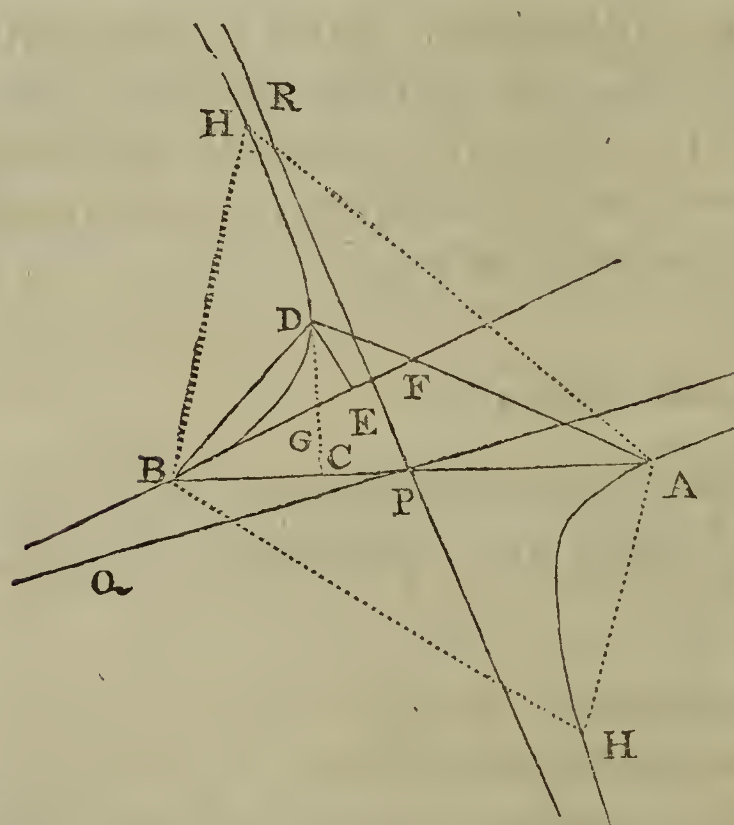
Præterea est ED $(= \sqrt{\text{EC}q - \text{CD}q}) = \sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx}$; & DF $= \sqrt{bb - cc}$; atque EF $= \sqrt{bb-cc} + \sqrt{\frac{ddaa + ddxx}{ee} - xx}$. Deniquè, propter similia triangula ECD, EBF, est ED. DC $::$ EF. FB; &, ductis

extremorum

Caput XIV. extremorum & mediorum valoribus in se, $c\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx} = x\sqrt{bb-cc}+x\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx}$, sive $\overline{c-x}\sqrt{\frac{ddaa+ddxx}{ee}-xx} = x\sqrt{bb-cc}$. Et, partibus æquationis quadratis & ritè dispositis, $x^4 - 2ex^3 + \frac{\left.\begin{array}{l} ddcc \\ +ddaa \\ -eebb \end{array}\right. xx - 2ddaacx + ddaacc}{dd-ee} = 0$.

PROB. XLI.

Invenire locum verticis trianguli, D, *cujus basis,* AB, *datur, & anguli ad basem,* DAB, DBA, *datam habent differentiam.*



UBI angulus ad Verticem, sive, quod perinde est, ubi summa angulorum ad basem datur, docuit Euclides locum verticis esse circumferentiam circuli; III. 29. Euclid. proposuimus igitur inventionem loci ubi differentia angulorum ad basem datur. Sit angulus DBA major angulo DAB, sitque ABF eorum data differentia, rectâ BF occurrente AD in F. Insuper ad BF demittatur normalis DE, ut & ad AB normalis DC, occurrens BF in G. Dictisque AB $= a$, AC $= x$, & CD $= y$, erit BC $= a - x$. Jam in triangulo BCG, cùm dentur omnes anguli, dabitur ratio laterum, BC & GC; sit ista d ad a, & erit CG $= \frac{aa-ax}{d}$. Aufer hanc de DC, sive y, & restabit DG $= \frac{dy-aa+ax}{d}$. Præterea, propter similia triangula BGC, DGE, est BG. BC :: DG. DE. Est autem in triangulo BGC, $a.d$::CG. BC. Adeoque $aa.\,dd$ :: CGq. BCq; & componendo, $aa+dd.\,dd$ :: BGq. BCq. Et, extractis radicibus, $\sqrt{aa+dd}.\,d$ (:: BG. BC) :: DG. DE. Ergo DE $= \frac{dy-aa+ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Adhæc, cùm angulus ABF sit differentia angulorum BAD & ABD, adeoque anguli BAD & FBD æquentur, similia erunt

4 triangula

triangula rectangula CAD & EBD, & proinde latera proportionalia DA. DC : : DB. DE. Sed eſt DC $= y$; DA $(= \sqrt{ACq + DCq}) = \sqrt{xx+yy}$; DB $(= \sqrt{BCq + DCq}) = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$; & ſuprà erat DE $= \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Quare eſt $\sqrt{xx+yy}.\, y :: \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}.\, \frac{dy - aa + ax}{\sqrt{aa+dd}}$. Et extremorum & mediorum quadratis in ſe ductis, $aayy - 2axyy + xxyy + y^4 = \frac{ddxxyy + ddy^4 - 2aadxxy - 2aady^3 + 2adyx^3 + 2adxy^3 + a^4xx + a^4yy - 2a^3x^3 - 2a^3xyy + aax^4 + aaxxyy}{aa + dd}$.

Duc omnes terminos in $aa+dd$, & prodeuntes redige in debitum ordinem, & orietur $x^4 \begin{array}{l} -2a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x^3 \begin{array}{l} -2dy \\ +aa \end{array} xx \begin{array}{l} +\frac{2d}{a}y^3 \\ +\frac{2dd}{a}yy \end{array} x \begin{array}{l} -ddyy \\ -2dy^3 \\ -y^4 \end{array} = 0$. Divide hanc æquationem per $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array}$, & orietur $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -yy \\ -dy \end{array} = 0$.

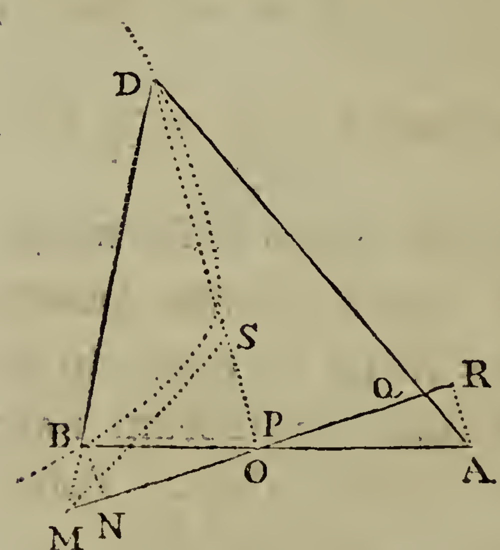
Duæ itaque prodierunt æquationes in ſolutione hujus Problematis. Prior, $xx - ax \begin{array}{l} +dy \\ +yy \end{array} = 0$, eſt ad circulum, locum nempe puncti D, ubi angulus FBD ſumitur ad alias partes rectæ BF quàm in figurâ deſcribitur, exiſtente angulo ABF ſummâ angulorum DAB, DBA ad baſem, adeoque angulo ADB ad verticem dato. Poſterior, $xx \begin{array}{l} -a \\ +\frac{2d}{a}y \end{array} x \begin{array}{l} -dy \\ -yy \end{array} = 0$ eſt, ad Hyperbolam, locum puncti D, ubi angulus FBD ſitum obtinet à rectâ BF quem in Figurâ deſcripſimus: hoc eſt, ita ut angulus ABF ſit differentia angulorum DAB, DBA ad baſem. Hyperbolæ autem hæc eſt determinatio. Biſeca AB in P. Age PQ conſtituentem angulum BPQ æqualem dimidio anguli ABF. Huic erige normalem PR, & erunt PQ, PR Aſſymptoti hujus Hyperbolæ, & B punctum per quod Hyperbola tranſibit.

Et hinc prodit tale Theorema. *Hyperbolæ rectangulæ diametro quâvis* AB *ductâ, & à terminis ejus ad Hyperbolæ puncta duo quævis,* D *&* H, *ductis rectis* AD, BD, AH, BH; *hæ rectæ angulos,* DAH, DBH, *ad terminos diametri conſtituent æquales.*

Idem breviùs.

Ad PROB. XXIV. *Regulam* de commodâ terminorum, ad ineundum calculum, electione tradidi; ubi obvenit ambiguitas in electione. Hîc differentia angulorum ad baſem eodem modo ſe habet

CAPUT XIV. habet ad utrumque angulum; &, in constructione Schematis, æque potuit addi ad angulum minorem DAB, ducendo ab A rectam ipsi BF parallelam, ac subtrahi ab angulo majori DBA ducendo rectam BF. Quamobrem nec addo nec subtraho; sed dimidium ejus uni angulorum addo, alteri subtraho. Deinde, cùm etiam ambiguum sit utrum AC vel BC pro termino indefinito, cui ordinatim applicata DC insistit, adhibeatur, neutrum adhibeo; sed biseco AB in P, & adhibeo PC: vel potiùs actâ MPQ constituente hinc inde angulos, APQ, BPM, æquales dimidio differentiæ angulorum ad basem, ita ut ea cum rectis



AD, BD constituat angulos, DQP, DMP, æquales; ad MQ demitto normales, AR, BN, DO, & adhibeo DO pro ordinatim applicatâ, ac PO pro indefinitâ lineâ cui insistit. Voco itaque $PO=x$, $DO=y$, AR, vel BN, $=b$, & PR, vel PN, $=c$. Et propter similia triangula BNM, DOM, erit BN. DO :: MN. MO. Et dividendo, DO−BN $(y-b)$. DO (y) :: MO−MN (ON sive $c-x$). MO. Quare $MO=\frac{cy-xy}{y-b}$. Similiter, ex alterâ parte, propter similia triangula ARQ, DOQ, erit AR. DO :: RQ. QO : & componendo, DO + AR $(y+b)$. DO (y) :: QO + RQ (OR sive $c+x$). QO. Quare $QO=\frac{cy+xy}{y+b}$. Denique, propter æquales angulos DMQ, DQM, æquantur MO & QO; hoc est, $\frac{cy-xy}{y-b}=\frac{cy+xy}{y+b}$. Divide omnia per y, & multiplica per denominatores, & orietur $cy+cb-xy-xb=cy-cb+xy-xb$, sive $cb=xy$, notissima æquatio ad Hyperbolam.

Quin etiam locus puncti D sine calculo Algebraico prodire potuit. Est enim ex superioribus DO−BN. ON :: DO. MO(QO) :: DO + AR. OR. Hoc est DO − BN. DO + BN :: ON. OR; & mixtim, DO. BN :: $\frac{ON+OR}{2}$ (NP). $\frac{OR-ON}{2}$ (OP). Adeoque DO × OP = BN × NP.

PROB. XLII.

Locum verticis trianguli invenire cujus basis datur, & angulorum ad basem unus dato angulo differt à duplo alterius.

IN Schemate novissimo superioris Problematis sit ABD triangulum istud, AB basis bisecta in P, APQ vel BPM triens anguli dati,

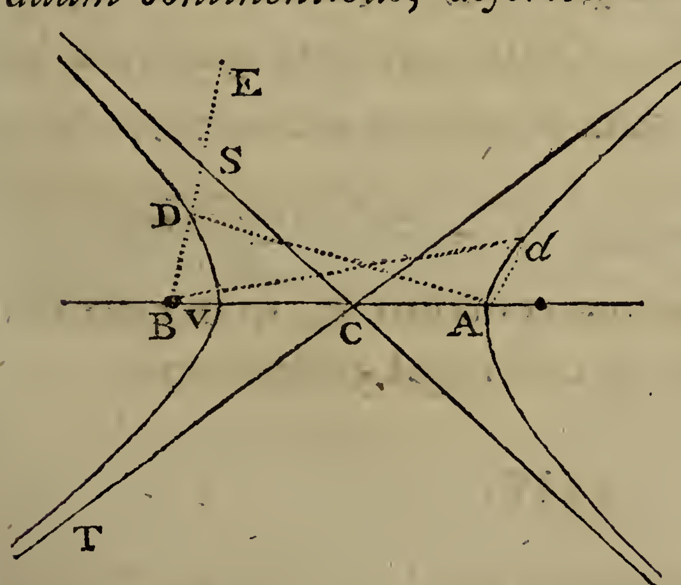
dati, quo angulus DBA excedit duplum anguli DAB: & angulus DMQ erit duplus anguli DQM. Ad MQ demitte perpendicula, AR, BN, DO; & angulum DMQ bifeca rectâ MS occurrente DO in S; & erunt triangula DOQ, SOM fimilia; adeoque OQ. OM :: OD. OS; & dividendo, OQ − OM. OM :: SD. OS :: (per 3. VI. Elem.) DM. OM. Quare (per 9. V. Elem.) OQ − OM = DM. Dictis jam PO $= x$, OD $= y$, AR, vel BN, $= b$, & PR, vel PN, $= c$, erit, ut in fuperiori Problemate, OM $= \frac{cy - xy}{y - b}$, et OQ $= \frac{cy + xy}{y + b}$; adeoque OQ − OM $= \frac{-2bcy + 2xyy}{yy - bb}$. Pone jam DO$q$ + OMq = DMq; hoc eft, $yy + \frac{cc - 2cx + xx}{yy - 2by + bb} yy = \frac{4bbcc - 8bcxy + 4xxyy}{y^4 - 2bbyy + b^4} yy$. Et, per debitam reductionem, orietur tandem

$$y^4 * \begin{array}{l} +cc \\ -2bb \\ -2cx \\ -3xx \end{array} yy \begin{array}{l} +2bxx \\ +4bcx \\ +2bcc \end{array} y \begin{array}{l} +b^4 \\ -3bbcc \\ -2bbcx \\ +bbxx \end{array} = 0.$$

Divide omnia per $y - b$, & evadet $y^3 + byy \begin{array}{l} -bb \\ +cc \\ -2cx \\ -3xx \end{array} y \begin{array}{l} -b^3 \\ +3bcc \\ +2bcx \\ -bxx \end{array} = 0$. Quare punctum D eft ad curvam trium dimenfionum; quæ tamen evadit Hyperbola, ubi angulus BPM ftatuitur nullus, five angulorum ad bafem unus, DBA, duplus alterius, DAB. Tunc enim, BN five b evanefcente, æquatio fiet $yy = 3xx + 2cx - cc$.

Problemata Geometrica.

Ex hujus autem æquationis conftructione tale elicitur Theorema. *Si centro* C, *Afymptotis* CS, CT, *angulum* SCT 120 *graduum continentibus, defcribatur Hyperbola quævis* DV, *cujus femiaxis fint* CV, CA: *produc* CV *ad* B, *ut fit* VB = VC; *&* *ab* A *&* B *actis utcunque rectis*, AD, BD, *concurrentibus ad Hyperbolam, erit angulus* BAD *dimidium anguli* ABD *triens vero anguli* ADE, *quem recta* AD *comprehendit cum* BD *producta. Hoc intelligendum eft de Hyperbolâ quæ tranfit per punctum* V. *Quòd fi ab iifdem punctis*, A *&* B, *actæ rectæ*, Ad, Bd, *conveniant ad conjugatam Hyperbolam, quæ tranfit per* A: *tunc externorum angulorum trianguli ad bafem ille ad* B *erit duplus alterius ad* A.

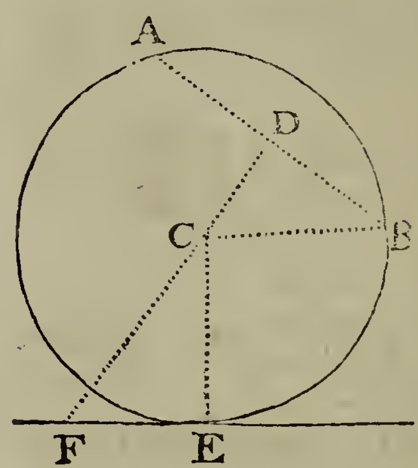


CAPUT XIV.

PROB. XLIII.

Circulum per data duo puncta describere, qui rectam positione datam continget.

SUnto A & B puncta data, & EF recta positione data, & requiratur circulum ABE, per ista puncta describere, qui contingat rectam istam FE. Junge AB, & eam biseca in D. Ad D erige normalem, DF, occurrentem rectæ FE in F, & circuli centrum incidet in hanc novissimè ductam DF, puta in C. Junge ergo CB, & ad FE demitte CE normalem; eritque E punctum contactûs, ac CB, CE æquales inter se, utpote radii circuli quæsiti. Jam cùm puncta, A, B, D, & F, dentur, esto DB $= a$, ac DF $= b$; & ad determinandum centrum circuli quæratur DC, quam ideo dic x. Jam in triangulo CDB, propter angulum ad D rectum, est $\sqrt{DBq + DCq}$, hoc est $\sqrt{aa + xx}$, $=$ CB. Est & DF $-$ DC, sive $b - x$, $=$ CF. Et in triangulo rectangulo CFE cùm dentur anguli, dabitur ratio laterum CF & CE; sit ista d ad e; & erit CE $= \frac{e}{d} \times$ CF hoc est $= \frac{eb - ex}{d}$. Pone jam CB & CE, (radios nempe circuli quæsiti), æquales inter se; & habebitur æquatio $\sqrt{aa + xx} = \frac{eb - ex}{d}$. Cujus partibus quadratis & multiplicatis per dd, oritur $aadd + ddxx = eebb - 2eebx + eexx$. Sive $xx = \frac{+eebb - 2eebx - aadd}{dd - ee}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{-eeb + d\sqrt{eebb + eeaa - ddaa}}{dd - ee}$. Inventa est ergo longitudo DC, adeoque centrum C, quo circulus per puncta A & B describendus est, ut contingat rectam FE.

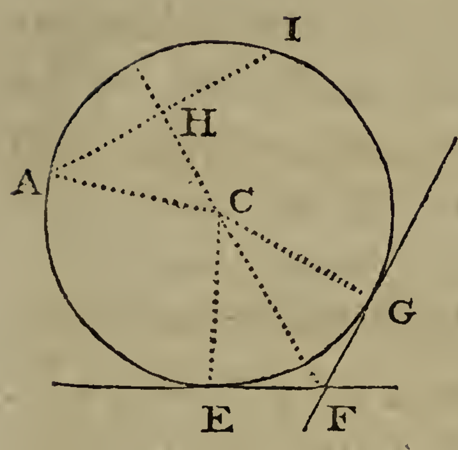


PROB. XLIV.

Circulum per datum punctum describere, qui rectas duas positione datas continget.

Resolvitur ut Prop. 43. Nam dato puncto A, datur & aliud punctum B.

ESTO datum punctum A, & sint EF, FG rectæ duæ positione datæ, & AEG circulus quæsitus easdem contingens, ac transiens per punctum istud A. Rectâ CF bisecetur angulus EFG, & centrum



centrum circuli in ipſâ reperietur. Sit iſtud C; & ad EF & FG demiſſis perpendiculis, CE, CG, erunt E ac G puncta contactûs. Jam in triangulis CEF, CGF, cùm anguli ad E & G, ſint recti, & anguli ad F ſemiſſes ſint anguli EFG, dantur omnes anguli adeoque ratio laterum CF & CE, vel CG. Sit iſta d ad e, & ſi ad determinandum centrum circuli quæſiti C, aſſumatur CF $= x$, erit CE vel CG $= \frac{ex}{d}$. Præterea ad FC demitte normalem AH, & cùm punctum A detur, dabuntur etiam rectæ AH & FH. Dicantur iſtæ a & b, & ab FH, ſive b, ablato FC, ſive x, reſtabit CH$=b-x$. Cujus quadrato, $bb-2bx+xx$, adde quadratum ipſius AH, ſive aa, & ſumma $aa+bb-2bx+xx$, erit ACq per 47. I. Elem. ſiquidem angulus AHC ex Hypotheſi ſit rectus. Pone jam radios circuli, AC & CG, inter ſe æquales; hoc eſt pone æqualitatem inter eorum valores, vel inter quadrata eorum; & habebitur æquatio $aa+bb-2bx+xx=\frac{eexx}{dd}$. Aufer utrobique xx, & mutatis omnibus ſignis, erit $-aa-bb+2bx=xx-\frac{eexx}{dd}$. Duc omnia in dd, ac divide per $dd-ee$, & evadet $\frac{-aadd-bbdd+2bddx}{dd-ee}=xx$, Cujus æquationis extracta radix eſt $x=\frac{bdd-d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$. Inventa eſt itaque longitudo FC, adeoque punctum C, quod centrum eſt circuli quæſiti.

Si inventus valor x, ſive FC, auferatur de b, ſive HF, reſtabit HC$=\frac{-eeb+d\sqrt{eebb+eeaa-ddaa}}{dd-ee}$, eadem æquatio quæ in priori problemate prodiit, ad determinandum longitudinem DC.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

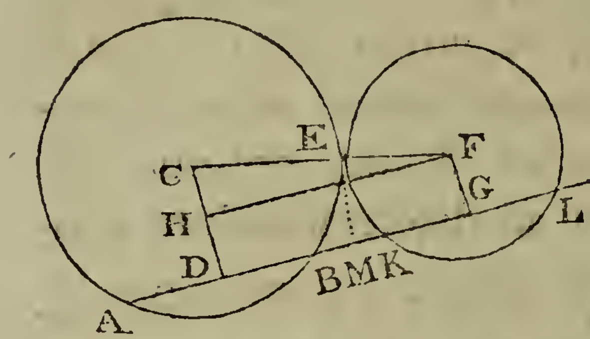
PROB. XLV.

Circulum per data duo puncta deſcribere, qui alium circulum poſitione datum continget. Vide Prop. 21.

SINT A, B puncta data, EK circulus poſitione & magnitudine datus, F centrum ejus, ABE circulus quæſitus per puncta A & B tranſiens, ac tangens alterum circulum in E, & C centrum ejus. Ad AB productam demitte perpendicula CD, & FG; & age

CE,

 CF, ſecantem circulos in puncto contactûs E, ac age etiam FH parallelam DG, & occurrentem CD in H. His conſtructis dic AD vel DB $=a$, DG vel HF $=b$, GF $=c$, & EF (radium nempe circuli dati) $=d$, atque DC $=x$: & erit CH (=CD − FG) $=x-c$; & CFq (= CHq + HFq) $= xx - 2cx + cc + bb$; atque CBq(=CDq+DBq) $=xx+aa$; adeoque CB vel CE $=\sqrt{xx+aa}$. Huic adde EF, & habebitur CF $=d+\sqrt{xx+aa}$; cujus quadratum $dd+aa+xx+2d\sqrt{xx+aa}$, æquatur valori ejuſdem CFq prius invento, nempe $xx-2cx+cc+bb$. Aufer utrobique xx, & reſtabit $dd+aa+2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-2cx$. Aufer inſuper $dd+aa$, & habebitur $2d\sqrt{xx+aa}=cc+bb-dd-aa-2cx$. Jam, abbreviandi cauſâ, pro $cc+bb-dd-aa$, ſcribe $2gg$, & habebitur $2d\sqrt{xx+aa}=2gg-2cx$, ſive $d\sqrt{xx+aa}=gg-cx$. Et partibus æquationis quadratis, erit $ddxx+ddaa=g^4-2ggcx+ccxx$. Utrinque aufer $ddaa$ & $ccxx$, & reſtabit $ddxx-ccxx=g^4-ddaa-2ggcx$. Et partibus æquationis diviſis per $dd-cc$, habebitur $xx=\frac{g^4-ddaa-2ggcx}{dd-cc}$. Atque, per extractionem radicis affectæ, $x=\frac{-ggc+\sqrt{g^4dd-d^4aa+ddaacc}}{dd-cc}$.



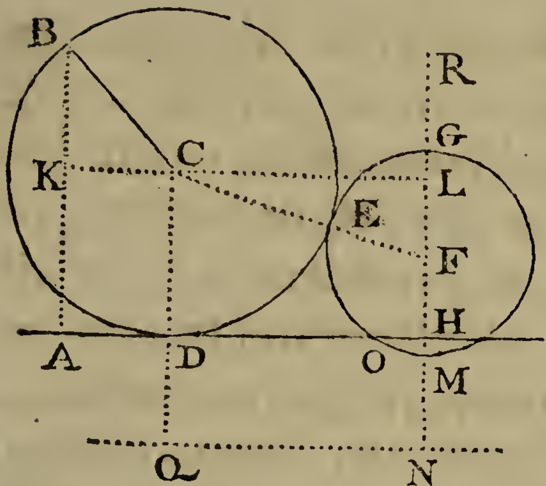
Inventâ igitur x, ſive longitudine DC, biſeca AB in D, & ad D erige perpendiculum DC $=\frac{-ggc+d\sqrt{g^4-aadd+aacc}}{dd-cc}$. Dein centro C, per punctum A vel B, deſcribe circulum ABE; nam hic continget alterum circulum EK, & tranſibit per utrumque punctum A, E. Q. E. F.

PROB. XLVI.

Circulum per datum punctum deſcribere qui datum circulum, & rectam lineam poſitione datam continget.

SIT circulus iſte deſcribendus BD, ejus centrum C, punctum per quod deſcribi debet B, recta quam continget AD, punctum contactûs D, circulus quem continget GEM, ejus centrum F, & punctum contactûs E. Junge CB, CD, CF; & CD erit perpendicularis ad AD, atque CF ſecabit circulos in puncto contactûs E.

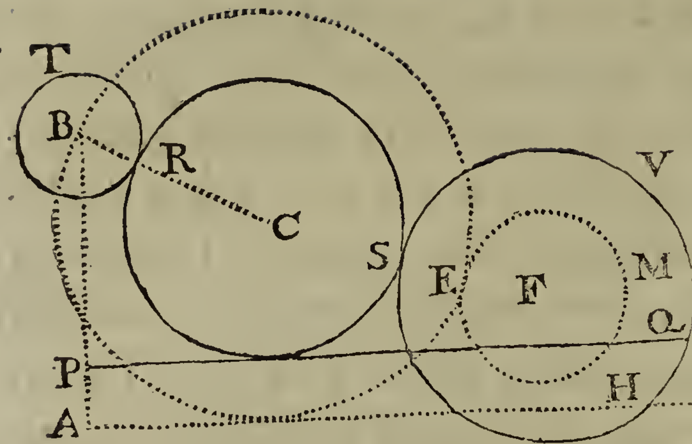
Produc



Produc CD ad Q, ut sit DQ=EF; & per Q age QN parallelam AD. Denique à B & F ad AD & QN demitte perpendicula BA, FN; & à C ad AB & FN perpendicula CK, CL. Et cùm sit BC=CD vel AK, erit BK (=AB−AK)=AB−BC, adeoque $BKq=ABq-2AB\times BC+BCq$. Aufer hoc de BCq, & restabit $2AB\times BC-ABq$, pro quadrato de CK. Est itaque $AB\times\overline{2BC-AB}=CKq$; & eodem argumento erit $FN\times\overline{2FC-FN}=CLq$, atque adeo $\frac{CKq}{AB}+AB=2BC$, & $\frac{CLq}{FN}+FN=2FC$. Quamobrem, si pro AB, CK, FN, KL, & CL, scribas a, y, b, c, & $c-y$, erit $\frac{yy}{2a}+\frac{1}{2}a=BC$, & $\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b=FC$. De FC aufer BC, & restabit $EF=\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$. Jam si puncta, ubi FN producta secat rectam AD & circulum GEM, notentur literis H, G, & M; & in HG producta capiatur HR=AB; cùm sit HN (=DQ=EF)=GF, addendo FH utrinque, erit FN=GH; adeoque AB−FN (=HR−GH)=GR; & AB−FN+2EF, hoc est $a-b+2EF=RM$; & $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+EF=\frac{1}{2}RM$. Quare, cùm suprà fuerit $EF=\frac{cc-2cy+yy}{2b}+\frac{1}{2}b-\frac{yy}{2a}-\frac{1}{2}a$, si hoc scribatur pro EF, habebitur $\frac{1}{2}RM=\frac{cc-2cy+yy}{2b}-\frac{yy}{2a}$. Dic ergo RM d, & erit $d=\frac{cc-2cy+yy}{b}-\frac{yy}{a}$. Duc omnes terminos in a & b, & orietur $abd=acc-2acy+ayy-byy$. Aufer utrinque $acc-2acy$, & restabit $abd-acc+2acy=ayy-byy$. Divide per $a-b$, & orietur $\frac{abd-acc+2acy}{a-b}=yy$. Et, extractâ radice $y=\frac{ac}{a-b}\pm\sqrt{\frac{aabd-abbd+abcc}{aa-2ab+bb}}$. Quæ conclusiones sic abbreviari possunt. Pone $c.\ b::d.\ e$; dein $a-b.\ a::c.\ f$; & erit $fe-fc-2fy=yy$, sive $y=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$. Invento y, sive KC vel AD, cape $AD=f\pm\sqrt{ff+fe-fc}$; ad D erige perpendiculum $DC\ (=BC)=\frac{KCq}{2AB}+\frac{1}{2}AB$; & centro C, intervallo CB vel CD, describe circulum BDE; nam hic transiens per datum punctum B, tanget rectam AD in D, & circulum GEM in E. Q. E. F.

Hinc circulus etiam describi potest, qui duos datos circulos & rectam positione datam continget. Sint enim circuli dati RT, SV; eorum centra B, F; & recta positione data PQ. Centro F, radio

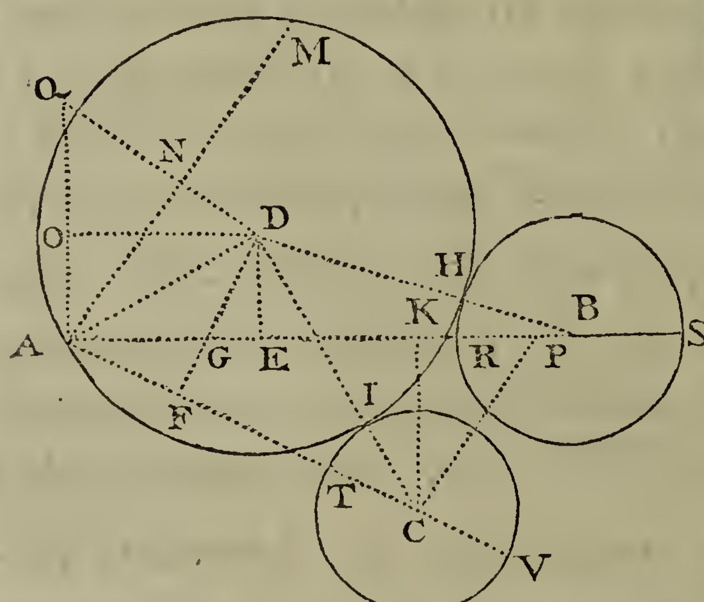
CAPUT XIV.



FS − BR deſcribe circulum EM. A puncto B, ad rectam PQ demitte perpendiculum BP; & producto eo ad A, ut ſit PA = BR, per A age AH parallelam PQ; & circulus deſcribatur qui tranſeat per punctum B, tangatque rectam AH, & circulum EM. Sit ejus centrum C; junge BC ſecantem circulum RT in R; & eodem centro C, radio vero CR, deſcriptus circulus, RS, tanget circulos RT, SV, & rectam PQ, ut ex conſtructione manifeſtum eſt.

PROB. XLVII.

Circulum deſcribere qui per datum punctum tranſibit, & alios duos poſitione, & magnitudine datos circulos continget.



ESTO datum punctum A, ſintque circuli poſitione, & magnitudine dati TIV, RHS, centra eorum C & B, circulus deſcribendus AIH, centrum ejus D, & puncta contactûs I & H. Junge AB, AC, AD, DB, ſecetque AB producta circulum RHS in punctis R & S, & AC producta circulum TIV in T & V. Et à punctis D & C demiſſis perpendiculis, DE ad AB, & DF ad AC (occurrente AB in G) atque CK ad AB; in triangulo ADB erit $ADq - DBq + ABq = 2AE \times AB$, per 13. II. Elem. Sed $DB = AD + BR$, adeoque $DBq = ADq + 2AD \times BR + BRq$. Aufer hoc de $ADq + ABq$, & reſtabit $ABq - 2AD \times BR - BRq$, pro $2AE \times AB$. Eſt & $ABq - BRq = \overline{AB - BR} \times \overline{AB + BR} = AR \times AS$. Quare $AR \times AS - 2AD \times BR = 2AE \times AB$. Et $\frac{AR \times AS - 2AB \times AE}{BR} = 2AD$.

Et ſimili ratiocinio in triang. ADC emerget iterum $2AD = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Quare $\frac{RAS - 2BAE}{BR} = \frac{TAV - 2CAF}{CT}$. Et $\frac{TAV}{CT} - \frac{RAS}{BR} + \frac{2BAE}{BR} = \frac{2CAF}{CT}$.

$\frac{2CAF}{CT}$. Et $\overline{\frac{TAV}{CT}-\frac{RAS}{BR}+\frac{2BAE}{BR}}\times\frac{CT}{2AC}=AF$. Unde, cùm ſit AK.AC::AF.AG, erit $AG=\overline{\frac{TAV}{CT}-\frac{RAS}{BR}+\frac{2BAE}{BR}}\times\frac{CT}{2AK}$. Aufer hoc de AE, ſive $\frac{2KAE}{CT}\times\frac{CT}{2AK}$, & reſtabit $GE=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}-\frac{2BAE}{BR}+\frac{2KAE}{CT}}\times\frac{CT}{2AK}$. Unde, cùm ſit KC.AK::GE.DE, erit $DE=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}-\frac{2BAE}{BR}+\frac{2KAE}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$. In AB cape AP, quæ ſit ad AB ut CT ad BR; & erit $\frac{2PAE}{CT}=\frac{2BAE}{BR}$; adeoque $\frac{2PK\times AE}{CT}=\frac{2BAE}{BR}-\frac{2KAE}{CT}$: adeoque $DE=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}-\frac{2PK\times AE}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$. Ad AB erige ergo perpendiculum $AQ=\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$, & in eo cape $QO=\frac{PK\times AE}{KC}$; & erit AO = DE.

Problemata Geometrica.

Junge DO, DQ, CP; & triangula DOQ, CKP erunt ſimilia, quippe quorum anguli ad O & K ſunt recti, & latera (KC.PK:: AE, vel DO.QO) proportionalia. Anguli ergo OQD, KPC æquales ſunt, & proinde QD perpendicularis eſt ad CP. Quamobrem, ſi agatur AN parallela CP, & occurrens QD in N, angulus ANQ erit rectus, & triangula AQN, PCK ſimilia; adeoque PC.KC:: AQ.AN. Unde, cùm AQ ſit $\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}}\times\frac{CT}{2KC}$, AN erit $\overline{\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}}\times\frac{CT}{2PC}$. Produc AN ad M, ut ſit NM = AN; & erit AD = DM, adeoque circulus quæſitus tranſibit per punctum M. Cùm ergo punctum M datum ſit, ex his, ſine ulteriori Analyſi, talis emergit Problematis reſolutio.

In AB cape AP, quæ ſit ad AB ut CT ad BR; junge CP, eique parallelam age AM, quæ ſit ad $\frac{RAS}{BR}-\frac{TAV}{CT}$, ut CT ad PC: & ope *Prob.* 45. per puncta A & M deſcribe circulum, AIHM, qui tangat alterutrum circulorum, TIV, RHS; & idem circulus tanget utrumque. Q.E.F.

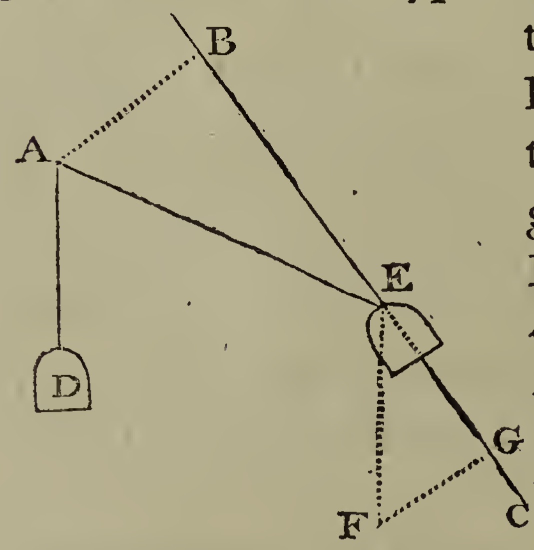
Et hinc circulus etiam deſcribi poteſt, qui tres circulos, poſitione & magnitudine datos, continget. Sunto trium datorum circulorum radii A, B, C, & centra D, E, F. Centris E & F, radiis $B\pm A$, $C\pm A$ deſcribantur duo circuli, & tertius circulus qui hoſce tangat, tranſeatque per punctum D. Sit hujus radius G, & centrum H; & eodem centro H, radio $G\pm A$, deſcriptus circulus continget tres primos circulos, ut fieri oportuit.

CaputXIV.

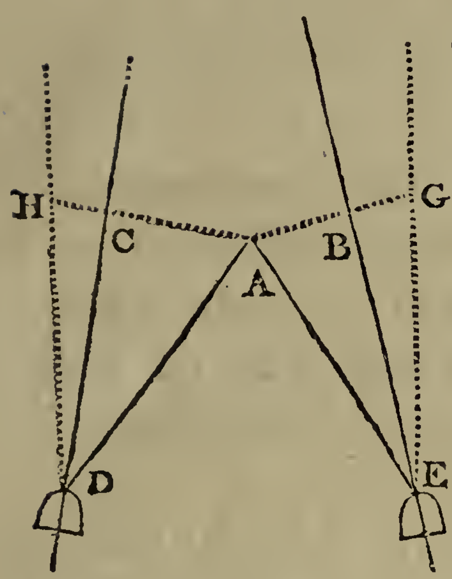
PROB. XLVIII.

Si ad extremitates fili, DAE, *circa paxillum*, A, *labentis, appendantur pondera duo*, D *&* E, *quorum pondus* E *labitur per lineam obliquam*, BG: *Invenire locum ponderis* E, *ubi pondera hæc in æquilibrio consistunt.*

PUTA factum; & ipsi AD age parallelam EF quæ sit ad AE, ut pondus E ad pondus D. Et à punctis A & F ad lineam BG demitte perpendicula AB, FG. Jam cùm pondera ex Hypothesi sint ut lineæ AE, EF, exponantur pondera per lineas istas; pondus D per lineam AE, & pondus E per lineam EF. Ergo Corpus E proprii ponderis vi directâ EF tendit versus F; & vi obliquâ EG tendit versus G. Et idem Corpus E ponderis D vi directâ AE trahitur versus A; & vi obliquâ BE trahitur versus B. Cùm itaque pondera se mutuò sustineant in æquilibrio, vis, quâ pondus E trahitur versus B, æqualis esse debet vi contrariæ, quâ tendit versus G; hoc est BE æqualis esse debet ipsi EG. Jam verò datur ratio AE ad EF ex Hypothesi; &, propter datum angulum FEG, datur etiam ratio FE ad EG, cui BE æqualis est. Ergo datur ratio AE ad BE. Datur etiam AB longitudine. Et inde triangulum ABE, & punctum E, facilè dabitur. Nempe dic $AB = a$, $BE = x$, & erit $AE = \sqrt{aa+xx}$. Sit insuper AE ad BE in datâ ratione d ad e; & erit $e\sqrt{aa+xx} = dx$. Et, partibus æquationis quadratis & reductis, $eeaa = ddxx - eexx$, sive $\frac{ea}{\sqrt{dd-ee}} = x$. Inventa est igitur longitudo BE, quæ determinat locum ponderis E. Q.E.F.



Quòd si pondus utrumque per lineam obliquam descendat, Computum sic institui potest. Sint CD, BE obliquæ lineæ, positione datæ, per quas pondera ista, D & E, descendunt. A paxillo A ad has lineas demitte perpendicula, AC, AB; iisque productis occurrant, in punctis G & H, lineæ EG, DH, à ponderibus perpendiculariter ad Horizontem erectæ; & vis quâ pondus E conatur descendere



defcendere juxta lineam perpendicularem, hoc eft tota gravitas ipfius E, erit ad vim quâ pondus idem conatur defcendere juxta lineam obliquam BE, ut GE ad BE; atque vis, quâ conatur juxta lineam iftam obliquam BE defcendere, erit ad vim quâ conatur juxta lineam AE defcendere, hoc eft ad vim quâ filum AE diftenditur, ut BE ad AE. Adeoque gravitas ipfius E erit ad tenfionem fili AE ut GE ad AE. Et eâdem ratione gravitas ipfius D erit ad tenfionem fili AD ut HD ad AD. Sit itaque fili totius, DA+AE, longitudo c; fitque pars ejus AE $= x$; & erit altera pars AD $= c-x$. Et quoniam eft AE$q-$AB$q=$BEq; & AD$q-$AC$q =$ CDq; fit infuper AB $= a$, & AC $= b$; & erit BE $= \sqrt{xx-aa}$ & CD $=$ $\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Adhæc, cùm triangula, BEG, CDH, dentur fpecie, fit BE.EG::f.E; & CD.DH::$f.g$; & erit EG $= \frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}$; & DH $= \frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}$. Quamobrem cùm fit GE. AE :: pondus E. tenfionem AE; et HD. AD :: pondus D. tenfionem AD, & tenfiones iftæ æquentur inter fe, erit $\dfrac{Ex}{\frac{E}{f}\sqrt{xx-aa}}$ = tenfioni AE = tenfioni AD $= \dfrac{Dc-Dx}{\frac{g}{f}\sqrt{xx-2cx+cc-bb}}$. Cujus æquationis reductione provenit

$$gx\sqrt{xx-2cx+cc-bb} = \overline{Dc-Dx}\sqrt{xx-aa};\ \text{five}\ \begin{matrix}gg\\-DD\end{matrix}x^4\ \begin{matrix}-2ggc\\+2DDc\end{matrix}x^3\ \begin{matrix}+ggcc\\-ggbb\\-DDcc\\+DDaa\end{matrix}xx$$

$$-2DDcaax + DDccaa = 0.$$

Si cafum defideras quo hoc Problema per Regulam & circinum conftrui queat, pone pondus D ad pondus E ut ratio $\frac{BE}{EG}$ ad rationem $\frac{CD}{DH}$; & evadet $g =$ D, adeoque vice præcedentis æquationis habebitur hæc, $\begin{matrix}aa\\-bb\end{matrix}xx-2aacx+aacc = 0$; five $x = \frac{ac}{a+b}$.

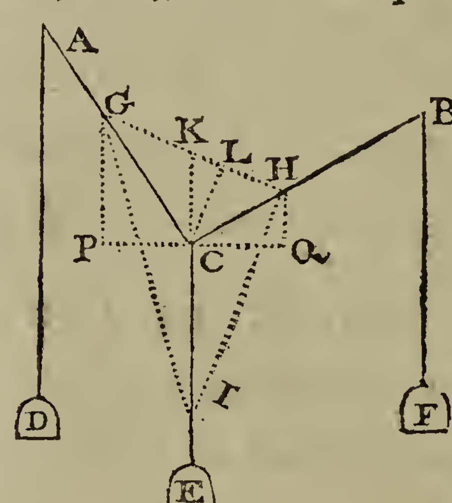
PROBLEMATA GEOMETRICA.

CAPUT XIV.

PROB. XLIX.

Si ad filum, DACBF, *circa paxillos duos,* A, B, *labile, appendantur tria pondera,* D, E, F; D *&* F *ad extremitates fili, &* E *ad medium ejus punctum,* C, *inter paxillos positum: Ex datis ponderibus & situ paxillorum invenire situm puncti* C, *ad quod medium pondus appenditur, ubi pondera consistunt in æquilibrio.*

CUM tensio fili AC æquetur tensioni fili AD, & tensio fili BC tensioni fili BF; tensiones filorum, AC, BC, EC, erunt ut pondera, D, F, E. In eâdem ponderum ratione cape partes filorum CG, CH, CI. Compleatur triangulum GHI. Produc IC, donec ea occurrat GH in K, & erit $GK=KH$, & $CK=\frac{1}{2}CI$, adeoque C centrum gravitatis trianguli GHI. Nam per C agatur ipsi CE perpendiculare, PQ; & huic à punctis G & H perpendicularia, GP, HQ. Et si vis, quâ filum AC vi ponderis D trahit punctum C versus A, exponatur per lineam GC, vis, quâ filum istud trahet idem punctum versus P, exponetur per lineam CP; & vis, quâ trahit illud versus K, exponetur per lineam GP. Et similiter vires, quibus filum BC vi ponderis F trahit idem punctum C versus B, Q & K, exponentur per lineas CH, CQ, HQ; & vis, quâ filum CE vi ponderis E trahit punctum illud C versus E, exponetur per lineam CI. Jam cùm punctum C viribus æquipollentibus sustineatur in æquilibrio, summa virium, quibus fila AC & BC simul trahunt punctum C versus K, æqualis erit vi contrariæ, quâ filum EC trahit punctum illud versus E; hoc est summa, $GP+HQ$, æqualis erit ipsi CI: & vis, quâ filum AC trahit punctum C versus P, æqualis erit vi contrariæ, quâ filum BC trahit idem punctum C versus Q; hoc est linea PC æqualis lineæ CQ. Quare cùm PG, CK & QH parallelæ sint, erit etiam $GK=KH$, & $CK\ (=\frac{GP+HQ}{2})=\frac{1}{2}CI$. Quod erat ostendendum. Restat itaque triangulum GCH determinandum; cujus latera, GC & HC, dantur, unà cum lineâ CK, quæ à vertice C ad medium basis ducitur. Demittatur itaque à vertice, C, ad basem,

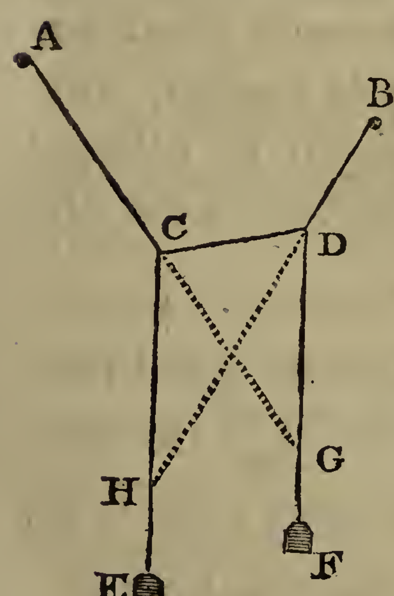


GH,

GH, perpendiculum CL; & erit $\frac{GCq - CHq}{2GH} = KL = \frac{GCq - KCq - GKq}{2GK}$. Pro 2GK fcribe GH, &, rejecto communi divifore GH, & ordinatis terminis, erit $GCq - 2KCq + CHq = 2GKq$; five $\sqrt{\frac{1}{2}GCq - KCq + \frac{1}{2}CHq} = GK$. Invento GK vel KH, dantur fimul anguli GCK, KCH, five DAC, FBC. Quare à punctis A & B in datis iftis angulis, DAC, FBC, duc lineas, AC, BC, concurrentes in puncto C: & iftud C erit punctum quod quæritur. PROBLEMATA GEOMETRICA.

Cæterùm quæftiones omnes, quæ funt ejufdem generis, non femper opus eft per Algebram figillatim folvere, fed ex folutione unius plerumque confectatur folutio alterius. Ut fi jam proponeretur hæc quæftio.

Filo, ACDB, *in datas partes,* AC, CD, DB, *divifo, & extremitatibus ejus ad paxillos duos,* A, B, *pofitione datos ligatis, fi ad puncta divifionum,* C *ac* D, *appendantur pondera duo,* E *&* F; *ex dato pondere* F, *&* *fitu punctorum* C *ac* D, *cognofcere pondus* E.



EX præcedentis Problematis folutione fatis facilè colligetur hæcce folutio hujus. Produc lineas AC, BD, donec occurrant lineis DF, CE, in G & H; & erit pondus E ad pondus F ut DG ad CH.

Et hinc obiter patet ratio componendi ftateram ex folis filis, quà pondus corporis cujufvis E, ex unico dato pondere F cognofci poteft.

PROB. L.

Lapide in puteum decidente, ex fono lapidis fundum percutientis, altitudinem putei cognofcere.

SIT altitudo putei x; & fi lapis motu uniformiter accelerato defcendat per fpatium quodlibet datum a in tempore dato b, & fonus motu uniformi tranfeat per idem fpatium datum a in tempore dato d, lapis defcendet per fpatium x, in tempore $b\sqrt{\frac{x}{a}}$; fonus autem, qui fit à lapide in fundum putei impingente, afcen-

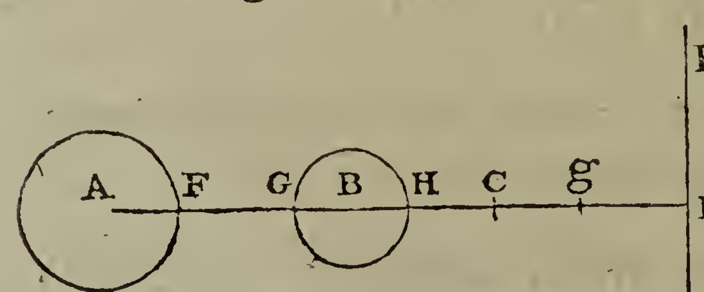
 det

CAPUT XIV. det per idem ſpatium x, in tempore $\frac{dx}{a}$. Ut enim ſunt ſpatia gravibus decidentibus deſcripta, ita ſunt quadrata temporum deſcenſûs. Vel ut radices ſpatiorum, hoc eſt ut $\sqrt{x}$ & $\sqrt{a}$, ita ſunt ipſa tempora. Et ut ſpatia x & a, per quæ ſonus tranſit, ita ſunt tempora tranſitûs. Ex horum temporum, $b\sqrt{\frac{x}{a}}$ & $\frac{dx}{a}$, ſummâ, conflatur tempus à lapide demiſſo ad ſoni reditum. Hoc tempus ex obſervatione cognoſci poteſt. Sit ipſum t; & erit $b\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{dx}{a} = t$. Ac $b\sqrt{\frac{x}{a}} = t - \frac{dx}{a}$. Et partibus quadratis $\frac{bbx}{a} = tt - \frac{2tdx}{a} + \frac{ddxx}{aa}$. Et, per reductionem, $xx = \frac{2adt + abb}{dd}x - \frac{aatt}{dd}$. Et, extractâ radice, $x = \frac{adt + \frac{1}{2}abb}{dd} - \frac{ab}{2dd}\sqrt{bb + 4dt}$.

PROB. LI.

Dato globo, A, *poſitione parietis,* DE, *& centri globi,* B, *à pariete diſtantiâ,* BD; *invenire molem globi* B, *eâ lege, ut in ſpatiis liberis, & vi gravitatis deſtitutis, ſi globus* A, *cujus centrum in lineâ* BD, *quæ ad parietem perpendicularis eſt, ultra* B *productâ conſiſtit, uniformi cum motu verſus* D *feratur, donec is impingat in alterum quieſcentem globum* B; *globus iſte* B, *poſtquam reflectitur à pariete, denuò occurrat globo* A *in dato puncto* C.

SIT globi A celeritas ante reflectionem a, & erit per PROB. XII. celeritas globi A poſt reflectionem $= \frac{aA - aB}{A+B}$, & celeritas globi B poſt reflexionem $= \frac{2aA}{A+B}$. Ergo celeritas globi A ad celeritatem globi B eſt ut A − B ad 2A. In GD cape gD = GH diametro nempe globi B; & celeritates iſtæ erunt ut GC ad Gg + gC. Nam ubi Globus A impegit in globum B; punctum G, quod in ſuperficie globi B exiſtens movetur in lineâ AD, perget per ſpatium Gg, antequam globus ille B impinget in parietem, & per ſpatium gC poſtquam à pariete reflectitur (hoc eſt per totum ſpatium Gg + gC) in eodem tempore quo globi A punctum F perget per ſpatium



GC:

GC: eò ut globus uterque rursus conveniant, & in se mutuò impingant, in puncto dato C. Quamobrem cùm dentur intervalla BC & CD, dic $BC=m$, $BD+CD=n$, & $BG=x$; & erit $GC=m+x$, & $Gg+gC=GD+DC-2gD=GB+BD+DC-2GH=x+n-4x$, seu $=n-3x$. Suprà erat $A-B$ ad $2A$ ut celeritas globi A ad celeritatem globi B; & celeritas globi A ad celeritatem globi B ut GC ad $Gg+gC$; adeoque $A-B$ ad $2A$ ut GC ad $Gg+gC$. Ergo cùm sit $GC=m+x$, & $Gg+gC=n-3x$, erit $A-B$ ad $2A$ sicut $m+x$ ad $n-3x$. Porrò globus A est ad globum B ut cubus radii ejus AF ad cubum radii alterius GB; hoc est, si ponas radium AF esse s, ut s^3 ad x^3. Ergo $s^3-x^3.2s^3$ $(::A-B.2A)::m+x.n-3x$ Et, ductis extremis & mediis in se, habebitur æquatio $s^3n-3s^3x-nx^3+3x^4=2ms^3+2s^3x$. Et, per reductionem, $3x^4-nx^3-5s^3x\,\begin{smallmatrix}+s^3n\\-2s^3m\end{smallmatrix}=0$. Cujus æquationis constructione dabitur globi B semidiameter x; quo dato, datur etiam Globus ille. Q. E. F.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

Nota verò, quòd ubi punctum C jacet ad contrarias partes globi B, debet signum quantitatis $2m$ mutari, & scribi $3x^4-nx^3-5s^3x\,\begin{smallmatrix}+s^3n\\+2s^3m\end{smallmatrix}=0$.

Si datus esset Globus B, & quæreretur Globus A, eâ lege, ut globi duo post reflexionem convenirent in C, quæstio foret facilior. Nempe in inventâ æquatione novissimâ supponendum esset x dari & s quæri. Quâ ratione per debitam reductionem illius æquationis, translatis terminis $-5s^3x+s^3n-2s^3m$ ad æquationis partem contrariam, ac divisâ utrâque parte per $5x-n+2m$, emergeret $\frac{3x^4-nx^3}{5x-n+2m}=s^3$. Ubi per solam extractionem radicis cubicæ obtinebitur s.

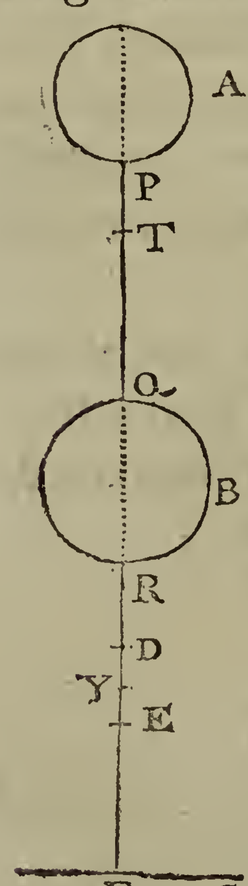
Quòd si dato Globo utroque quæreretur punctum C, in quo post reflexionem ambo in se mutuò impingerent: cùm suprà fuerit $A-b$ ad $2A$ ut GC ad $Gg+gC$; ergo, invertendo & componendo, $3A-B$ erit ad $A-B$ ut $2Gg$ ad distantiam quæsitam GC.

PROB.

PROB. LII.

Si globi duo, A *&* B, *tenui jungantur filo,* PQ, *& pendente globo* B *à globo* A, *si demittatur globus* A, *ita ut globus uterque simul solâ gravitatis vi, in eâdem lineâ perpendiculari* PQ *cadere incipiat; dein globus inferior* B, *postquam à fundo, seu plano horizontali* FG, *sursùm reflectitur, superiori decidenti globo* A *occurrat in puncto quodam,* D: *ex datâ fili longitudine* PQ, *& puncti illius,* D, *à fundo distantiâ,* DF, *invenire altitudinem,* PF, *à quâ globus superior,* A, *ad hunc effectum demitti debet.*

SIT fili PQ longitudo a. In perpendiculo PQRF ab F sursùm cape FE æqualem globi inferioris diametro QR; ita ut cùm globi illius punctum infimum, R, incidit in fundum ad F, punctum ejus supremum, Q, occupet locum E; sitque ED distantia, per quam globus ille, postquam à fundo reflectitur, ascendendo transit, antequam globo superiori decidenti occurrat in puncto D. Igitur ob datam puncti D à fundo distantiam, DF, globique inferioris diametrum, EF, dabitur eorum differentia DE. Sit ea $= b$. Sitque altitudo, quam globus ille inferior, antequam impingit in fundum, cadendo describit (RF vel QE) $= x$, siquidem ea ignoretur. Et invento x, si eidem addantur EF & PQ, habebitur altitudo PF, à quâ globus superior ad effectum desideratum demitti debet.



Cùm igitur sit PQ $= a$, & QE $= x$, erit PE $= a + x$. Aufer DE, seu b, & restabit PD $= a + x - b$. Est autem tempus descensûs globi A ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{a + x - b}$; & tempus descensûs globi alterius, B, ut radix spatii cadendo descripti, seu $\sqrt{x}$; & tempus ascensûs ejusdem ut differentia radicis illius & radicis spatii, quod cadendo tantùm à Q ad D describeretur. Nam hæc differentia est ut tempus descensûs à D ad E; quod æquale est tempori ascensûs ab E ad D. Est autem differentia illa $\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Unde tempus descensûs & ascensûs conjunctim erit ut $2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Quamobrem, cùm hoc tempus æquetur tempori descensûs globi superioris, erit $\sqrt{a + x - b} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x - b}$. Cujus æquationis partibus quadratis habebitur $a + x - b = 5x - b -$

4 √

$4\sqrt{xx-bx}$, ſeu $a=4x-4\sqrt{xx-bx}$; &, ordinatâ æquatione, $4x-a=4\sqrt{xx-bx}$. Cujus partes iterum quadrando oritur $16xx-8ax+aa=16xx-16bx$, ſeu $aa=8ax-16bx$. Et, diviſis omnibus per $8a-16b$, fiet $\frac{aa}{8a-16b}=x$. Fac igitur ut $8a-16b$ ad a ita a ad x, & habebitur x, ſeu QE. Q. E. I. PROBLEMATA GEOMETRICA.

Quòd ſi ex dato QE quæreretur fili longitudo PQ, ſeu a; eadem æquatio, $aa=8ax-16bx$, extrahendo affectam radicem quadraticam, daret $a=4x-\sqrt{16xx-16bx}$. Id eſt, ſi ſumas QY mediam proportionalem inter QD & QE, erit $PQ=4EY$. Nam media illa proportionalis erit $\sqrt{x\times \overline{x-b}}$, ſeu $\sqrt{xx-bx}$; quod ſubductum de x, ſeu QE, relinquit EY; cujus quadruplum eſt $4x-4\sqrt{xx-bx}$.

Sin verò ex datis tum QE, ſeu x, tum fili longitudine PQ, ſeu a, quæreretur punctum D, in quo globus ſuperior in inferiorem incidit: puncti illius à dato puncto E diſtantia DE, ſeu b, è præcedente æquatione $aa=8ax-16bx$, eruetur; transferendo aa & $16bx$ ad æquationis partes contrarias cum ſignis mutatis, & omnia dividendo per $16x$. Orietur enim $\frac{8ax-aa}{16x}=b$. Fac igitur ut $16x$, ad $8x-a$ ita a ad b, & habebitur b, ſeu DE.

Hactenus ſuppoſui globos tenui filo connexos ſimul dimitti. Quòd ſi nullo connexi filo diverſis temporibus dimittantur, ita ut globus ſuperior A, verbi gratiâ, priùs dimiſſus, deſcenderit per ſpatium PT, antequam globus alter incipiat cadere; & ex datis diſtantiis, PT, PQ, ac DE quæratur altitudo, PF, à quâ globus ſuperior dimitti debet, eâ lege ut in inferiorem incidat ad punctum D: ſit $PQ=a$, $DE=b$, $PT=c$, & $QE=x$; & erit $PD=a+x-b$ ut ſuprà. Et tempora, quibus globus ſuperior cadendo deſcribat ſpatia PT ac TD, & globus inferior priùs cadendo dein reaſcendendo deſcribat ſummam ſpatiorum QE + ED, erunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{PD}-\sqrt{PT}$, & $2\sqrt{QE}-\sqrt{QD}$; hoc eſt, ut $\sqrt{c}$, $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}$, & $2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. At ultima duo tempora, propterea quòd ſpatia, TD, & QE + ED, ſimul deſcribuntur, æqualia ſunt. Ergo $\sqrt{a+x-b}-\sqrt{c}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-b}$. Et partibus quadratis, $a+c-2\sqrt{ca+cx-cb}=4x-4\sqrt{xx-bx}$. Pone $a+c=e$, & $a-b=f$; & erit, per debitam reductionem, $4x-e+2\sqrt{cf+cx}=4\sqrt{xx-bx}$; &, partibus quadratis, $ee-8ex+16xx+4cf$

$+4cx$

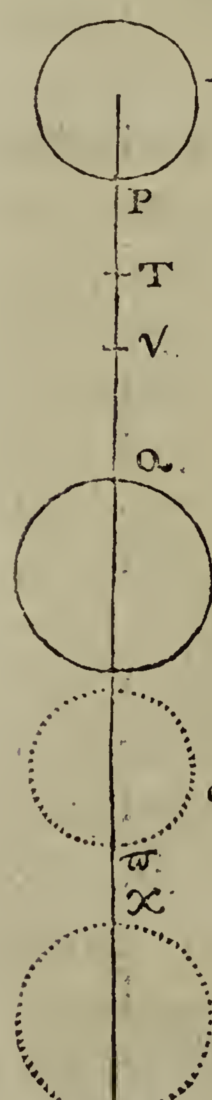
 $+4cx+\overline{16x-4e\sqrt{cf+cx}}=16xx-16bx$. Ac deletis utrobique $16xx$, & pro $ee+4cf$ ſcripto m, nec non pro $8e-16b-4c$ ſcripto n, habebitur, per debitam reductionem, $\overline{16x-4e\sqrt{cf+cx}}=nx-m$. Et partibus quadratis, $256cfxx+256cx^3-128cefx-128cexx+16ceef+16ceex=nnxx-2mnx+mm$. Et, ordinatâ æquatione,

$$256cx^3\begin{array}{l}+256cf\\-128ce\\-nn\end{array}xx\begin{array}{l}-128cef\\+16cee\\+2mn\end{array}x\begin{array}{l}+16ceef\\-mm\end{array}=0.$$

Cujus æquationis conſtructione, dabitur x ſeu QE; cui ſi addas datas diſtantias, PQ, & EF, habebitur altitudo PF, quam oportuit invenire.

PROB. LIII.

Si globi duo quieſcentes, ſuperior A, *& inferior* B, *diverſis temporibus dimittantur; & globus inferior eo temporis momento cadere incipiat, ubi ſuperior cadendo jam deſcripſit ſpatium* PT; *invenire loca α, β, quæ globi illi cadentes occupabunt, ubi eorum intervallum, $\varpi\chi$, dato æquale eſt.*



CUM dentur diſtantiæ, PT, PQ, & $\varpi\chi$, dic primam a, ſecundam b, tertiam c; & pro Pϖ, ſeu ſpatio quod globus ſuperior, antequam pervenit ad locum quæſitum α, cadendo deſcribit, ponatur x. Jam tempora, quibus globus ſuperior deſcribit ſpatia, PT, Pϖ, Tϖ, & inferior ſpatium Qχ, ſunt ut $\sqrt{PT}$, $\sqrt{P\varpi}$, $\sqrt{P\varpi}-\sqrt{PT}$, & $\sqrt{Q\chi}$. Quorum temporum poſteriora duo, eo quòd globi cadendo ſimul deſcribant ſpatia Tϖ & Qχ, ſunt æqualia. Unde & $\sqrt{P\varpi}-\sqrt{PT}$ æquale erit $\sqrt{Q\chi}$. Erat $P\varpi=x$, & $PT=a$; & ad Pϖ addendo $\varpi\chi$, ſeu c, & à ſummâ auferendo PQ, ſeu b, habebitur $Q\chi=x+c-b$. Quamobrem, his ſubſtitutis, fiet $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\sqrt{x+c-b}$. Et æquationis partibus quadratis, orietur $x+a-2\sqrt{ax}=x+c-b$. Ac, deleto utrobique x, & ordinatâ æquatione, habebitur $a+b-c=2\sqrt{ax}$. Et partibus quadratis erit quadratum de $a+b-c$ æquale

æquale $4ax$, & quadratum illud divisum per $4a$ æquale x; seu $4a$ ad $a+b-c$ sicut $a+b-c$ ad x. Ex invento autem x, seu Pϖ, datur globi superioris decidentis locus quæsitus α. Et per locorum distantiam simul datur etiam locus inferioris β. PROBLEMATA GEOMETRICA.

Et hinc si punctum quæratur, ubi globus superior cadendo tandem impinget in inferiorem; ponendo distantiam $\varpi\chi$ nullam esse, seu delendo c, dic $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, seu Pϖ; & punctum ϖ erit quod quæris.

Et vicissim si detur punctum illud ϖ, vel χ, in quo globus superior incidit in inferiorem, & quæratur locus, T, quem superioris globi decidentis punctum imum, P, tunc occupabat, cùm globus inferior incipiebat cadere: quoniam est $4a$ ad $a+b$ ut $a+b$ ad x, seu, ductis extremis & mediis in se, $4ax=aa+2ab+bb$; &, per æquationis debitam ordinationem, $aa=4ax-2ab-bb$: extrahe radicem quadraticam, & proveniet $a=2x-b-2\sqrt{xx-bx}$. Cape ergo Vϖ mediam proportionalem inter Pϖ & Qϖ, & versus V cape VT=VQ, & erit T punctum quod quæris. Nam Vϖ erit $=\sqrt{P\varpi \times Q\varpi}$; hoc est $=\sqrt{x\times \overline{x-b}}$, seu $=\sqrt{xx-bx}$; cujus duplum subductum de $2x-b$, seu de 2P$\varpi-$PQ, hoc est de PQ$+$2Qϖ, relinquit PQ$-$2VQ, seu PV$-$VQ, hoc est PT.

Si denique globorum, postquam superior incidit in inferiorem, & impetu in se invicem facto inferior acceleratur, superior retardatur, desiderantur loci, ubi inter cadendum distantiam datæ rectæ æqualem acquirent: quærendus erit primò locus, ubi superior impingit in inferiorem; dein, ex cognitis tum magnitudinibus globorum tum eorum, ubi in se impingunt, celeritatibus, inveniendæ sunt celeritates, quas proxime post reflexionem habebunt; idque per modum PROB. XII. Postea quærenda sunt loca summa, ad quæ globi celeritatibus hisce, si sursùm ferantur, ascenderent; & inde cognoscentur spatia, quæ globi datis temporibus post reflexionem cadendo describent, ut & differentia spatiorum: & vicissim, ex assumptâ illâ differentiâ, per Analysin regredietur ad ipsa spatia cadendo descripta.

Ut si globus superior incidit in inferiorem ad punctum π, & post reflexionem celeritas superioris deorsùm tanta sit, ut si sur-

Caput XIV.

ſum eſſet, aſcendere faceret globum illum per ſpatium πN, & inferioris celeritas deorſum tanta eſſet, ut, ſi ſurſum eſſet, aſcendere faceret globum illum inferiorem per ſpatium πM; tum tempora, quibus globus ſuperior viciſſim deſcenderet per ſpatia $N\pi$, NG, & inferior per ſpatia $M\pi$, MH, forent ut $\sqrt{N\pi}$, $\sqrt{NG}$, $\sqrt{M\pi}$, $\sqrt{MH}$; adeoque tempora, quibus globus ſuperior conficeret ſpatium πG, & inferior ſpatium πH, forent ut $\sqrt{NG}-\sqrt{N\pi}$, ad $\sqrt{MH}-\sqrt{M\pi}$. Pone hæc tempora æqualia eſſe, & erit $\sqrt{NG}-\sqrt{N\pi}=\sqrt{MH}-\sqrt{M\pi}$. Et inſuper, cùm detur diſtantia GH, pone $\pi G+GH=\pi H$. Et harum duarum æquationum reductione ſolvetur problema. Ut ſi ſit $M\pi=a$, $N\pi=b$, $GH=c$, $\pi G=x$; erit, juxta poſteriorem æquationem, $x+c=\pi H$. Adde $M\pi$; fiet $MH=a+c+x$. Ad πG adde $N\pi$, & fiet $NG=b+x$. Quibus inventis, juxta priorem æquationem, erit $\sqrt{b+x}-\sqrt{b}=\sqrt{a+c+x}-\sqrt{a}$. Scribatur e pro $a+c$, & $\sqrt{f}$ pro $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; & æquatio fiet $\sqrt{b+x}=\sqrt{e+x}-\sqrt{f}$. Et, partibus quadratis, $b+x=e+x+f-2\sqrt{ef+fx}$, ſeu $e+f-b=2\sqrt{ef+fx}$. Pro $e+f-b$ ſcribe g, & fiet $g=2\sqrt{ef+fx}$; &, partibus quadratis, $gg=4ef+4fx$; &, per reductionem, $\frac{gg}{4f}-e=x$.

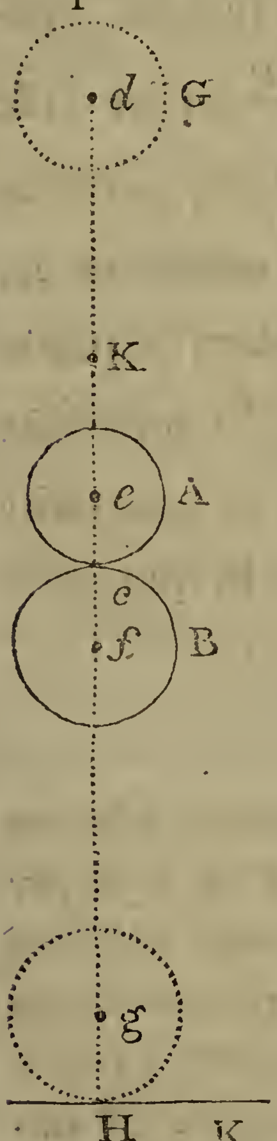
PROB. LIV.

Si duo ſint globi, A, B, *quorum ſuperior,* A, *ab altitudine,* G, *decidens, in alterum inferiorem,* B, *à fundo,* H, *verſus ſuperiora reſilientem, incidat; & hi globi ita per reflexionem ab invicem denuò recedant, ut globus* A, *vi reflexionis illius, ad altitudinem priorem,* G, *redeat, idque eodem tempore quo globus inferior,* B, *ad fundum,* H, *revertitur; dein globus* A *rurſùs decidat, & in globum* B, *à fundo reſilientem, denuò incidat, idque in eodem loco,* AB, *ubi priùs in ipſum incidebat; & ſic perpetuò globi ab invicem reſiliant, rurſuſque ad eundem locum redeant: Ex datis globorum magnitudinibus, poſitione fundi & loco* G, *à quo globus ſuperior decidit, invenire locum ubi globi in ſe mutuò impingent.*

SIT e centrum globi A, & f centrum globi B; d centrum loci G, in quo globus ſuperior in maximâ eſt altitudine; g centrum loci globi inferioris ubi in fundum impingit; a ſemidia-

meter globi A, b ſemidiameter globi B, c punctum contactûs globorum in ſe mutuò impingentium, & H punctum contactûs globi inferioris & fundi. Et celeritas globi A, ubi in globum B impingit, ea erit, quæ generatur caſu globi ab altitudine de; adeoque eſt ut $\sqrt{de}$. Hâc eâdem celeritate reflecti debet globus A verſus ſuperiora, ut ad locum priorem, G redeat. Et globus B eâdem celeritate deorſùm reflecti debet, quâ aſcenderat, ut eodem tempore redeat ad fundum quo inde receſſerat. Ut autem hæc duo eveniant, globorum motus inter reflectendum æquales eſſe debent. Motus autem ex globorum celeritatibus & magnitudinibus componuntur; adeoque quod fit ex globi unius mole & celeritate æquale erit ei, quod fit ex globi alterius mole & celeritate. Unde ſi factum ex unius globi mole & celeritate dividatur per molem alterius globi, habebitur celeritas alterius globi proximè ante & poſt reflexionem; ſeu ſub fine aſcenſûs & initio deſcenſûs. Erit igitur hæc celeritas ut $\frac{A\sqrt{de}}{B}$; ſeu, cùm globi ſint ut cubi radiorum, ut $\frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$. Ut autem hujus celeritatis quadratum ad quadratum celeritatis globi A proximè ante reflexionem, ita altitudo ad quam globus B hâc celeritate, ſi occurſu globi A in eum decidentis non impediretur, aſcenderet, ad altitudinem ed à quâ globus A deſcendit. Hoc eſt ut $\frac{Aq}{Bq}de$ ad de, ſeu ut Aq ad Bq, vel a^6 ad b^6, ita altitudo illa prior ad x; ſi modò pro altitudine poſteriore ed ponatur x.

Problemata Geometrica.



Ergo hæc altitudo, ad quam nimirum, B ſi non impediretur, aſcenderet, eſt $\frac{a^6}{b^6}x$. Sit ea fK. Ad fK adde fg, ſeu dH$-de-cf-g$H; hoc eſt $p-x$, ſi modò pro dato dH$-ef-g$H ſcribas p, & x pro incognito de; & habebitur K$g=\frac{a^6}{b^6}x+p-x$. Unde celeritas globi B, ubi decidit à K ad fundum, hoc eſt ubi decidit per ſpatium Kg quod centrum ejus inter decidendum deſcriberet, erit ut $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x+p-x}$. At globus ille decidit à loco Bcf ad fundum, eodem tempore quo globus ſuperior, A, aſcendit à loco Ace ad ſummam altitudinem d, aut

aut

Caput XIV. aut viciffim defcendit à d ad locum Ace; & proinde, cùm gravium cadentium celeritates æqualibus temporibus æqualiter augeantur, celeritas globi B defcendendo ad fundum tantùm augebitur, quanta eft celeritas tota, quam globus A eodem tempore cadendo à d ad e acquirat, vel afcendendo ab e ad d amittat. Ad celeritatem itaque quam globus B habet in loco Bcf adde celeritatem, quam globus A habet in loco Ace; & fumma, quæ eft ut $\sqrt{de} + \frac{a^3\sqrt{de}}{b^3}$, feu $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$, erit celeritas globi B, ubi is in fundum incidit. Proinde $\sqrt{x} + \frac{a^3}{b^3}\sqrt{x}$ æquabitur $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}x + p - x}$. Pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ fcribe $\frac{r}{s}$; & pro $\frac{a^6-b^6}{b^6}$, $\frac{rt}{ss}$; & æquatio illa fiet $\frac{r}{s}\sqrt{x} = \sqrt{\frac{rt}{ss}x + p}$; &, partibus quadratis, $\frac{rr}{ss}x = \frac{rt}{ss}x + p$. Aufer utrobique $\frac{rt}{ss}x$, duc omnia in ss, ac divide per $rr-rt$; & orietur $x = \frac{ssp}{rr-rt}$. Quæ quidem æquatio prodiiffet fimplicior, fi modò affumpfiffem $\frac{p}{s}$ pro $\frac{a^3+b^3}{b^3}$: prodiiffet enim $\frac{ss}{p-t} = x$. Unde faciendo ut fit $p-t$ ad s ut s ad x, habebitur x, feu ed; cui fi addas ec, habebitur dc, & punctum c in quo globi in fe mutuò impingent. Q. E. F.

PROB. LV.

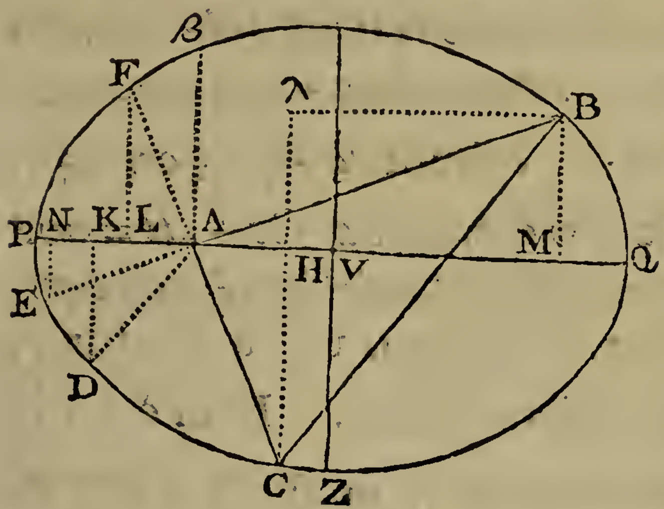
Erectis alicubi terrarum tribus baculis, ad Horizontale planum in punctis, A, B, *&* C, *perpendicularibus, quorum is qui in* A *fit fex pedum, qui in* B *octodecim pedum, & qui in* C *octo pedum, exiftente lineâ* AB *triginta trium pedum: contingit quodam die extremitatem umbræ baculi* A, *tranfire per puncta* B *&* C; *baculi autem* B *per* A *&* C; *ac baculi* C *per punctum* A. *Quæritur declinatio folis & elevatio Poli, five dies locufque, ubi hæc evenerint?*

Quoniam umbra baculi cujufque defcripfit Conicam fectionem, fectionem nempe Coni radiofi cujus vertex eft baculi fummitas; fingam BCDEF effe hujufmodi curvam (five ea fit Hyperbola, Parabola vel Ellipfis) quam umbra baculi A eo die defcripfit; ponendo AD, AE, AF ejus umbras fuiffe cùm BC, BA, CA refpectivè fuerunt umbræ baculorum B & C. Et præterea fingam PAQ effe lineam Meridionalem, five axem hujus curvæ, ad quem demiffæ perpendiculares, BM, CH, DK, EN, & FL, funt ordinatim

dinatim

dinatim applicatæ. Has verò ordinatim applicatas indefinitè designabo literâ y, & axis partes interceptas, AM, AH, AK, AN, & AL, literâ x. Fingam denique æquationem $aa+bx+cxx=yy$, ipsarum x & y relationem (*i. e.* naturam Curvæ) designare, assumendo aa, b & c tanquam cognitas, ut ex Analysi tandem inveniantur. Ubi incognitas quantitates x & y, duarum tantùm dimensionum posui, quia æquatio est ad Conicam sectionem; & ipsius y dimensiones impares omisi, quia ipsa est ordinatim applicata ad axem. Signa autem ipsorum b & c, quia indeterminata sunt, designavi notulâ $+$, quam indifferenter pro $+$ aut $-$ usurpo, & ejus oppositum $\mp$ pro signo contrario. At signum quadrati aa affirmativum posui, quia baculum A, umbras in adversas plagas (C & F, B & E) projicientem, concava pars curvæ necessariò complectitur; & proinde si ad punctum A erigatur perpendiculum Aβ, hoc alicubi occurret curvæ, puta in β; hoc est, ordinatim applicata y, ubi x nullum est, erit reale. Nam inde sequitur, quadratum ejus, quod in eo casu est aa, affirmativum esse.

Problemata Geometrica.

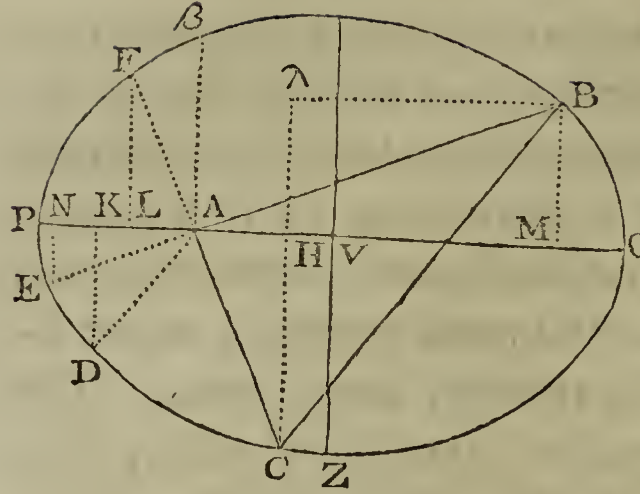


Constat itaque quòd æquatio hæc fictitia $aa+bx+cxx=yy$, sicut terminis superfluis non referta, sic neque restrictior est, quàm ut ad omnes hujus problematis conditiones se extendat, Hyperbolam, Ellipsin vel Parabolam quamlibet designatura, prout ipsorum aa, b, c, valores determinabuntur, aut nulli fortè reperientur. Quid autem valent, quibusque signis b & c debent affici, & inde quænam sit hæc curva, ex sequenti Analysi constabit.

Analyseos pars prior.

Cùm umbræ sint ut altitudines baculorum erit BC. AD : : AB. AE (: : 18. 6.) : : 3. 1. Item CA. AF (: : 8. 6.) : : 4. 3. Quare nominatis AM $=r$, MB $=s$, AH $=t$, & HC $=+v$; ex similitudine triangulorum, AMB, ANE, & AHC, ALF, erunt AN $=-\frac{r}{3}$. NE $=-\frac{s}{3}$. AL $=-\frac{3t}{4}$. Et LF $=\mp\frac{3v}{4}$: quarum signa signis ipsarum, AM, MB, AH, HC, contraria posui, quia tendunt ad contrarias plagas respectu puncti

CAPUT XIV.



puncti A, à quo ducuntur, axiſve PQ cui inſiſtunt. His autem pro x & y in æquatione fictitiâ, $aa \pm bx \pm cxx = yy$, reſpectivè ſcriptis,

r & s dabunt $aa \pm br \pm crr = ss$.
$-\frac{r}{3}$ & $-\frac{s}{3}$ dabunt $aa \mp \frac{br}{3} \pm \frac{1}{9}crr = \frac{1}{9}ss$.
t & $\pm v$ dabunt $aa \pm bt \pm ctt = vv$.
$-\frac{3}{4}t$ & $\pm \frac{3}{4}v$ dabunt $aa \pm \frac{3}{4}bt \pm \frac{9}{16}ctt = \frac{9}{16}vv$.

Jam è primâ & ſecundâ harum, exterminando ss ut obtineatur r, prodit $\frac{2aa}{\pm b} = r$: unde patet $\pm b$ eſſe affirmativum. Item è tertiâ & quartâ, exterminando vv ut obtineatur t, prodit $\frac{aa}{3b} = t$. Et ſcriptis inſuper $\frac{2aa}{b}$ pro r in primâ, & $\frac{aa}{3b}$ pro t in tertiâ, oriuntur $3aa \pm \frac{4a^4c}{bb} = ss$, & $\frac{4}{3}aa \pm \frac{a^4c}{9bb} = vv$.

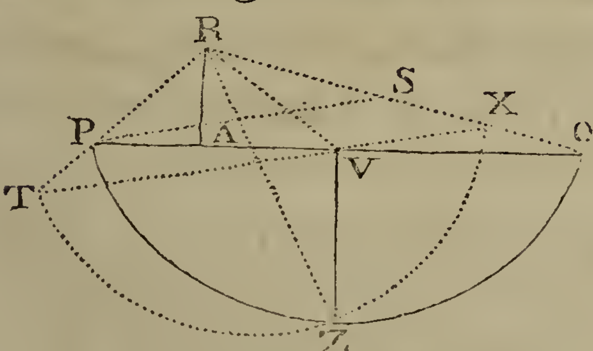
Porrò demiſſâ Bλ perpendiculari in CH, erit BC. AD (: : 3. 1.) :: Bλ. AK : : Cλ. DK. Quare, cùm ſit $B\lambda\ (= AM - AH = r - t) = \frac{5aa}{3b}$, erit $AK = \frac{5aa}{9b}$; vel potiùs $= -\frac{5aa}{9b}$. Item, cùm ſit $C\lambda\ (= CH \pm BM = v \pm s) = \sqrt{\frac{4aa}{3} \pm \frac{a^4c}{9bb}} \pm \sqrt{3aa \pm \frac{4a^4c}{bb}}$, erit $DK\ (= \frac{1}{3}C\lambda) = \sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} \pm \sqrt{\frac{1}{3}aa \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Quibus in æquatione, $aa + bx \pm cxx = yy$, pro AK ac DK, ſive x, & y, reſpectivè ſcriptis, prodit $\frac{4aa}{9} \pm \frac{25a^4c}{81bb} = \frac{13}{27}aa \pm \frac{37a^4c}{81bb} \pm 2\sqrt{\frac{4aa}{27} \pm \frac{a^4c}{81bb}} \times \sqrt{\frac{aa}{3} \pm \frac{4a^4c}{9bb}}$. Et, per reductionem, $-bb \mp 4aac = \pm 2\sqrt{36b^4 \pm 51aabbc + 4a^4cc}$; &, partibus quadratis, iterumque reductis, exit $0 = 143b^4 \pm 196aabbc$, ſive $\frac{-143bb}{196aa} = \pm c$. Unde conſtat $\pm c$ negativam eſſe, adeoque æquationem fictitiam, $aa \pm bx \pm cxx = yy$, hujus eſſe formæ, $aa + bx - cxx = yy$; & ideo curvam quam deſignat Ellipſin eſſe. Ejus vero centrum & axes duo ſic eruuntur.

Ponendo $y = 0$ (ſicut in Figuræ verticibus P & Q contingit) habebitur $aa + bx = cxx$; &, extractâ radice, $x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}} = \frac{AQ}{AP}$. Adeoque ſumpto $AV = \frac{b}{2c}$, erit V centrum Ellipſis, & VQ vel VP $\left(\sqrt{\frac{bb}{4cc} + \frac{aa}{c}}\right)$ ſemiaxis maximus. Si porrò ipſius AV valor $\frac{b}{2c}$ pro x in

in æquatione, $aa+bx-cxx=yy$, ſcribatur, fiet $aa+\frac{bb}{4c}=yy$. Quare eſt $aa+\frac{bb}{4c}=VZq$, hoc eſt, quadrato ſemiaxis minimi. Denique in valoribus ipſarum, AV, VQ, VZ, jam inventis, ſcripto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c, exeunt $\frac{98aa}{143b}=AV$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}=VQ$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}=VZ$. Problemata Geometrica.

Analyſeos pars altera.

Supponatur jam baculum puncto A inſiſtens eſſe AR, & erit RPQ planum meridionale, ac RPZQ conus radioſus, cujus vertex eſt R. Sit inſuper TXZ planum ſecans Horizontem in VZ, ut & meridionale planum in TVX; quæ ſectio ſit ad axem mundi conive perpendicularis; & ipſum planum TXZ erit ad eundem axem perpendiculare, & conum ſecabit in peripheriâ circuli TZX, quæ ab ejus vertice pari ubique intervallo, RX, RZ, RT, diſtabit. Quamobrem, ſi PS ipſi TX parallela ducatur, fiet RS=RP, propter æquales, RX, RT; nec non SX=XQ, propter æquales, PV, VQ. Unde eſt RX, vel RZ $\left(=\frac{RS+RQ}{2}\right)=\frac{RP+RQ}{2}$. Denique ducatur RV; & cùm VZ perpendiculariter inſiſtat plano RPQ, (ſectio utique exiſtens planorum eidem perpendiculariter inſiſtentium) fiet triangulum RVZ rectangulum ad V.



Dictis jam $RA=d$, $AV=e$, VP, vel VQ, $=f$, & $VZ=g$; erit $AP=f-e$, & $RP=\sqrt{ff-2ef+ee+dd}$. Item $AQ=f+e$, & $RQ=\sqrt{ff+2ef+ee+dd}$: adeoque $RZ\left(=\frac{RP+RQ}{2}\right)=\frac{\sqrt{ff-2ef+ee+dd}+\sqrt{ff+2ef+ee+dd}}{2}$. Cujus quadratum $\frac{dd+ee+ff}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}$, eſt æquale $(RVq+VZq=RAq+AVq+VZq=)\,dd+ee+gg$. Jam, reductione factâ, eſt $\sqrt{f^4-2eeff+e^4+2ddff+2ddee+d^4}=dd+ee-ff+2gg$; &, partibus quadratis ac in ordinem redactis, $ddff=ddgg+eegg-ffgg+g^4$; ſive $\frac{ddff}{gg}=dd+ee-ff+gg$. Denique 6, $\frac{98aa}{143b}$, $\frac{112aa\sqrt{3}}{143b}$, & $\frac{8a\sqrt{3}}{\sqrt{143}}$ (valoribus ipſorum AR, AV, VQ, & VZ) pro d, e, f, ac g reſtitutis, oritur $36-\frac{196a^4}{143bb}+\frac{192aa}{143}=\frac{36\times14\times14aa}{143bb}$; & inde, per reductionem, $\frac{49a^4+36\times49aa}{48aa+1287}=bb$.

CAPUT XIV. In primo Schemate eſt $AMq+MBq=ABq$, hoc eſt $rr+ss=33\times 33$. Erat autem $r=\frac{2aa}{b}$, & $ss=3aa-\frac{4a^4c}{bb}$; unde $rr=\frac{4a^4}{bb}$, & (ſubſtituto $\frac{143bb}{196aa}$ pro c) $ss=\frac{4aa}{49}$: quare $\frac{4a^4}{bb}+\frac{4aa}{49}=33\times 33$: & inde, per reductionem, iterum reſultat $\frac{4\times 49a^4}{53361-4aa}=bb$. Ponendo igitur æqualitatem inter duo bb, & dividendo utramque partem æquationis per 49, fit $\frac{a^4+36aa}{48aa+1287}=\frac{4k^4}{53361-4aa}$. Cujus partibus in crucem multiplicatis, ordinatis, ac diviſis per 49, exit $4a^4=981aa+39204$, cujus radix aa eſt $\frac{981+\sqrt{1589625}}{8}=280,2254144$.

Suprà inventum fuit $\frac{4\times 49a^4}{53361-4aa}=bb$, ſive $\frac{14aa}{\sqrt{53361-4aa}}=b$. Unde AV $(\frac{98aa}{143b})$ eſt $\frac{7\sqrt{53361-4aa}}{143}$; & VP vel VQ $(\frac{112aa\sqrt{3}}{143b})$ eſt $\frac{8}{143}\sqrt{160083-12aa}$. Hoc eſt, ſubſtituendo $280,2254144$ pro aa, ac terminos in decimales numeros reducendo, $AV=11,188297$; & VP vel $VQ=22,147085$. Adeoque AP $(PV-AV)=10,958788$; & AQ $(AV+VQ)$ $33,335382$.

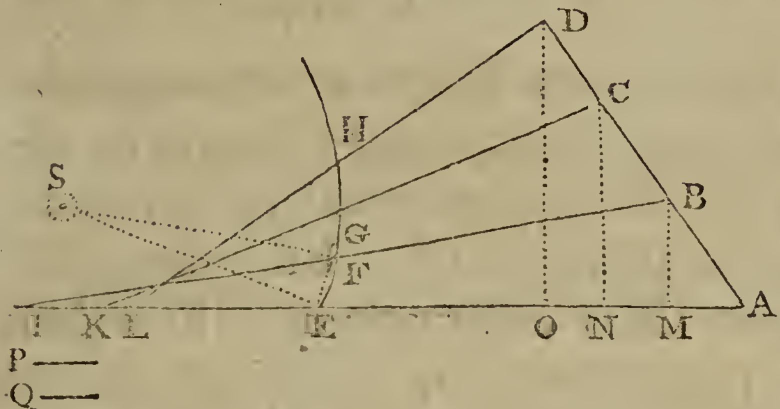
Denique ſi $\frac{1}{6}$ AR, ſive 1, ponatur radius, erit $\frac{1}{6}$ AQ, ſive $5,555897$, tangens anguli ARQ, 79 gr. 47′. 48″; & $\frac{1}{6}$ AP, ſive $1,826465$, tangens anguli ARP, 61 gr. 17′. 57″. Quorum angulorum ſemiſumma, 70 gr. 32′. 52″, eſt complementum declinationis ſolis; & ſemidifferentia, 9 gr. 14′. 56′, complementum latitudinis Loci. Proinde declinatio ſolis erat 19 gr. 27′. 8″; & Latitudo loci 80 gr. 45′. 4″. Quæ erant invenienda.

PROB. LVI.

E Cometæ, motu uniformi rectilineo per Cœlum trajicientis, locis quatuor obſervatis, diſtantiam à terrâ, motûſque determinationem, in Hypotheſi Copernicæâ colligere.

SI è centro Cometæ, in locis quatuor obſervatis, ad planum Eclipticæ demittantur totidem perpendicula; ſintque A, B, C, D, puncta in plano illo in quæ perpendicula incidunt; per puncta illa agatur recta AD, & hæc ſecabitur à perpendiculis in eâdem ratione cum lineâ quam Cometa motu ſuo deſcribit; hoc eſt, ita ut ſit AB ad AC ut tempus inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus inter primam ac tertiam; & AB ad AD ut tempus

tempus illud inter primam & ſecundam obſervationem ad tempus PROBLEMATICA GEOMETRICA.
inter primam & quartam. Ex obſervationibus itaque dantur rationes linearum, AB, AC, AD, ad invicem.



Inſuper in eodem Eclipticæ plano ſit S Sol; EH arcus lineæ Eclipticæ in quâ terra movetur; E, F, G, H, loca quatuor terræ temporibus obſervationum; E locus primus, F ſecundus, G tertius, H quartus. Jungantur AE, BF, CG, DH, & producantur, donec tres poſteriores priorem ſecent in I, K & L; BF in I, CG in K, DH in L: et erunt anguli, AIB, AKC, ALD, differentiæ longitudinum obſervatarum Cometæ; AIB differentia longitudinum loci primi Cometæ & ſecundi; AKC differentia longitudinum loci primi ac tertii; & ALD differentia longitudinum loci primi & quarti. Dantur itaque ex obſervationibus anguli AIB, AKC, ALD.

Junge SE, SF, EF; &, ob data puncta S, E, F, datumque angulum ESF, dabitur angulus SEF. Datur etiam angulus SEA, utpote differentia longitudinis Cometæ & Solis tempore obſervationis primæ. Quare ſi complementum ejus ad duos rectos, nempe angulum SEI, addas angulo SEF, dabitur angulus IEF. Trianguli igitur IEF dantur anguli unà cum latere EF, adeoque datur etiam latus IE. Et ſimili argumento dantur KE & LE. Dantur igitur poſitione lineæ quatuor, AI, BI, CK, DL; adeoque Problema huc redit, ut lineis quatuor poſitione datis, quintam inveniamus, quæ ab his in datâ ratione ſecabitur.

Demiſſis ad AI perpendiculis, BM, CN, DO, ob datum angulum AIB, datur ratio BM ad MI. Eſt & BM ad CN in datâ ratione BA ad CA; &, ob datum angulum CKN, datur ratio CN ad KN. Quare datur etiam ratio BM ad KN; & inde ratio quoque BM ad MI−KN, hoc eſt ad MN+IK. Cape P ad IK ut eſt AB ad BC; &, cùm ſit MA ad MN in eâdem ratione, erit etiam P+MA ad IK+MN in eâdem ratione; hoc eſt in ratione datâ. Quare datur ratio BM ad P+MA. Et ſimili argumento, ſi capiatur Q ad IL in ratione AB ad BD, dabitur ratio BM ad Q+MA. Et proinde ratio BM ad ipſorum

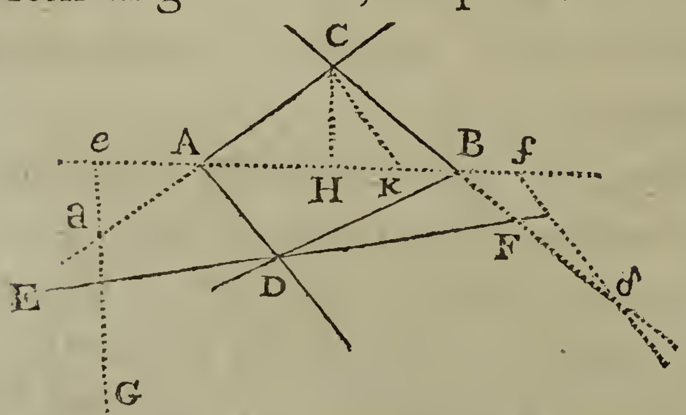
CAPUT XIV. ſorum P+MA & Q+MA differentiam quoque dabitur. At differentia illa, nempe P−Q vel Q−P, datur. Et proinde dabitur BM. Dato autem BM, ſimul dantur P+MA, & MI, & inde MA, ME, AE, & angulus EAB.

His inventis, erige ad A lineam plano Eclipticæ perpendicularem, quæ ſit ad lineam EA, ut tangens latitudinis Cometæ in obſervatione primâ ad radium; & iſtius perpendicularis terminus erit locus centri Cometæ in obſervatione primâ. Unde datur diſtantia Cometæ à Terrâ tempore illius obſervationis. Et eodem modo, ſi è puncto B erigatur perpendicularis, quæ ſit ad lineam BF, ut tangens latitudinis Cometæ in obſervatione ſecundâ ad radium, habebitur locus centri Cometæ in obſervatione illâ ſecundâ. Et acta linea à loco primo ad locum ſecundum ea eſt, in quâ Cometa per Cœlum trajicit.

PROB. LVII.

Si angulus datus, CAD, *circa punctum angulare,* A, *poſitione datum, & angulus datus,* CBD, *circa punctum angulare,* B, *poſitione datum, eâ lege circumvolvantur, ut crura,* AD, BD, *ad rectam poſitione datam,* EF, *ſeſe ſemper interſecent: invenire lineam illam curvam, quam reliquorum crurum,* AC, BC, *interſectio,* C, *deſcribit.*

PRoduc CA ad d, ut ſit $Ad = AD$, & CB ad δ, ut ſit $B\delta = BD$. Fac angulum Ade æqualem angulo ADE, & angulum $B\delta f$ æqualem angulo BDF; & produc AB utrinque, donec ea occurrat de & δf in e & f. Produc etiam ed ad G, ut ſit $dG = \delta f$; & à puncto C ad lineam AB, ipſi ed parallelam, age CH, & ipſi $f\delta$ parallelam CK. Et concipiendo lineas eG, $f\delta$ immobiles manere, dum anguli, CAD, CBD, lege præſcriptâ circa



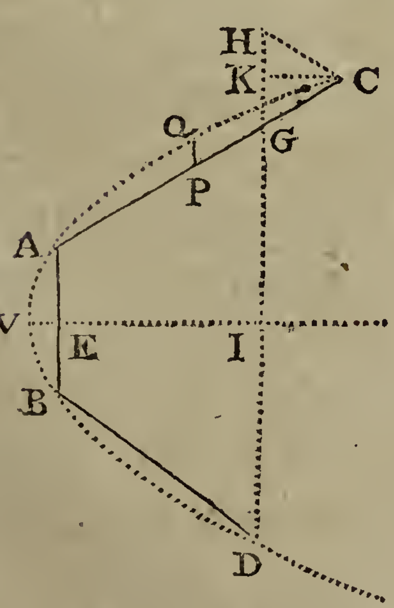
polos A & B volvantur, ſemper erit Gd æqualis ipſi δf, & triangulum CHK dabitur ſpecie. Dic itaque $Ae = a$, $eG = b$, $Bf = c$, $AB = m$, $BK = x$, & $CK = y$. Et erit $BK . CK :: Bf . f\delta$. Ergo $f\delta = \frac{cy}{x} = Gd$. Aufer hoc de Ge, & reſtabit $ed = b - \frac{cy}{x}$. Cùm detur ſpecie triangulum

angulum CKH, pone CK. CH : : $d.\,e$; & CH. HK : : $e.f$; & erit CH $= \frac{ey}{d}$, & HK $= \frac{fy}{d}$. Adeoque AH $= m - x - \frac{fy}{d}$. Eſt autem AH. HC : : Ae. ed, hoc eſt $m - x - \frac{f}{d}y.\ \frac{cy}{d} : : a.\ b - \frac{cy}{x}$. Ergo ducendo media & extrema in ſe, fiet $mb - \frac{mcy}{x} - bx + cy - \frac{bf}{d}y + \frac{cfyy}{dx} = \frac{acy}{d}$. Duc omnes terminos in dx, eoſque in ordinem redige; & fiet $fcyy \begin{smallmatrix}+dc\\ -ae\\ -fb\end{smallmatrix} xy - dcmy - bdxx + bdmx = 0$. Ubi, cùm incognitæ quantitates, x & y, ad duas tantùm dimenſiones aſcendunt, patet curvam lineam, quam punctum C deſcribit, eſſe Conicam Sectionem. Pone $\frac{ae + fb - dc}{c} = 2p$, & fiet $yy = \frac{2p}{f}xy + \frac{dm}{f}y + \frac{bd}{fc}xx - \frac{bdm}{fc}x$. Et extractâ radice, $y = \frac{p}{f}x + \frac{dm}{2f} \pm \sqrt{\frac{pp}{ff}xx + \frac{bd}{fc}xx + \frac{pdm}{ff}x - \frac{bdm}{fc}x + \frac{ddmm}{4ff}}$. Unde colligitur Curvam Hyperbolam eſſe, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ affirmativum, vel negativum & minus quàm $\frac{pp}{ff}$; Parabolam, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ negativum & æquale $\frac{pp}{ff}$; Ellipſin vel Circulum, ſi ſit $\frac{bd}{fc}$ & negativum & majus quàm $\frac{pp}{ff}$. Q. E. I.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

PROB. LVIII.

Parabolam deſcribere quæ per data quatuor puncta tranſibit.



Sint puncta illa data A, B, C, D. Junge AB, & eam biſeca in E. Et per E age rectam aliquam, VE, quam concipe diametrum eſſe Parabolæ, puncto V exiſtente vertice ejus. Junge AC, ipſique AB parallelam age DG, occurrentem AC in G. Dic AB $= a$, AC $= b$, AG $= c$, GD $= d$. In AC cape AP cujuſvis longitudinis, & à P age PQ parallelam AB: & concipiendo Q punctum eſſe Parabolæ, dic AP $= x$, PQ $= y$; & æquationem quamvis ad Parabolam aſſume, quæ relationem inter AP & PQ exprimat: ut quòd ſit $y = e + fx \pm \sqrt{gg + hx}$.

Jam

CAPUT XIV. Jam si ponatur AP sive $x=0$ (puncto P incidente in ipsum A) fiet PQ, sive y, $=0$, ut & $=-$ AB. Scribendo autem in æquatione assumptâ 0 pro x, fiet $y=e\pm\sqrt{gg}$, hoc est $=e\pm g$. Quorum valorum ipsius y major $e+g$, est$=0$; minor, $e-g$, $=-$AB, sive $-a$. Ergo $e=-g$; & $e-g$, hoc est, $-2g$, $=-a$, sive $g=\frac{1}{2}a$. Atque adeo vice æquationis assumptæ habebitur hæc, $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+bx}$.

Adhæc si ponatur AP sive $x=$ AC, ita ut punctum P incidat in C, fiet iterum PQ$=0$. Pro x igitur in æquatione novissimâ scribe AC sive b, & pro y, 0; & fiet $0=-\frac{1}{2}a+fb+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, sive $\frac{1}{2}a-fb=\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; &, partibus quadratis, $-afb+ffbb=bb$; sive $ffb-fa=b$. Atque ita vice assumptæ æquationis habebitur isthæc, $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$.

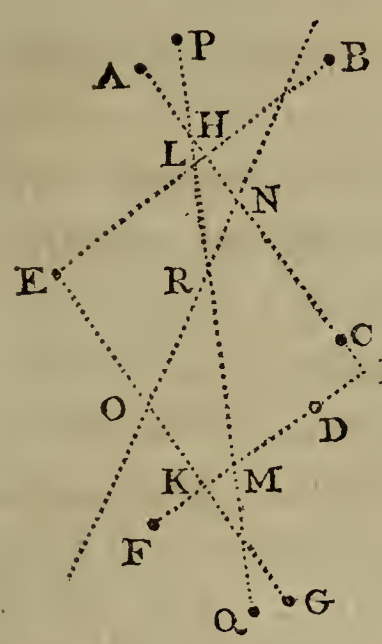
Insuper si ponatur AP sive $x=$AG, sive c; fiet PQ, sive y, $=-$GD, sive $-d$. Quare pro x & y in æquatione novissimâ scribe c, & $-d$; & fiet $-d=-\frac{1}{2}a+fc-\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$; sive $\frac{1}{2}a-d-fc=\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbc-fac}$. Et, partibus quadratis, $-ad-fac+dd+2dcf+ccff=ffbc-fac$. Et, æquatione ordinatâ & reductâ, $ff=\frac{2d}{b-c}f+\frac{dd-ad}{bc-cc}$. Pro $b-c$, hoc est pro GC, scribe k; & æquatio illa fiet $ff=\frac{2d}{k}f+\frac{dd-ad}{kc}$. Et extractâ radice, $f=\frac{d}{k}\pm\sqrt{\frac{ddc+ddk-adk}{kkc}}$. Invento autem f, æquatio ad Parabolam, *viz.* $y=-\frac{1}{2}a+fx\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa+ffbx-fax}$, plenè determinatur: cujus itaque constructione Parabola etiam determinabitur. Constructio autem ejus hujusmodi est. Ipsi BD parallelam age CH occurrentem DG in H. Inter DG ac DH cape mediam proportionalem DK, & ipsi CK parallelam age EI bisecantem AB in E, & occurrentem DG in I. Dein produc IE ad V; ut sit EV. EI : : EBq. DI$q-$EBq; & erit V vertex, VE diameter, & $\frac{\text{EB}q}{\text{VE}}$ latus rectum Parabolæ quæsitæ.

PROB. LIX.

Conicam sectionem per data quinque puncta describere.

Sint puncta ista A, B, C, D, E. Junge AC, BE, se mutuo secantes in H. Age DI parallelam BE, & occurrentem AC in I. Item EK parallelam AC, & occurrentem DI productæ in K. Produc

I ID



ID ad F, & EK ad G; ut ſit AHC. BHE : : AIC. FID : : EKG. FKD; & erunt puncta F ac G in conicâ ſectione, ut notum eſt. Hoc tamen obſervare debebis, quòd ſi punctum H cadit inter puncta omnia, A, C & B, E, vel extra ea omnia, punctum I cadere debebit vel inter puncta omnia, A, C & F, D, vel extra ea omnia; & punctum K inter omnia, D, F & E, G, vel extra ea omnia. At ſi punctum H cadit inter duo puncta A, C, & extra alia duo B, E, vel inter illa duo B, E, & extra altera duo A, C; debebit punctum I cadere inter duo punctorum A, C & F, D, & extra alia duo eorum; & ſimiliter punctum K debebit cadere inter duo punctorum D, F & E, G, & extra alia duo eorum: id quod fiet capiendo IF, KG, ad hanc vel illam partem punctorum I, K, pro exigentiâ problematis. Inventis punctis F ac G, biſeca AC, EG in N & O; item BE, FD, in L & M. Junge NO, LM ſe mutuò ſecantes in R; & erunt LM & NO diametri conicæ ſectionis, R centrum ejus, & BL, FM ordinatim applicatæ ad diametrum LM. Produc LM hinc inde, ſi opus eſt, ad P & Q, ita ut ſit $BLq.\ FMq :: PLQ.\ PMQ$; & erunt P & Q vertices Conicæ ſectionis & PQ latus tranſverſum. Fac $PLQ.\ LBq :: PQ.\ T$: et erit T latus rectum; quibus cognitis cognoſcitur Figura.

Problemata Geometrica.

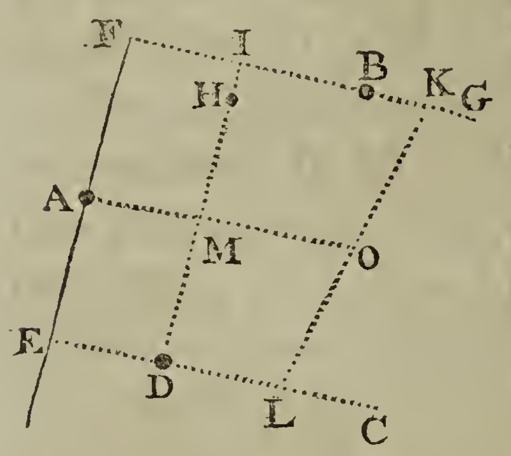
Reſtat tantùm ut doceamus, quomodo LM hinc inde producenda ſit ad P & Q, ita ut fiat $BLq.\ FMq :: PLQ.\ PMQ$. Nempe PLQ, ſive $PL \times LQ$, eſt $\overline{PR-LR} \times \overline{PR+LR}$; nam PL eſt $PR-LR$, & LQ eſt $RQ+LR$, ſeu $PR+LR$. Porro $\overline{PR-LR} \times \overline{PR+LR}$ multiplicando fit $PRq-LRq$. Et ad eundem modum PMQ eſt $\overline{PR+RM} \times \overline{PR-RM}$, ſeu $PRq-RMq$. Ergo $BLq.\ FMq :: PRq-LRq.\ PRq-RMq$; & dividendo $BLq-FMq.\ FMq :: RMq-LRq.\ PRq-RMq$. Quamobrem cùm dentur $BLq-FMq$, FMq, & $RMq-LRq$, dabitur $PRq-RMq$. Adde datum RMq, & dabitur ſumma PRq, adeoque & latus ejus PR, cui QR æqualis eſt.

PROB.

CAPUT XIV.

PROB. LX.

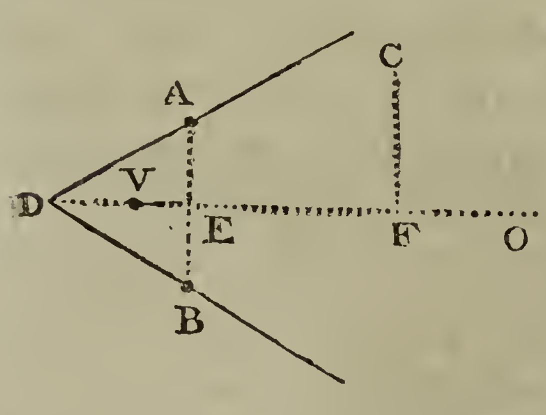
Conicam sectionem describere quæ transibit per quatuor data puncta, & in uno istorum punctorum continget rectam positione datam.



Sint puncta quatuor data, A, B, C, D, & recta positione data AE, quam conica sectio contingat in puncto A. Junge duo quævis puncta DC; & DC, producta si opus est, occurrat tangenti in E. Per quartum punctum, B, ipsi DC age parallelam BF; quæ occurrat eidem tangenti in F. Item tangenti parallelam age DI, quæ occurrat ipsi BF in I. In FB, DI, si opus est productis, cape FG, HI ejus longitudinis, ut sit AE*q*. CED : : AF*q*. BFG : : DIH. BIG. Et erunt puncta G & H in Conicâ sectione, ut notum est : si modò capias FG, IH ad legitimas partes punctorum F & I, juxta regulam in superiore Problemate traditam. Biseca BG, DC, DH in K, L & M ; junge KL, AM se mutuò secantes in O, & erit O centrum, A vertex, & HM ordinatim applicata ad semidiametrum AO. Quibus cognitis cognoscitur figura.

PROB. LXI.

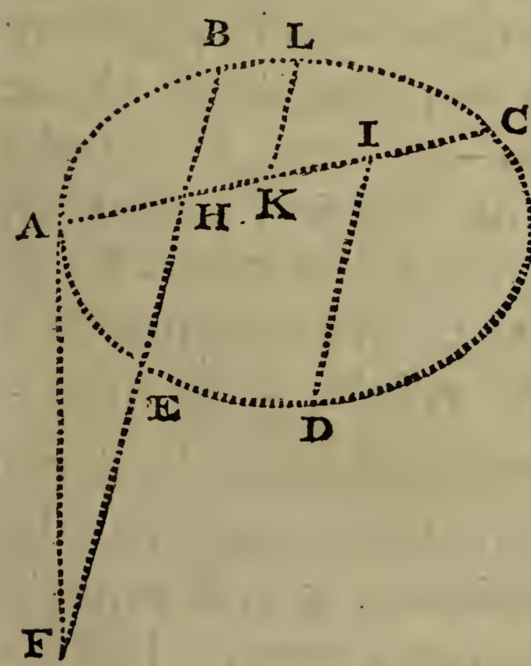
Conicam sectionem describere quæ transibit per tria data puncta, & in duobus istorum punctorum continget rectas positione datas.



Sint puncta illa data A, B, C ; tangentes AD, BD ad puncta A & B ; D communis intersectio tangentium. Biseca AB in E, Age DE, & produc eam donec in F occurrat CF actæ parallelæ AB : & erit DF diameter, & AE, CF ordinatim applicatæ ad diametrum. Produc DF ad O ; & in DO cape OV mediam proportionalem inter DO & EO, eâ lege ut sit etiam AE*q*. CF*q* : : $VE \times \overline{VO + OE}$. $VF \times \overline{VO + OF}$; & erit V vertex, & O centrum Figuræ. Quibus cognitis Figura simul

ſimul cognoſcitur. Eſt autem $VE = VO - OE$; adeoque $VE \times \overline{VO+OE}$ $= \overline{VO-OE} \times \overline{VO+OE} = VOq - OEq$. Præterea, quia VO media proportionalis eſt inter DO & EO, erit $VOq = DOE$; adeoque $VOq - OEq = DOE$ $- EOq = DEO$. Et ſimili argumento erit $VF \times \overline{VO+OF} = VOq - OFq =$ $DOE - OFq$. Ergo $AEq. CFq :: DEO. DOE - OFq$. Eſt $OFq = EOq -$ $2FEO + FEq$. Adeoque $DOE - OFq = DOE - OEq + 2FEO - FEq =$ $DEO + 2FEO - FEq$. Et $AEq. CFq :: DEO. DEO + 2FEO - FEq ::$ $DE. DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Datur ergo $DE + 2FE - \frac{FEq}{EO}$. Aufer hoc de dato $DE + 2FE$, & reſtabit $\frac{FEq}{EO}$ datum. Sit illud N; & erit $\frac{FEq}{N} = EO$, adeoque dabitur EO. Dato autem EO, ſimul datur VO medium proportionale inter DO & EO.

Problemata Geometrica.



Hoc modo per Theoremata quædam Apollonii ſatis expeditè reſolvuntur hæc problemata: quæ tamen, ſine iſtis Theorematibus, per Algebram ſolam reſolvi poſſent. Ut ſi proponatur primum trium noviſſimorum Problematum: Sint puncta quinque data, A, B, C, D, E, per quæ Conica ſectio tranſire debet. Junge duo quævis, A, C, & alia duo, B, E, rectis ſe ſecantibus in H. Ipſi BE parallelam age DI, occurrentem AC in I; ut & aliam quamvis rectam, KL, occurrentem AC in K, & conicæ ſectioni in L. Et finge Conicam ſectionem datam eſſe; ita ut cognito puncto K ſimul cognoſcatur punctum L. Et poſito $AK = x$, & $KL = y$, ad exprimendam relationem inter x & y, aſſume quamvis æquationem, quæ Conicas ſectiones generaliter exprimit; puta hanc, $a + bx + cxx + dy$ $+ exy + yy = 0$; ubi a, b, c, d, e, denotant quantitates determinatas cum ſignis ſuis, x verò & y quantitates indeterminatas. Si jam quantitates determinatas a, b, c, d, e invenire poſſumus, habebimus Conicam ſectionem. Fingamus ergo punctum L ſucceſſivè incidere in puncta, A, C, B, E, D, & videamus quid inde ſequetur. Si ergo punctum L incidit in punctum A, erit in eo caſu AK & KL, hoc eſt, x & y, nihil. Proinde æquationis omnes termini præter a evaneſcent, & reſtabit $a = 0$. Quare delendum eſt a in æquatione illâ, & cæteri termini $bx + cxx + dy + exy + yy$ erunt $= 0$. Porro ſi L

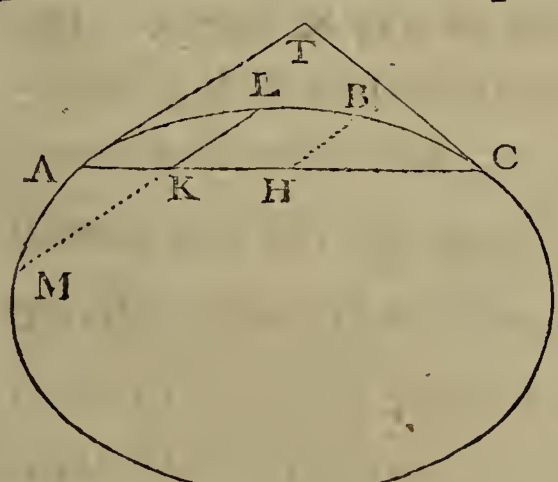
incidit in C, erit AK, ſeu x, $=$ AC, & KL ſeu $y=0$. Pone ergo AC $=f$; & ſubſtituendo f pro x, & 0 pro y, æquatio ad curvam, $bx+cxx+dy+exy+yy=0$, evadet $bf+cff=0$, ſeu $b=-cf$. Et in æquatione

illâ ſcripto $-cf$ pro b, evadet $-cfx+cxx+dy+exy+yy=0$. Adhæc ſi punctum L incidit in punctum B, erit AK, ſeu x, $=$ AH; & KL, ſeu y, $=$ BH. Pone ergo AH $=g$, & BH $=h$, & perinde ſcribe g pro x, & h pro y, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$. Quòd ſi punctum L incidit in E, erit AK $=$ AH, ſeu $x=g$; & KL, ſeu y, $=$ HE. Pro HE ergo ſcribe $-k$ cum ſigno negativo, quia HE jacet ad contrarias partes lineæ AC, & ſubſtituendo g pro x, & $-k$ pro y, æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfg+cgg-dk-egk+kk=0$. Aufer hoc de ſuperiori æquatione, $-cfg+cgg+dh+egh+hh$, & reſtabit $dh+egh+hh+dk+egk-kk=0$. Divide hoc per $h+k$, & fiet $d+eg+h-k=0$. Hoc ductum in h aufer de $-cfg+cgg+dh+egh+hh=0$, & reſtabit $-cfg+cgg+hk=0$, ſeu $\frac{hk}{-gg+fg}=c$. Denique, ſi punctum L incidit in punctum D, erit AK, ſeu x, $=$ AI, & KL, ſeu y, $=$ ID. Quare pro AI ſcribe m, & pro ID, n; & perinde pro x & y ſubſtitue m & n, & æquatio $-cfx+cxx$, &c. evadet $-cfm+cmm+dn+emn+nn=0$. Hoc divide per n, & fiet $\frac{-cfm+cmm}{n}+d+em+n=0$. Aufer $d+eg+h-k=0$; & reſtabit $\frac{-cfm+cmm}{n}+em-eg+n-h+k=0$. Sive $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$. Jam verò ob data puncta A, B, C, D, E, dantur AC, AH, AI, BH, EH, DI; hoc eſt f, g, m, h, k, n. Atque adeo per æquationem, $\frac{hk}{fg-gg}=c$, datur c. Dato autem c, per æquationem, $\frac{cmm-cfm}{n}+n-h+k=eg-em$, datur $eg-em$. Divide hoc datum per datum $g-m$, & emerget datum e. Quibus inventis, æquatio $d+eg+h-k=0$, ſeu $d=k-h-eg$, dabit d. Et his cognitis, ſimul determinatur æquatio ad quæſitam Conicam ſectionem, $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Et ex eâ æquatione per methodum Carteſii determinabitur Conica ſectio.

Quod ſi quatuor, A, B, C, E, & poſitio rectæ, AF, quæ tangit Conicam ſectionem ad unum iſtorum punctorum, A, daretur; poſſet

Conica ſectio ſic faciliùs determinari. Inventis, ut ſuprà, æquationibus $cfx=cxx+dy+exy+yy$, $d=k-b-eg$, & $c=\frac{bk}{fg-gg}$, concipe tangentem, AF, occurrere rectæ EH in F; dein punctum L moveri per perimetrum figuræ CDE, donec incidat in punctum A: & ultima ratio ipſius LK ad AK erit ratio FH ad AH; ut contemplanti figuram conſtare poteſt. Dic verò $\text{FH}=p$; & in hoc caſu, ubi LK eſt ad AK in ultimâ ratione, erit $p.g::y.x$, ſive $\frac{gy}{p}=x$. Quare pro x in æquatione $cfx=cxx+dy+exy+yy$, ſcribe $\frac{gy}{p}$; & orietur $\frac{cfgy}{p}=\frac{cggyy}{pp}+dy+\frac{egyy}{p}+yy$. Divide omnia per y, & emerget $\frac{cfg}{p}=\frac{cggy}{pp}+d+\frac{egy}{p}+y$. Jam quia ſupponitur punctum L incidere in punctum A, adeoque KL, ſeu y, infinitè parvum vel nihil eſſe, dele terminos qui per y multiplicantur, & reſtabit $\frac{cfg}{p}=d$. Quare fac $\frac{bk}{fg-gg}=c$; dein $\frac{cfg}{p}=d$; denique $\frac{k-b-d}{g}=e$; &, inventis c, d & e, æquatio, $cfx=cxx+dy+exy+yy$, determinabit conicam ſectionem.

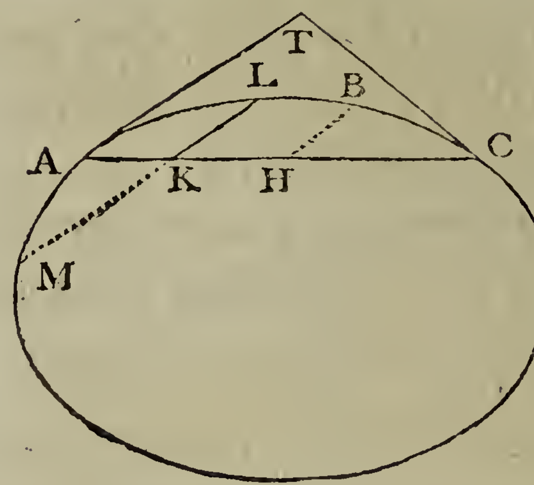
Si denique tria tantùm puncta, A, B, C, dentur, unà cum poſitione duarum rectarum, AT, CT, quæ tangunt Conicam ſectionem in duobus iſtorum punctorum, A & C; obtinebitur ut ſuprà ad Conicam ſectionem æquatio hæc, $cfx=cxx+dy+exy+yy$. Deinde, ſi ſupponatur ordinatam KL parallelam eſſe tangenti AT, & concipiatur eam produci, donec rurſus occurrat Conicæ ſectioni in M, & lineam illam LM accedere ad tangentem, AT, donec cum eâ conveniat ad A; ultima ratio linearum KL & KM ad invicem erit ratio æqualitatis; ut contemplanti figuram conſtare poteſt. Quamobrem in illo caſu exiſtentibus KL & KM ſibi invicem æqualibus, hoc eſt duobus valoribus ipſius y (affirmativo ſcilicet KL, & negativo KM) æqualibus, debent æquationis, $cfx=cxx+dy+exy+yy$, termini illi in quibus y eſt imparis dimenſionis, hoc eſt termini $+dy+exy$, reſpectu termini yy, in quo y eſt paris dimenſionis, evaneſcere. Aliter enim duo valores ipſius y, affirmativus & negativus, æquales eſſe non poſſunt. Et in illo quidem caſu AK infinitè minor erit quàm LK; hoc eſt x quàm y; proinde & terminus exy quàm terminus yy. Atque adeo infinitè



PROBLEMATA GEOMETRICA.

 minor

Caput XVI. minor exiſtens pro nihilo habendus erit. At terminus dy, reſpectu termini yy, non evaneſcet, ut oportet, ſed eo major erit, niſi d ſupponatur eſſe nihil. Delendus eſt itaque terminus dy; & ſic reſtabit $cfx = cxx + exy + yy$, æquatio ad conicam ſectionem. Concipiantur jam tangentes AT, CT ſibi mutuò occurrere in T, & punctum L accedere ad punctum C, donec in illud incidat.



Et ultima ratio ipſius KL ad KC erit AT ad AC. KL erat y; AK, x; & AC, f; atque adeo KC, $f-x$. Dic AT$=g$; & ultima ratio y ad $f-x$ erit ea quæ eſt g ad f. Æquatio $cfx=cxx+exy+yy$, ſubducto utrobique cxx, fit $cfx-cxx=exy+yy$; hoc eſt, $\overline{f-x}$ in $cx=y$ in $\overline{ex+y}$. Ergo eſt $y.f-x::cx.ex+y$; adeoque $g.f::cx.ex+y$. At, puncto L incidente in C, fit y nihil. Ergo $g.f::cx.ex$. Divide poſteriorem rationem per x, & evadet $g.f::c.e$, & $\frac{cf}{g}=e$. Quare ſi in æquatione $cfx=cxx+exy+yy$, ſcribas $\frac{cf}{g}$ pro e, fiet $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, æquatio ad conicam ſectionem. Denique ipſi KL, ſeu AT, à dato puncto, B, per quod Conica ſectio tranſire debet, age parallelam BH occurrentem AC in H; & concipiendo LK accedere ad BH, donec cum eâ coincidat, in eo caſu erit AH$=x$, & BH$=y$. Dic ergo datam AH$=m$, & datam BH$=n$, & perinde pro x & y, in æquatione $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$, ſcribe m & n; & orietur $cfm=cmm+\frac{cf}{g}mn+nn$. Aufer utrobique $cmm+\frac{cf}{g}mn$, & fiet $cfm-cmm-\frac{cf}{g}mn=nn$. Pone $f-m-\frac{fn}{g}=s$, & erit $csm=nn$. Divide utramque partem æquationis per sm, & orietur $c=\frac{nn}{sm}$. Invento autem c, determinata habetur æquatio ad Conicam ſectionem, $cfx=cxx+\frac{cf}{g}xy+yy$. Et inde, per methodum Carteſii, Conica ſectio datur, & deſcribi poteſt.

Atque hactenus varia evolvi Problemata. In ſcientiis enim addiſcendis proſunt exempla magis quàm præcepta: quâ de cauſâ in his fuſiùs expatiatus ſum. Sed & aliqua, quæ inter ſcribendum occurrebant, immiſcui ſine Algebrâ ſoluta, ut inſinuarem, in problematis, quæ primâ fronte difficilia videantur, non

ſemper

ſemper ad Algebram recurrendum eſſe. Sed tempus eſt jam æquationum reſolutionem docere. Nam poſtquam Problema ad æquationem deductum eſt, radices illius æquationis, quæ quantitates ſunt Problemati ſatisfacientes, extrahere oportebit. De Æquatione Reſolvenda.

CAPUT XV.

Quomodo æquationes reſolvendæ ſunt.

POſtquam igitur in Quæſtionis alicujus ſolutione ad æquationem perventum eſt, & æquatio illa debitè ordinata eſt & reducta; ubi quantitates, quæ per ſpecies deſignantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipſis ſubſtituendi ſunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem ſatisfaciet Quæſtioni. Ut ſi in ſectione anguli in quinque partes æquales, ſumendo r pro radio circuli, q pro ſubtenſâ complementi anguli propoſiti ad duos rectos, & x pro ſubtenſâ complementi quintæ partis anguli illius, perveniſſem ad hanc æquationem, $x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0$. Ubi in caſu aliquo particulari dantur in numeris radius, r, & linea dati anguli complementum ſubtendens, q; ut quòd radius ſit 10, & ſubtenſa 3; ſubſtituo numeros illos in æquatione pro r & q; & provenit æquatio numeralis, $x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0$: cujus radix tandem extracta erit x, ſeu linea complementum quintæ partis anguli illius dati ſubtendens.

CAPUT XVI.

De naturâ radicum Æquationis.

R*ADIX verò numerus eſt, qui, ſi in æquatione pro literâ vel ſpecie radicem ſignificante ſubſtituatur, efficiet omnes terminos evaneſcere.*

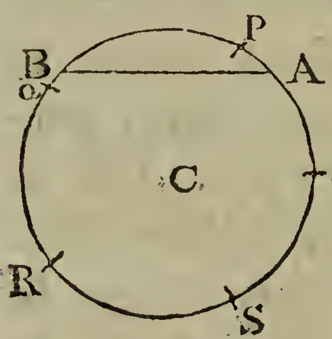
Sic æquationis $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, unitas eſt radix, quoniam ſcripta pro x producit $1 - 1 - 19 + 49 - 30$, hoc eſt nihil. Sed æquationis ejuſdem plures eſſe poſſunt radices. Nam ſi in hâc eâdem æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, pro x ſcribas numerum 2, & pro poteſtatibus x ſimiles poteſtates numeri 2, producetur $16 - 8 - 76 + 98 - 30$, hoc eſt nihil. Atque ita ſi pro x ſcribas numerum 3, vel numerum negativum -5, utroque caſu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hiſce quatuor

 quatuor casibus se mutuò destruentibus. Proinde cùm numerorum, 1, 2, 3, & − 5, quilibet scriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipsius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

Et ne mireris eandem æquationem habere posse *plures radices*, sciendum est *plures esse posse solutiones ejusdem Problematis*.

Ut si circulorum duorum quæreretur *intersectio*; *duæ* sunt eorum intersectiones, atque adeo quæstio admittit *duo responsa*; & perinde æquatio intersectionem determinans habebit *duas radices*, quibus intersectionem utramque determinet; *si modò nihil in datis sit, quo responsum ad unam intersectionem determinetur*.

Sic & si arcûs APB pars quinta AP invenienda esset, quamvis animum forte advertas tantùm ad arcum APB; tamen æquatio,



quâ quæstio solvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æquè ac quintam partem arcûs APB; quæ quintæ partes, si dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes, PQ, QR, RS, ST, TP, erunt, AT, AQ, ATS, AQR. Quoniam igitur, quærendo quintas partes arcuum quos recta AB subtendit, ad casus omnes determinandos, circumferentia tota secari debet in quinque punctis, P, Q, R, S, T; ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem

(q) Geminas æquationibus Quadraticis esse radices, item Cubicis certæ cujusdam formæ vel tergeminas Cardanus (α) monuit; Biquadraticis quibusdam quadrigeminas, nonnullis Quadrato-cubicis quintuplices (β) Vieta. Id verò generaliter obtinere, ut æquationi cujuscunque demum gradûs tot possint esse radices, neque tamen plures, quot sint in numero gradum æquationis designante unitates, primus ni fallor mortalium Albertus Girardus intellexit; cujus in opusculo Gallicè scripto et anno 1629 in lucem Æmstelædami edito, hæc est enuntiatio. "Toutes les equations d'Algebre recoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes." Quæ quidem Latinè sic ferè sonant. "Omnes æquationes algebraicæ, si imperfectas exceperis, tot solutiones capiunt, quot index potestatis elatissimæ indicat." Girardo autem hâc in re neque Cartesius neque Harriottus nostras facem prætulisse censendi sunt, quum Harriotti Artis Analyticæ Praxis non nisi biennio post Inventa Nova Algebraica Girardi in lucem edita est, Cartesii vero Geometria seriùs etiam quinquennio. Quinetiam Harriotus de numero radicum nil planè sani habet. Vir magnæ quidem diligentiæ, sed mediocris ingenii, ea ferè in Algebraicis intellexit, quæ à Cardano et à Vietâ acceperat; et radices, sicut

(α) Arithmet. Lib. 10. c. 1. (β) De emendat. æquat. c. 14.

De Natura Radicum.

eandem ſemper æquationem incideris, ſive quæras quintam partem arcûs APB, ſive quintam partem arcûs ASB, ſive alterius cujuſvis ex arcubus quintam partem. Unde ſi æquatio, quâ quinta pars arcûs APB determinatur, non haberet plures radices quàm unam, dùm quærendo quintam partem arcûs ASB incidimus in eandem illam æquationem, ſequeretur, majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor eſt; eo quòd ſubtenſa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate neceſſe eſt æquationem, quâ reſpondetur, tot habere radices, quot ſunt quæſitæ quantitatis caſus diverſi, ab iiſdem datis pendentes & eâdem argumentandi ratione determinandi.*

Poteſt verò æquatio tot habere radices quot ſunt dimenſiones ejus, & non plures (q).

Sic æquatio $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, quatuor habet radices 1, 2, 3, & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris ſcriptus in æquatione pro x efficet terminos omnes ſe mutuò deſtruere, ut dictum eſt; præter hos vero nullus eſt numerus cujus ſubſtitutione hoc eveniet.

Cæterùm numerus & natura radicum ex generatione æquationis optimè intelligetur.

Ut ſi ſcire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices ſint 1, 2, 3, & -5, ſupponendum erit x ambiguè ſignificare numeros illos; ſeu eſſe $x=1$, $x=2$, $x=3$, & $x=-5$; vel quòd perinde eſt, $x-1=0$, $x-2=0$, $x-3=0$, & $x+5=0$; Et multiplicando hæc in ſe, prodibit, multiplicatione $x-1$, in $x-2$,

ſicut illi fecerant, cuilibet æquationi totidem tribuit, quot illa poſitivas habeat; negativarum ne in ullo quidem caſu ratione habitâ, utpote quas ſemper, ut opinor, inutiles judicavit; cùm earum naturam minimè perſpexiſſet. Sic in ſectione operis ſui quartâ prop. 1ª. æquationis quadraticæ, $aa \begin{matrix}-b\\+c\end{matrix} a = bc$, cujus radices ſunt $+b$, $-c$, unicam radicem ſtatuit b; illam c radicem eſſe negat. In propoſitione verò ſecundâ æquationis, $aa \begin{matrix}-b\\-c\end{matrix} a = bc$, radicem utramque, $+b$, $+c$, agnovit. Rurſum in propoſitione 3ª. æquationis cubicæ $aaa \begin{matrix}+b\\+c\\-d\end{matrix} aa \begin{matrix}+bc\\-bd\\-cd\end{matrix} a = bcd$, cujus tres ſunt radices $+d$, $-b$, $-c$ radicem unicam, $+d$, ſtatuit; alteras, b et c, radices eſſe negat. In propoſitione 4ª. æquationis $aaa \begin{matrix}+b\\-c\\-d\end{matrix} aa \begin{matrix}-bc\\-bd\\+cd\end{matrix} a = -bcd$, cujus radices ſunt tres, $+d$, $+c$, $-b$, duas, d, c, agnovit, tertiam $-b$ rejecit. In propoſitione 5ª. æquationis $aaa \begin{matrix}-b\\-c\\-d\end{matrix} aa \begin{matrix}+bc\\+cd\\+bd\end{matrix} a = bcd$ agnovit tres radices poſitivas b, c, d.

hæc

Caput XVI. hæc æquatio, $xx-3x+2=0$; quæ duarum eſt dimenſionum, ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x-3$ prodibit $x^3-6xx+11x-6=0$, æquatio trium dimenſionum totidemque radicum; quæ iterum multiplicata per $x+5$ fit $x^4-x^3-19xx+49x-30=3$, ut ſuprà. Cùm igitur hæc æquatio generetur ex quatuor factoribus, $x-1$, $x-2$, $x-3$, & $x+5$, in ſe continuò ductis, ubi factorum aliquis nihil eſt, quod ſub omnibus fit nihil erit; ubi verò horum nullus nihil eſt, quod ſub omnibus continetur nihil eſſe non poteſt. Hoc eſt, non poteſt $x^4-x^3-19xx+49x-30$, eſſe nihilo æquale, ut oportet, niſi his quatuor caſibus, ubi eſt $x-1=0$, vel $x-2=0$, vel $x-3=0$, vel denique $x+5=0$: proinde ſoli numeri, 1, 2, 3, & -5, valere poſſunt x, ſeu radices eſſe æquationis. Et ſimile eſt ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari poſſumus omnes generari, quamvis factores ab invicem ſecernere ſolet eſſe difficillimum, & ipſum eſt quod æquationem reſolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur factores.

Radices verò ſunt duplices; affirmativæ *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, *&* negativæ *ut* -5. *Ex his verò aliquæ non rarò evadunt* impoſſibiles [r].

Sic æquationis, $xx-2ax+bb=0$, radices duæ, quæ ſunt $a+\sqrt{aa-bb}$, & $a-\sqrt{aa-bb}$ reales quidem ſunt, ubi aa majus eſt quàm bb; at ubi aa minus eſt quàm bb, evadunt impoſſibiles; eò quòd $aa-bb$ tunc evadet negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica eſt impoſſibilis. Omnis enim radix poſſibilis ſive affirmativa ſit, ſive negativa, ſi per ſeipſam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impoſſibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento

[r] Ainſi qu'on peut donner trois noms aux ſolutions, veu qu'il y en a qui ſont plus que rien, d'autres moins que rien; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres ſemblables. *Albert Girard. Invent. nouv. en Alg.*

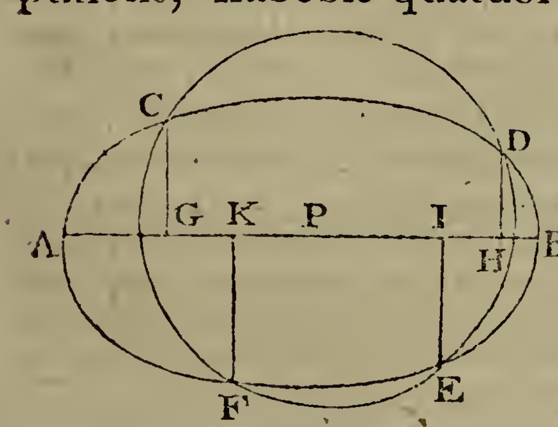
"Tribus igitur nominibus radices diſtinguendæ ſunt. Sunt enim nihilo majores, ſunt minores nihilo, ſunt etiam involutæ; nimirum hoc ſigno implicitæ, $\sqrt{-}$, ut $\sqrt{-3}$, aut aliûs cujuſvis numeri negati radix quadratica." Quas verò hoc loco *involutas* alibi aptiòre vocabulo *impoſſibiles* dixit.

[s] Id verò notandum, in æquationibus quibus membra nulla deſunt, non ex formâ æquationis ſed ex magnitudinibus coeſficientium et homogenei comparationis radices impoſſibiles fieri. Nam in quâlibet æquatione radices ſunt poſſibiles, quamdiu coefficientium et homogenei comparationis magnitudines, ac mutuæ proportiones, intra limites quoſdam conſtiterint certis legibus præfiniendos. Sic omnis æquationis quadraticæ radices ſunt poſſibiles, cujus homogeneum comparationis

gumento colligitur æquationem, $x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0$, unam qui- *De Natura Radicum.*
dem realem radicem habere, quæ eſt 2; duas verò impoſſibiles, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam quælibet ex his, 2, $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$, ſcripta in æquatione pro x, efficiet omnes ejus terminos ſe mutuò deſtruere; ſunt verò $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$, numeri impoſſibiles, eò quòd extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præſupponant (f).

Æquationum verò radices ſæpe impoſſibiles eſſe æquum eſt, ne caſus problematum, qui ſæpe impoſſibiles ſunt, exhibeant poſſibiles.

Ut ſi rectæ & circuli interſectio determinanda eſſet, & pro circuli radio, & rectæ à centro ejus diſtantiâ, ponantur literæ duæ; ubi æquatio interſectionem definiens habetur, ſi pro literâ deſignante diſtantiam rectæ à centro ponatur numerus minor radio, interſectio poſſibilis erit; ſin major, fiet impoſſibilis; & æquationis radices duæ quæ interſectiones duas determinant, debent eſſe perinde poſſibiles vel impoſſibiles, ut rem ipſam verè exprimant. Atque ita ſi circulus CDEF, & Ellipſis ACBF ſe mutuò ſecent in punctis, C, D, E, F, & ad rectam aliquam poſitione datam, AB, demittantur perpendicula, CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus è perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem; æquatio illa, ubi circulus ſecat Ellipſin in quatuor punctis, habebit quatuor radices reales; quæ erunt quatuor illa



perpendicula. Quòd ſi circuli radius, manente centro ejus, minuatur, donec, punctis E & F coaleſcentibus, circulus tandem tangat Ellipſin, ex radicibus duæ illæ, quæ perpendicula, EI & FK, jam coincidentia, exprimunt, evadent æquales. Et ſi circulus adhuc minuatur,

parationis quadrante poteſtatis quadraticæ coefficientis lateris non ſit majus. Et omnis æquationis cubicæ radices ſunt poſſibiles, cujus deleto membro ſecundo (id quod viâ mox tradendâ in omnibus facere licet) homogenei comparationis æquationis transformatæ poteſtas cubica ad poteſtatem quadraticam coefficientis membri ejuſdem transformatæ tertii proportionem habeat minorem quàm numerus viceniſeptenarius ad quaternarium. Erravit igitur Girardus cùm regulæ generalis, quam de radicum numero veriſſimam allegavit, in æquationibus imperfectis exceptionem conſtituit, quaſi verò aut ſolis aut ſemper illis radices impoſſibiles eſſent. Sunt quidem perfectæ, quibus nulla radix eſt poſſibilis; ſunt imperfectæ, quæ juſto radicum numero gaudent. Æquationi biquadraticæ $x^4 - 5x^3 + 18x^2 - 31x^2 + 35 = 0$, perfectæ licèt, radices omnes ſunt impoſſibiles: cubicæ, $y^3 - 19y + 30 = 0$, veræ ſunt omnes. Nempe prioris radices ſunt $1 + \sqrt{-6}$, $1 - \sqrt{-6}$, $\frac{3}{2} + \sqrt{-2\frac{3}{4}}$, $\frac{3}{2} - \sqrt{-2\frac{3}{4}}$; poſterioris 2, 3, -5.

CAPUT XVI. ut Ellipsin in puncto EF ne quidem tangat, sed secet tantùm in alteris duobus punctis, C, D; tunc ex quatuor radicibus duæ illæ, quæ perpendicula, EI, FK, jam facta impossibilia exprimebant, fient unà cum perpendiculis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus, augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primò æquales, deinde impossibiles, evadere solent. (t) Et inde fit quòd radicum impossibilium numerus semper sit par.

Sunt tamen radices æquationum aliquandò possibiles, ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit, ob limitationem aliquam in Schemate, quòd ad æquationem nil spectat.

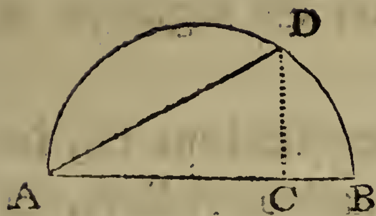
Ut si in semicirculo, ADB, datis diametro, AB, & lineâ inscriptâ, AD, demissoque perpendiculo, DC, quærerem diametri segmentum, AC, foret $\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quantitas, ubi linea inscripta AD major est quàm diameter

(t) Vides igitur radices ex eo fieri impossibiles, quòd datarum magnitudines eæ sint, quæ cum conditionibus Problematis consistere nequeant: unde talis necessariò nascitur æquatio, cujus coefficientes et homogeneum comparationis conditiones recusant, quas ad rei propositæ effectionem omninò illis subeundas signa æquationis indicant. Vel ut breviùs dicam, cùm id aggressus sis quod fieri omninò rerum Natura vetuit, exinde eveniet ut in symbola incidas quorum nulla est interpretatio, quæ intelligi nequeunt. (confer Maclaurin. Algebr. part. 3. cap. 1.)

Reverâ Radix impossibilis illud est, quod in rerum Naturâ nusquam extat. Cautè igitur accipiendum est, quod à Maclaurino, credo, omnium primo dictum, nunc omnibus est in ore, quantitatis cujusvis, atque ipsius adeo unitatis, triplicem esse radicem cubicam Algebraicam; unam veram, duas impossibiles: unitatis quidem, præter ipsam unitatem quæ sola vera est, impossibiles duas, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$: alius autem cujusvis quantitatis cubicæ, puta a^3, præter veram a, duas illas $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$: atque hæc ita esse ex eo conficitur, quòd æquationi cubicæ, $x^3-a^3=0$, radices illæ tres sint, a, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$. Hæc verò minimè ita accipienda sunt, ac si quantitas ulla esset, quæ in se cubicè multiplicata unitatem redderet, præter ipsam unitatem; qualis certè in rerum Naturâ nulla extat: sicut nulla est, quæ in se cubicè multiplicata quantitatem cubicam symbolo a^3 designatam reddat præter ipsam a. Neque profectò linea recta est ulla, ex quâ si cubus sit extructus cubum è rectâ datæ longitudinis adæquabit, præter ipsam illam datæ longitudinis rectam. Symbola autem illa, $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, quantitatis a^3 radices cubicæ dicuntur, sensu merè algebraico. Nimirum si horum binomiorum utrumvis, nullâ significantiæ ejus ratione habitâ, perinde ac si veram aliquam quantitatem designaret, secundum leges multiplicationis algebraicæ in se cubicè multiplicaveris, exitu operis, quantitas a^3 exsistet; vel si binomium $x-a$ cum trinomiis $x+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$ algebraicè multiplicaveris, binomium y^3-a^3 effeceris; cujus propterea radices binomia $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{-3}$ jure optimo vocanda sunt, cùm ad ejus compositionem algebraicam eodem planè modo eorum unumquodque contulerit, ac quantitas a quæ verè radix est. Similis semper interpretatio adhibenda est, quando mathematici radices æquationum impossibiles certis tamen symbolis repræsentari volunt. Sunt utique istiusmodi symbola æquationum, quarum radices dicuntur, elementa merè algebraica; ex quibus, certa lege compositis, assumptis etiam quas possibiles quæque radices habeat, æquationes exsistunt, haud aliter ac syllabæ et voces è literis certo ordine conjunctis, ascitisque vocalibus, quarum separatim et sine illis neque sonus neque sensus est.

(v) Idem planè eodemque modo Albertus Girardus dixit, cujus hæc sunt verba.

Jusques

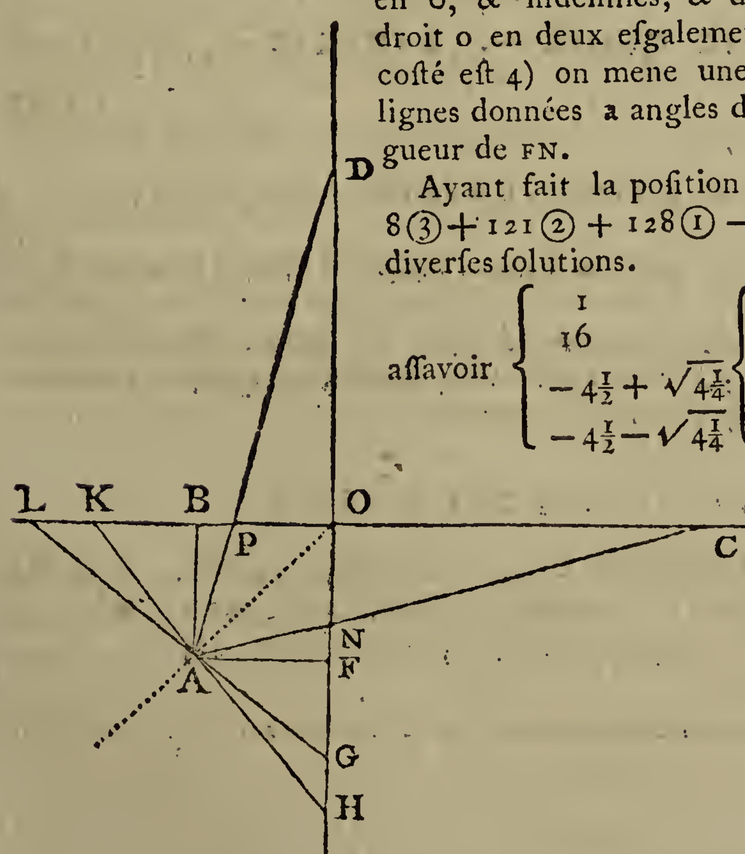


meter AB; per Schema verò AC tunc evadit impossibilis. Nimirum, in schemate, linea AD supponitur inscribi in circulo, atque adeo diametro circuli major esse non potest; in æquatione verò nihil est, quod à conditione illâ pendeat. Ex hâc solâ linearum conditione colligitur æquatio, quòd sint AB, AD, & AC continuè proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones schematis, non necesse est, ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius est in schemate, quam in æquatione, potest illud limitibus arctare, hanc non item. Quâ de causâ ubi æquationes sunt imparium dimensionum, adeoque radices omnes impossibiles habere non possunt; schemata quantitatibus, à quibus radices omnes pendent, sæpè limites imponunt, quos transgredi, servatis schematum conditionibus, impossibile est (u).

De Natura Radicum.

Ex

Jusques icy nous n'avons encor expliqué a quoy servent les solutions par moins, quand il y en a. La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, et le moins recule là ou le + avance.



BROBLEME D'INCLINAISON.

Soyent deux lignes droictes, DG, BC, se couppant en angles droits en O, & indefinies, & du poinct A (dans la ligne qui couppe l'angle droit O en deux esgalement, ainsi que ABOF est quarré dont chacun costé est 4) on mene une ANC, ainsi que l'intercepté, NC, (entre les lignes données a angles droit, DG, BC) soit $\sqrt{153}$, on demande la longueur de FN.

Ayant fait la position de FN 1① on trouvera que 1④ sera esgale a 8③ + 121② + 128① − 256, & ainsi la valeur de 1① recevra quatre diverses solutions.

assavoir	1	FN	
	16	FD	
	$-4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$	monstrant le poinct G	du poinct F.
	$-4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$	monstrant le poinct H	

Assavoir, monstrant lesdits poincts G & H, comme si les distances FG, FH estoyent moins que rien, en retrogradant; prenant que FN, FD avancent, & FG, FH reculent en arriere, tellement donc que les interceptes CN, DP, GL, HK, tendent & s'enclinent au poinct A, faisant chacune $\sqrt{153}$, selon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux solutions qui sont moins que O, se doivent changer, assavoir les signes.

viendra $\begin{cases} 4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{pour FG} \\ 4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}} & \text{pour FH} \end{cases}$

Lesquels il faut poser au contraire de FN, FD, comme il est exprimé en la figure precedente: & ainsi

CAPUT XVI. *Ex radicibus verò quæ reales ſunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppoſitas ſolent tendere.*

Sic, in ſchemate penultimo, quærendo perpendiculum CG, incidetur in æquationem, cujus duæ erunt affirmativæ radices, CG ac DH, à punctis C & D tendentes verſus unam plagam, & duæ negativæ, EI & FK, tendentes à punctis E & F verſus plagam oppoſitam. Aut ſi in lineâ AB, ad quam perpendicula demittuntur, detur aliquod punctum P, & pars ejus PG, à puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG extendens, quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK; quarum quæſita PG, & quæ à puncto P ad eaſdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ verò tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

Ubi æquationis radices nullæ impoſſibiles ſunt, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* ſignis *terminorum æquationis cognoſci poteſt.* Tot *enim ſunt radices affirmativæ quot ſignorum in continuâ ſerie* mutationes *de* + *in* − & − *in* +; *cæteræ* negativæ *ſunt* (x).

Ut in æquatione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, ubi terminorum ſigna ſe ſequuntur hoc ordine, $+ - - + -$, variationes ſecundi − à primo +, quarti + à tertio −, & quinti −, à quarto +, indicant tres

ainſi le faudra-t-il entendre de toutes ſolutions par moins, qui eſt une choſe de conſequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

Hæc quidem de radicibus negativis Girardus, quorum ſenſum vocibus Latinis, & notis Algebraicis hodiè uſitatis ſic effero.

Radices negativæ, ſi quando obveniant, nondum diximus ad quid ſint utiles. Radicis igitur negatio in Geometriâ ſic accipienda eſt, ut per eam ſignificetur contrarius quidam linearum ac quaſi retrorſum ductus. Etenim ubi + progreditur ibi − recedit.

PROBLEMA EX INCLINATIONIBUS.

Sint duæ rectæ indefinitæ, DG, BC, quarum decuſſatio fiat in O ad angulos rectos. A puncto autem A (ad rectam ſcilicet quæ rectum angulum ad O medium dividit, ut ſit ABOF quadratum cujus latus ſit 4) ductam puta rectam ANC, cujus pars NC rectis primò poſitis, BC, DG, intercepta, ſit $\sqrt{153}$. Quæritur longitudo rectæ FN.

Si rectam FN litterâ x deſignaveris, ſubductis calculis invenies, $x^4 = 8x^3 + 121x^2 + 128x - 256$. Hinc literæ x æſtimationes ſunt quatuor.

$$\text{Nimirum}\left\{\begin{array}{l} 1 \\ 16 \\ -4\tfrac{1}{2} + \sqrt{4\tfrac{1}{4}} \\ -4\tfrac{1}{2} - \sqrt{4\tfrac{1}{4}} \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} \text{FN} \\ \text{FD} \\ \text{diſtantia puncti G} \\ \text{diſtantia puncti H} \end{array}\right\}\text{a puncto F.}$$

Quibus

tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At, ubi radices aliquæ *impossibiles* sunt, regula non valet; nisi quatenus impossibiles illæ, quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ, pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione, $x^3+pxx+3ppx-q=0$; signa indicant unam esse affirmativam radicem, & duas negativas. Finge $x=2p$, seu $x-2p=0$; & multiplica æquationem priorem per hanc $x-2p=0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus; & prodibit hæc æquatio $x^4-px^3+ppxx\,{-6p^3 \atop -q}\,x+2pq=0$, quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices: habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impossibiles*; quæ, pro ambiguitate suâ, priori casu negativæ, posteriori affirmativæ, esse videntur.

De Natura Radicum.

Verùm quot radices impossibiles sunt cognosci ferè potest per hanc regulam.

Constitue seriem fractionum, quarum denominatores sunt numeri in hâc progressione, 1, 2, 3, 4, 5, &c. *pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus* (y) *quàm rectangulum terminorum utrinque consistentium,*

Quibus punctorum G, H situs ita indicatur, ac si distantiæ FG, FH retrorsum emensæ nihilo minores essent. Etenim si linearum FN, FD versus puncta N, D ductum *progressum* dixeris, contrarium rectarum FG, FD ductum necesse est *regressum* dicas. Quatuor autem, CN, DP, GL, HK, rectis DG, BC, interceptæ, quantitati $\sqrt{153}$ singulatim sunt æquales; et, ad punctum A vergendo, problematis requisitis singulæ quidem satisfaciunt.

Vel ut rem etiam clariùs dicam, radicum duarum negativarum signa [partium] mutari debent, ut ex [duarum $4\frac{1}{2}$, $\sqrt{4\frac{1}{4}}$ differentiâ] $4\frac{1}{2}-\sqrt{4\frac{1}{4}}$, efficiatur distantia FG; ex [earumdem summâ] $4\frac{1}{2}+\sqrt{4\frac{1}{4}}$ distantia FH. Tum duæ illæ FH, FG, ad partes puncti F ponendæ sunt, earum ad quas positæ sunt FN, FD contrarias; quemadmodum figuræ appositæ lineationes indicant. Atque omnium quidem radicum negativarum similis est interpretatio, quæ res licèt hactenus incognita maximas tamen habet in Geometriâ utilitates.

(x) Hæc regula magnum illum *Cartesium* inventorem habuit, quem graviter sanè nonnulli incusârunt quasi in Algebra cis totus alienus esset. Mihi verò crimen non probant.

(y) Intellige, *algebraicè* majus; licet enim quantitas fracta, quæ super coefficientem aliquem scripta est, coefficientis illius potestatem quadraticam multiplicans quantitatem fecerit facto ex coefficientibus utrinque proximis minorem, tamen si coefficientibus illis proximis contraria signa sint, ut factum ex illis negativum sit, sub coefficiente intermedio collocandum est signum +. Vel si membro aliquo æquationis deficiente, membra utrinque proxima signis prædita sint contrariis, sub membro deficiente collocandum est signum +.

colloca

Caput XVI. *colloca signum* $+$; *sin minus, signum* $-$. *Sub primo verò & ultimo termino colloca signum* $+$. *Et tot erunt radices impossibiles, quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes, de* $+$ *in* $-$ *&* $-$ *in* $+$.

Ut si habeatur æquatio, $x^3+pxx+3ppx-q=0$: Divido seriei hujus $\frac{3}{1}.\frac{2}{2}.\frac{1}{3}$ fractionum secundam, $\frac{2}{2}$, per primam, $\frac{3}{1}$; & tertiam, $\frac{1}{3}$, per secundam, $\frac{2}{2}$; & fractiones prodeuntes, $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis, ut sequitur. Dein quoniam quadratum secundi termini, pxx, ductum in imminentem fractionem, $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$, minus est, quàm primi termini x^3 & tertii $3ppx$ rectangulum, $3ppx^4$; sub termino pxx, colloco signum $-$. At quia tertii termini, $3ppx$, quadratum, $9p^4xx$, ductum in imminentem fractionem, $\frac{1}{3}$, majus est quàm nihil, atque adeo multo majus quàm secundi termini, pxx, & quarti, $-q$, rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum $+$. Dein sub primo termino, x^3, & ultimo, $-q$, colloco signa $+$. Et signorum subscriptorum, quæ in hâc sunt serie, $++++$, mutationes duæ, una de $+$ in $-$, alia de $-$ in $+$, indicant duas esse radices impossibiles.

$$\begin{array}{cccc} & \tfrac{1}{3}. & \tfrac{1}{3}. & \\ x^3 & +pxx & +3ppx & -q=0 \\ + & - & + & + \end{array}$$

Sic & æquatio, $x^3-4xx+4x-6=0$, duas habet radices impossibiles.

$$\begin{array}{cccc} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & \\ x^3 & -4xx & +4x & -6=0 \\ + & + & - & + \end{array}$$

Æquatio item, $x^4-6xx-3x-2=0$, duas habet. Nam hæc fractionum series, $\frac{4}{1}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$, dividendo secundam per primam, tertiam per secundam, & quartam per tertiam, dat hanc seriem, $\frac{3}{8}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}$, super mediis æquationis terminis collocandam.

$$\begin{array}{ccccc} & \tfrac{3}{8} & \tfrac{4}{9} & \tfrac{3}{8} & \\ x^4 & * & -6xx & -3x & -2=0 \\ + & + & + & - & + \end{array}$$

Dein secundi termini, qui hic nihil est, quadratum, ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$, producit, nihil; quod tamen majus est quàm rectangulum negativum, $-6x^6$, sub terminis utrinque positis, x^4 & $-6xx$, contentum. Quare sub termino illo deficiente scribo $+$. In cæteris pergo ut in exemplo superiori; & signorum subscriptorum prodit hæc series, $+++-+$; ubi duæ mutationes indicant duas radices impossibiles. Et ad eundem modum in æquatione $x^5-4x^4+4x^3-2xx-5x-4=0$, deteguntur impossibiles duæ.

$$\begin{array}{cccccc} & \tfrac{2}{5}. & \tfrac{1}{2}. & \tfrac{1}{2}. & \tfrac{2}{5}. & \\ x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4=0 \\ + & + & - & + & + & + \end{array}$$

Ubi

Ubi termini duo vel plures ſimul deſunt, ſub primo terminorum deficientium collocandum eſt ſignum −, ſub ſecundo ſignum +, ſub tertio ſignum −, & ſic deinceps, ſemper variando ſigna; niſi quòd ſub ultimo terminorum ſimul deficientium ſemper collocandum eſt ſignum +, ubi deficientibus utrinque proximi habent ſigna contraria. Ut in æquationibus De Natura Radicum.

$$\begin{array}{l} x^5 + ax^4 * * * + a^5 = 0, \\ + \quad + - + - \quad + \end{array}$$

quarum prior quatuor, poſterior duas,

$$\begin{array}{l} \& \; x^5 + ax^4 * * * - a^5 = 0, \\ + \quad + - + + \quad + \end{array}$$

habet impoſſibiles radices. Sic & æquatio

$$\begin{array}{l} \quad \tfrac{3}{7}. \quad \tfrac{5}{9}. \quad \tfrac{3}{5}. \quad \tfrac{3}{5}.\ \tfrac{5}{9}.\ \tfrac{3}{7}. \\ x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3 * * - 3 = 0 \\ + \quad - \quad + \quad - \quad + - + \quad + \end{array}$$

ſex habet impoſſibiles.

Hinc etiam cognoſci poteſt, utrùm radices impoſſibiles inter affirmativas radices latent, an inter negativas. Nam ſigna terminorum, ſignis ſubſcriptis variantibus imminentium, indicant tot affirmativas eſſe impoſſibiles, quot ſunt ipſorum variationes; & tot negativas, quot ſunt ipſorum ſucceſſiones, ſine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{l} x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0 \\ + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

quoniam ſignis infrà ſcriptis variantibus, + − +, quibus radices duæ impoſſibiles indicantur, imminentes termini, $-4x^4 + 4x^3 - 2xx$, ſigna habent − + −, quæ, per duas variationes, indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impoſſibiles inter affirmativas latebunt. Cùm itaque omnium æquationis terminorum ſigna, + − + − − −, per tres variationes indicant tres eſſe affirmativas radices, & reliquas duas negativas eſſe, & inter affirmativas lateant duæ impoſſibiles, ſequitur, æquationis unam eſſe radicem verè affirmativam, duas negativas ac duas impoſſibiles. Quòd ſi æquatio fuiſſet

$$\begin{array}{l} x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0 \\ + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \end{array}$$

tunc termini ſubſcriptis ſignis prioribus variantibus, + −, imminentes, nimirum $-4x^4 - 4x^3$, per ſigna ſua non variantia − & −, indicant unam, ex negativis radicibus, impoſſibilem eſſe; & termini ſignis ſubſcriptis poſterioribus variantibus, − +, imminentes, nimirum $-2xx - 5x$, per ſigna ſua non variantia, − & −, indicant aliam, ex negativis radicibus, impoſſibilem eſſe.

Cap. XVI. esse. Quamobrem, cùm æquationis signa, $+ - - - - -$, per unam variationem, indicent unam affirmativam radicem, cæteras quatuor negativas esse; sequitur, unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent, ubi non sunt plures impossibiles radices, quàm per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perrarò eveniat.

CAPUT XVII.

De transmutationibus Æquationum (z).

C*Æterùm æquationis cujusvis radices omnes* affirmativæ *in* negativis, *&* negativæ *in* affirmativas, *mutari possunt, idque mutando tantùm signa terminorum alternorum* (a).

Sic æquationis, $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0$, radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas, mutando tantùm signa secundi quarti & sexti termini ut hîc fit, $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0$. Easdem habet hæc æquatio radices cum priore, nisi qòod hîc affirmativæ sunt, quæ ibi erant negativæ, & hîc negativæ, quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles, quæ ibi inter affirmativas latebant, hîc latent inter negativas; ita ut his deductis restet unica tantùm radix verè negativa.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. *Possumus enim supponere, radicem æquationis ex cognitâ & incognitâ aliquâ quantitate utcunque componi, & perinde pro eâ substituere, quod æquipollens esse fingitur.* Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognitâ illâ quantitate augere vel diminuere, vel de cognitâ quantitate subducere; atque ita efficere, ut earum aliquæ, quæ priùs erant negativæ, jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ aut omnes negativæ (b). Sic in æquatione, $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$, si radices unitate augeri vellem, fingo $x + 1 = y$, seu $x = y - 1$; & perinde pro x scribo in æquatione

(z) Hujusce doctrinæ fundamenta jecit Franciscus Vieta, cujus librum vide de Recognitione Æquationum, c. 7.

(a) Anastrophe Vietæa De Emendat. Æquationum, c. 3. Vide etiam Cartesii Geometr. Lib. 3.

(b) Vid.

tione $y-1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x ſimilem poteſtatem de $y-1$, ad hunc modum.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
x^4 & y^4 & -4y^3 & +6yy & -4y & +1 \\
-x^3 & & -y^3 & +3yy & -3y & +1 \\
-19xx & & & -19yy & +38y & -19 \\
+49x & & & & +49y & -49 \\
-30 & & & & & -30 \\
\hline
\text{Summa} & y^4 & -5y^3 & -10yy & +80y & -96=0.
\end{array}$$

Et æquationis prodeuntis $y^4-5y^3-10yy+80y-96=0$, radices erunt, 2, 3, 4, -4; quæ priùs erant, 1, 2, 3, -5, unitate jam factæ majores. Quòd ſi pro x ſcripſiſſem $y+1\frac{1}{2}$, prodiiſſet æquatio $y^4+5y^3-10yy-\frac{5}{4}y+\frac{39}{16}=0$; cujus duæ fuiſſent radices affirmativæ, $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$, ac duæ negativæ, $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero ſcribendo $y-6$, prodiiſſet æquatio, cujus radices fuiſſent, 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ; & pro eodem ſcribendo $y+4$, radices, jam numero quaternario diminutæ, evaſiſſent -3, -2, -1, -9; negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices, ſiquæ impoſſibiles ſunt, hæ aliquando faciliùs detegentur quàm priùs. Sic in æquatione, $x^3-3aax-3a^3=0$, radices nullæ per præcedentem regulam apparent impoſſibiles. At ſi augeas radices quantitate a, ſcribendo $y-a$ pro x, in æquatione reſultante, $y^3-3ayy-a^3=0$, radices duæ impoſſibiles jam per regulam illam detegi poſſunt.

Eâdem operatione poſſumus etiam ſecundos terminos æquationum tollere (c). Hoc enim fiet, ſi cognitam quantitatem ſecundi termini æquationis propoſitæ, per numerum dimenſionum æquationis diviſam, ſubducamus de quantitate, quæ pro novæ æquationis radice ſignificandâ aſſumitur, & reſiduum ſubſtituamus pro radice æquationis propoſitæ. Ut ſi proponatur æquatio, $x^3-4xx+4x-6=0$, cognitam quantitatem ſecundi termini, quæ eſt -4, diviſam per numerum dimenſionum æquationis, 3, ſubduco de ſpecie, quæ pro novâ radice ſignificandâ aſſumitur, puta de y; & reſiduum $y+\frac{4}{3}$ ſubſtituo pro x, & provenit,

$$\begin{array}{rrrr}
y^3 & +4yy & +\frac{16}{3}y & +\frac{64}{27} \\
 & -4yy & -\frac{32}{3}y & -\frac{64}{9} \\
 & & +4y & +\frac{16}{3} \\
 & & & -6 \\
\hline
y^3 & * & -\frac{4}{3}y & -\frac{146}{27}=0.
\end{array}$$

Eâdem methodo poteſt & tertius æquationis terminus tolli. Proponatur æquatio $x^4-3x^3+3xx-5x-2=0$, & finge $x=y-e$; & ſubſtituendo $y-e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$\left.\begin{array}{l} y^4 \; \begin{array}{l}-4e\\-3\end{array} y^3 \; \begin{array}{l}+6ee\\+9e\\+3\end{array} yy \; \begin{array}{l}-4e^3\\-9ee\\-6e\\-5\end{array} y \; \begin{array}{l}+e^4\\+3e^3\\+3ee\\+5e\\-2\end{array}\end{array}\right\} = 0.$$

Hujus æquationis tertius terminus eſt $6ee+9e+3$ ductum in yy. Ubi ſi $6ee+9e+3$ nullum

(c) Vid. Carteſii Geomet. Lib. 3.

(d) Expurgatio per Uncias Vietæ. Vid. Librum de emendatione æquationum, c. 1.

 eſſet,

Cap. XVII. eſſet, eveniret ipſum quod volumus. Fingamus itaque nullum eſſe, ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum ſubſtitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee+9e+3=0$; quæ diviſa per 6 fiet $ee+\frac{3}{2}e+\frac{1}{2}=0$, ſeu $ee=-\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}$; &, extractâ radice, $e=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}$, ſeu $=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc eſt $=-\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$, atque adeo vel $=-\frac{1}{2}$ vel $=-1$. Unde $y-e$ erit vel $y+\frac{1}{2}$, vel $y+1$. Quamobrem, cùm $y-e$ ſcriptum fuit pro x, vice $y-e$ debet $y+\frac{1}{2}$, vel $y+1$, ſcribi pro x, ut tertius æquationis reſultantis terminus nullus ſit. Et in utroque quidem caſu id eveniet. Nam ſi pro x ſcribatur $y+\frac{1}{2}$, orietur hæc æquatio, $y^4-y^3-\frac{15}{4}y-\frac{65}{16}=0$; ſin ſcribatur $y+1$, orietur hæc, $y^4+y^3-4y-6=0$.

Poſſunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractioneſque & radicales quantitates aliquandò tolli ([d]).

Ut ſi æquatio ſit $y^3-\frac{4}{3}y-\frac{146}{27}=0$, ad tollendas fractiones fingo eſſe $y=\frac{1}{3}z$; & perinde pro y ſubſtituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova $\frac{z^3}{27}-\frac{12z}{27}-\frac{146}{27}=0$; & rejecto terminorum communi denominatore, $z^3-12z-146=0$, cujus æquationis radices ſunt triplo majores quàm antè. Et rurſus, ad diminuendos terminos æquationis hujus, ſi ſcribatur $2v$ pro z, prodibit $8v^3-24v-146=0$; &, diviſis omnibus per 8, fiet $v^3-3v-18\frac{1}{4}=0$; cujus æquationis radices dimidiæ ſunt radicum prioris. Et hîc, ſi tandem inveniatur v, ponendum erit $2v=z$, $\frac{1}{3}z=y$, & $y+\frac{4}{3}=x$; & æquationis primo propoſitæ, $x^3-4xx+4x-6=0$, habebitur radix x.

Sic & in æquatione $x^3-2x+\sqrt{3}=0$, ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x ſcribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio $3y^3\sqrt{3}-2y\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$; quæ, diviſis omnibus terminis per $\sqrt{3}$, fit $3y^3-2y+1=0$.

Rurſus

([d]) *Multiplicatio & Diviſio iſomerica Vietæ* (De Emendat. Æquationum, c. 14.) quarum præcepta Carteſius breviter ac luculenter tradidit. "Multiplicetur vel dividatur coefficiens membri ſecundi æquationis propoſitæ per quantitatem illam, quæ multiplicare aut dividere debet radices. Ejuſdem poteſtas quadratica multiplicet vel dividat coefficientem membri tertii; cubica coefficientem quarti, eodemque deinceps modo." Cæterùm harum tranſmutationum in numerali æquationum exegeſi maximæ ſunt utilitates; utpote quarum ope non modò fractiones & ſurda tollantur, ſed numeri ipſâ mole intractabiles ad minores revocentur, calculis faciliùs ſubjiciendos. Sic ſi æquatio fuerit $x^3 * -203125x-23437500=0$, divido ἰσομοιρικως per numerum

Rurſus æquationis radices in earum reciprocas tranſmutari poſſunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci (e). De Transmut. Æquat.

Sic æquatio noviſſima, $3y^3-2y+1=0$, ſcribendo $\frac{1}{z}$ pro y, evadit $\frac{3}{z^3}-\frac{2}{z}+1=0$, ſeu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato, $z^3-2zz+3=0$. Poteſt etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, ſi modò ſecundus priùs tollatur; ut factum vides in exemplo præcedente. Aut ſi antepenultimum tolli cupias, id fiet, ſi modò tertium priùs tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod uſum nonnullum habere poteſt in ſequentibus. Sic in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, cujus radices ſunt; 3, 2, 1, -5; ſi ſcribatur $\frac{1}{y}$ pro x, reſultabit æquatio $\frac{1}{y^4}-\frac{1}{y^3}-\frac{19}{yy}+\frac{49}{y}-30=0$; quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4, ac diviſis per 30, ſigniſque mutatis, fiet $y^4-\frac{49}{30}y^3+\frac{19}{30}yy+\frac{1}{30}y-\frac{1}{30}=0$; cujus radices ſunt, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maximâ, 3, jam converſâ in minimam, $\frac{1}{3}$, & minimâ, 1, jam factâ maximâ, & radice negativâ, -5, quæ omnium maximè diſtabat à nihilo, jam omnium maximè accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum tranſmutationes, (f) ſed quæ omnes ad exemplum tranſmutationis illius, ubi tertium æquationis terminum ſuſtulimus confici poſſunt; ut non opus ſit hâc de re plura dicere. Addamus potiùs aliqua de limitibus æquationum.

CAPUT XVIII.

De Limitibus æquationum.

Ex Æquationum generatione conſtat, quod cognita quantitas ſecundi *termini æquationis, ſi ſignum ejus mutetur, æqualis*

numerum 125. $\begin{array}{cccc} 1 & 125 & 15625 & 1953125 \\ x^3 & * & -203125x & -23437500=0 \end{array}$. Ex diviſione provenit nova, $y^3-13y-12=0$; cujus radicibus 4, -3, -1, cum numero 125 multiplicatis, exſiſtunt propoſitæ radices, 500, -375, -125.

(e) Tranſmutatio Πρῶτον ἔσχατον Vietæ, cui nomen inditum ex inverſo, in æquatione tranſmutatâ coefficientium ordine. De Emendat. Æquationum, c. 2.

(f) Harum, ni fallor, præcipua eſt *Canonica æquationum tranſmutatio*, ut coefficientes ſint quæ præſcribantur: de quâ conſule Vietam in Libro de Emendatione Æquationum, c. 8. & Carteſium in Libro tertio Geometriæ.

Cap. XVIII. *ſit aggregato omnium radicum ſub ſignis propriis*; *ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum ſub ſingulis binis radicibus*; *ea* quarti, *ſi ſignum ejus mutetur*, *æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis ternis radicibus*; *ea* quinti *æqualis aggregato contentorum ſub ſingulis quaternis*; *& ſic in infinitum* (g).

Aſſumamus $x=a$, $x=b$, $x=-c$, $x=d$, &c. ſeu $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, $x-d=0$, & ex horum continuâ multiplicatione generemus æquationes, ut ſuprà. Jam multiplicando $x-a$ per $x-b$, producetur æquatio $xx \begin{smallmatrix}-a\\-b\end{smallmatrix} x+ab=0$; ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſi ſigna ejus mutentur, nimirum $a+b$, eſt ſumma duarum radicum, a & b; & cognita tertii, ab, illud unicum quod ſub utrâque continetur rectangulum. Rurſus, multiplicando hanc æquationem per $x+c$, producetur æquatio cubica,

$$x^3 \begin{matrix}-a\\-b\\+c\end{matrix} xx \begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\end{matrix} x+abc=0;$$

ubi cognita quantitas ſecundi, ſub ſignis

(g) Hæc eſt primaria æquationum proprietas, quam omnibus generaliter ineſſe primus affirmare auſus eſt Albertus Girardus, cùm de illis, quarum radices omnes poſſibiles ac poſitivæ eſſent, prior pronuntiaverat Franciſcus Vieta. Harriottus autem veritatem hâc in re, quam primus inveniſſe dicitur atque demonſtraſſe, ne intellexit quidem, licèt ea ſcripſiſſet, ex quibus aliis intelligere facile eſſet, ſi non priùs patefacta eſſet à Girardo. Nimirum Harriottus æquationem quadraticam $aa \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a=bc$ procreari docet è multiplicatione æquationis ſimplicis, $a-b$, in quantitatem $a+c$; æquationem vero cubicam $aaa \begin{smallmatrix}-b\\+c\\+d\end{smallmatrix} aa \begin{smallmatrix}-bc\\-bd\\+cd\end{smallmatrix} a=bcd$ è multiplicatione æquationis ſimplicis $a-b=0$ in quantitatem $a+c$, æquationiſque quadraticæ, ex primâ illâ multiplicatione effectæ, in quantitatem $a+d$. Hæc ſanè ac plura hujuſcemodi exempla, quorum quidem affatim congeſſit, tantundem valent, ac ſi generaliter dixiſſet, coefficientes in æquationibus compoſitis ex quantitatibus illis, b, c, d, generari; quæ cum quantitate ignotâ ſignis, +, −, connexæ binomia conſtituunt, quorum multiplicatione continuâ æquatio quæque generata eſt; legemque prætereà procreationis eam attuliſſet, ut quantitatum illarum ſumma, ſignis contrariis, coefficientem ſecundi membri æquationis efficeret: factorum è binis ſumma coefficientem tertii: factorum è ternis ſignis contrariis ſumma coefficientem quartæ, eodemque uſque modo. Hæc inquam, exempla illa Harriotto congeſta ſatis apertè ſignificant. Hæc ipſe Harriottus tam enuntiaviſſe cenſendus eſt, ac ſi verbis diſertiſſimé enuntiâſſet. Ex hiſce verò Girardi Theorema procudere Carteſio quidem facile fuiſſet. Quid dicam Carteſio, ſummo plane Arithmetico? Cùm idem vel è populo cuilibet licuiſſet, cui id modò perceptum eſſet, æquationum ex multiplicationibus provenientium quantitates negativas, $-c$, $-d$, æquè ac poſitivam b, habendas eſſe radices. Harriottus autem, cui id nunquam planè perceptum fuit, qui arctè adeo ad lumen connivebat, ut quantitates $-c$, $-d$, æquationum, quæ ex illis procreatæ eſſent, radices eſſe conſtantiſſimè negaret, qui fieri potuit ut ille intelligeret coefficientium geneſin è *radicum* multiplicatione? Girardi autem, ut ad illum redeam, hæc ſunt verba. " La premiere faction des ſolutions eſt eſgale au nombre du premier meſlé, la ſeconde faction des meſmes eſt eſgale au nombre du deuxieſme meſlé, la troiſieſme au troiſieſme, & tousjours ainſi, tellement que la derniere faction eſt eſgale a la fermeture, & ce ſelon les ſignes qui ſe peuvent remarquer en l' ordre alternatif."

Quæ

ſignis mutatis, nimirum $a+b-c$, eſt ſumma radicum, a, b & $-c$; cognita tertii, $ab-ac-bc$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis, a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti, ſub ſigno mutato, $-abc$, illud unicum contentum eſt quod omnium continuâ multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc, multiplicando cubicam illam æquationem per $x-d$, producetur hæcce quadrato-quadratica, ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſub ſignis mutatis, $a+b-c+d$, eſt ſumma omnium radicum; ea tertii, $ab-ac-bc+ad+bd-cd$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis; ea quarti, ſub ſignis mutatis, $-abc+abd-bcd-acd$, ſumma contentorum ſub ſingulis ternis; ea quinti, $-abcd$, contentum unicum ſub omnibus. Et hinc primò colligimus omnes æquationis cujuſcunque terminos nec fractos nec ſurdos habentis radices non ſurdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium

DE LIMITIBUS ÆQUAT.

$$x^4 \begin{matrix}-a\\-b\\+c\\-d\end{matrix}\, x^3 \begin{matrix}+ab\\-ac\\-bc\\+ad\\+bd\\-cd\end{matrix}\, xx \begin{matrix}+abc\\-abd\\+bcd\\+acd\end{matrix}\, x - abcd = 0 :$$

Quæ Latinè ſic ſonant:

Radicum effectio prima coefficienti primi compoſiti æqualis eſt, effectio earundem ſecunda compoſiti ſecundi coefficienti, tertia tertii, atque ſic continuò donec ad effectionem ultimam perventum fuerit; quæ Homogeneo comparationis eſt æqualis. Signa autem coefficientium ea adhibenda ſunt, quæ reperiuntur in ordine æquationis alterno.

Quòd ſi vocibus illis minùs uſitatis, *effectio*, *compoſitum*, *alternus ordo* (effection, meſlè, ordre alternatif) obſcuritas aliqua inſit, eam omnem amolientur auctoris definitiones. "Es equations meſlées la plus haute quantité eſt dite Maxime, ou haute extremitè ; celle qui eſt un degré plus bas, eſt dite premier meſlé ; celle qui eſt encor un degre plus bas eſt dite ſecond meſlé, & ainſi conſequemment, tellement que le ⓞ eſt la fermeture ou baſſe extremité."

"Quant pluſieurs nombres ſont propoſez, la ſomme totale ſoit dite premiere faction ; la ſomme de tous les produits de deux a deux ſoit dite deuxieſme faction : la ſomme de tous les produits de 3 à 3 ſoit dite la troiſieſme faction, & tousjours ainſi juſques à la fin ; mais le produit de tous les nombre ſoit la derniere faction : or il y a autant de factions que de nombres propoſez."

"Ordre alterne des equations eſt quand les maxime ou haute extremité n'a autre nombre que l'unite avec le ſigne +, & que les denominateurs, ou caracteres, impairs ſont d'un coſté & les pairs de l'autre."

Quæ Latinè ſic dici poſſunt. "Æquationis cujuſvis compoſitæ membrum illud, quod ex quantitatis incognitæ poteſtate elatiſſimâ efficitur, maximum dicitur, ſive extremum ſuperius ; quod ex poteſtate uno tantùm gradu inferiore, compoſitum primum ; quod ex uno rurſum gradu inferiore, compoſitum ſecundum ; eodemque ſimiliter progreſſu uſquedum ad membrum perventum fuerit incognitâ quantitate prorſus vacuum, quod *clauſula* dicatur, ſive extremum inferius. [Membrum illud ultimum quod *clauſulam* Girardus, ſive *poſitionem*, dixit, Vieta *homogeneum comparationis* appellabat.]

Quotcunque numeris propoſitis, ſumma quæ ex omnibus Algebraicè conficitur, effectio prima dicatur. Summa factorum è binis effectio ſecunda : ſumma factorum è ternis effectio tertia : ac ſimili deinceps modo. Factum verò ex omnibus dicatur effectio ultima. Cæterùm tot ſemper effectiones erunt quot numeri ex quibus procreatæ fuerint.

Alternus eſt æquationum ordo, cùm membra omnia, indicibus poteſtatum incognitæ imparibus prædita, ab alterâ parte conſtituantur, ab alterâ verò ſeorſum quot indicibus paribus gaudent : eâ verò lege, ut poteſtati elatiſſimæ ſignum, ſit +, neque coefficiens alius præter ipſam unitatem."

Id.

CAP. XVIII. rium contenta, esse aliquos ex divisoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi constiterit, nullum ultimi termini divisorem esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum, pluriumve contentum, simul constabit, nullam esse radicem, radicumve rectangulum, aut contentum, nisi quod sit surdum.

Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse, p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps. Et, signis terminorum probè observatis, fiat $p=a$. $pa+2q=b$. $pb+qa+3r=c$. $pc+qb+ra+4s=d$. $pd+qc+rb+sa+5t=e$. $pe+qd+rc+sb+ta+6v=f$. & sic in infinitum, observatâ serie progressionis. Et erit a summa radicum; b summa quadratorum ex singulis radicibus; c summa cuborum; d summa quadrato-quadratorum; e summa quadrato-cuborum; f summa cubo-cuborum; & sic in reliquis (h). Ut in æquatione $x^4-x^3-19xx+49x-30=0$, ubi cognita quantitas secundi termini est -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1=p$, $19=q$, $-49=r$, $30=s$. Et inde orientur $a=(p=)\ 1$. $b=(pa+2q=1+38=)\ 39$. $c=(pb+qa+3r=39+19-147=)-89$. $d=(pc+qb+ra+4s=-89+741-49+120=)723$. Quare summa radicum erit 1; summa quadratorum radicum 39; summa cuborum -89; & summa quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices sunt, 1, 2, 3, & -5; & harum summa, $1+2+3-5$, est 1; summa quadratorum, $1+4+9+25$, est 39; summa cuborum, $1+8+27-125$, est -89; & summa quadrato-quadratorum, $1+16+81+625$, est 723.

Et hinc colliguntur *limites*, inter quos consistent radices æquationis, ubi nulla earum impossibilis est. Nam cùm radicum omnium quadrata sunt affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento,

Id nimirum efficit illa alternatio, ut membri secundi, quarti, sexti, aliorumque paribus in locis æquationis ordinatæ consistentium, signa mutentur, reliquorum non mutatis.

(h) Potestatum è radicibus incognitis consummationem idem vir ille magnus Albertus Girardus omnium primus, credo, ante Newtonum aggressus est; ex cujus formulis, inter nova inventa Algebraica editis, Newtonianæ facilè deducendæ sunt

Soit	A premier meslé B second C troisiesme D quatriesme &c.	fit	A coefficiens primus; inellige membri secundi coefficientem B secundus C tertius D quartus &c.

Alors

De Limitibus Æquat.

argumento, ſumma quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quàm quadrato-quadratum radicis maximæ; & ſumma cubo-cuborum major quàm cubo-cubus radicis maximæ.

Regula I.

Quamobrem ſi limitem deſideres, quem radices nullæ tranſgrediuntur, quære ſummam quadratorum radicum, & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major *erit quam radix maxima æquationis.* Sed ad radicem maximam propius accedes, ſi quæras *ſummam quadrato-quadratorum, & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam: & adhuc* magis, *ſi quæras ſummam cuborum, & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente, radix quadratica ſummæ quadratorum radicum, ſeu $\sqrt{39}$, eſt $6\frac{1}{2}$ quàm proximè; & $6\frac{1}{2}$ magis diſtat à nihilo quam ulla radicum, 1, 2, 3, − 5. At radix quadrato-quadratica ſummæ quadrato-quadratorum radicum, nempe $\sqrt[4]{723}$, quæ eſt $5\frac{1}{2}$ circiter, propiùs accedit ad radicem à nihilo remotiſſimam, − 5.

Regula II.

Si inter ſummam quadratorum & ſummam quadrato-quadratorum radicum, inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quàm ſumma cuborum radicum ſub ſignis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & ſummæ cuborum ſub propriis ſignis, ut priùs inventæ, ſemiſumma erit major, quàm ſumma cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia major quàm ſumma cuborum radicum negativarum.

Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quàm radix cubica illius ſemiſummæ, & maxima radicum negativarum minor quàm radix cubica illius ſemidifferentiæ.

Alors en toute ſorte d'equations	A	ſera la ſomme de	ſolutions
	$Aq - B2$		quarez
	$A\ cub. - AB3 + C3$		cubes
	$Aqq - AqB4 + AC4 + Bq2 - D4$		quare-quarez.

Tum in æquatione cujuſcunque formæ	A	ſumma erit	radicum
	$A^2 - 2B$		quadratorum è radicibus
	$A^3 - 3A \times B + 3C$		cuborum ex iiſdem
	$A^4 - 4B \times A^2 + 4A \times C + 2B^2 - 4D$		quadrato-quadratorum.

Sic

CAP. XVIII. Sic in æquatione præcedente, media proportionalis inter ſummam quadratorum radicum, 39, & ſummam quadrato-quadratorum, 723, eſt 168 circiter. Summa cuborum ſub propriis ſignis ſupra erat − 89. Hujus & 168 ſemiſumma eſt $39\frac{1}{2}$, ſemidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ eſt $3\frac{1}{2}$ circiter, major eſt quàm maxima radicum affirmativarum, 3. Poſterioris radix cubica, quæ eſt $5\frac{1}{11}$ proximè, tranſcendit radicem negativam, − 5. Quo exemplo videre eſt, quàm propè ad radicem hâc methodo acceditur, ubi unica tantùm radix negativa eſt, vel unica affirmativa.

REGULA III.

Et tamen propiùs adhuc accederetur; ſi inter ſummam quadrato-quadratorum radicum & ſummam cubo-cuborum media proportionalis inveniretur, atque ex hujus, & ſummæ quadrato-cuborum radicum ſemiſummâ, & ſemidifferentiâ, radices quadrato cubicæ extraherentur.

Nam radix quadrato-cubica ſemiſummæ tranſcenderet maximam radicem affirmativam; & radix quadrato-cubica ſemidifferentiæ maximam ſeu extimam negativam, ſed exceſſu multo minore quàm antè. Cùm igitur radix quælibet, augendo vel diminuendo radices omnes fieri poteſt minima, dein minima in maximam converti, & poſtea omnes præter maximam fieri negativæ, conſtat quomodo radix imperata, quàm proximè, poteſt obtineri.

REGULA IV.

Si radices omnes præter duas negativæ ſunt, poſſunt illæ duæ ſimul hoc modo erui.

Inventâ juxta methodum præcedentem ſummâ cuborum duarum illarum radicum, ut & ſummâ quadrato-cuborum, & ſummâ quadrato-quadrato cuborum radicum omnium; inter poſteriores duas ſummas quære mediam proportionalem; & ea erit differentia inter ſummam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſummam cubo-cuborum radicum negativarum, quàm proximè; adeoque hujus mediæ proportionalis, & ſummæ

 cubo-

cubo-cuborum radicum omnium ſemiſumma erit ſumma cubo-cuborum radicum affirmativarum, & ſemidifferentia erit ſumma cubo-cuborum radicum negativarum. Habitâ igitur tùm ſummâ cuborum, tum ſummâ cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo ſummæ poſterioris aufer quadratum ſummæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habitâ vero tum ſummâ tum differentiâ cuborum, habentur cubi ipſi. Extrahe eorum radices cubicas, & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quàm proximè. Et ſi in altioribus poteſtatibus opus conſimile inſtitueretur, magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes, ob difficilem calculum, minùs uſui ſunt, & ad æquationes tantùm extendunt, quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites aliâ ratione invenire jam docebo, quæ & facilior ſit, & ad omnes æquationes extendat.

De Limitibus Æquat.

Regula V.

Multiplicetur æquationis terminus unuſquiſque per numerum dimenſionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rurſus multiplicetur unuſquiſque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quàm priùs; & factum dividatur per radicem æquationis. Et ſic pergatur, ſemper multiplicando per numeros unitate minores quàm priùs, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes deſtruantur, quorum ſigna diverſa ſunt à ſigno primi, ſeu altiſſimi termini, præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativâ radice major; qui in terminis prodeuntibus ſcriptus pro radice, efficit, eorum, qui ſingulis vicibus per multiplicationem producebantur, aggregatum ejuſdem ſemper eſſe ſigni cum primo, ſeu altiſſimo, termino æquationis.

Ut ſi proponatur æquatio $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0$. Hanc primum ſic multiplico, $\overset{5}{x^5} - \overset{4}{2x^4} - \overset{3}{10x^3} + \overset{2}{30xx} + \overset{1}{63x} - \overset{0}{120}$. Dein terminos prodeuntes, diviſos per x, rurſum multiplico ſic, $\overset{4}{5x^4} - \overset{3}{8x^3} - \overset{2}{30xx} + \overset{1}{60x} + \overset{0}{63}$; & terminos prodeuntes rurſum dividendo per x prodeunt $20x^3 - 24xx - 60x + 60$; quos, minuendi gratiâ, divido per maximum diviſorem 4, & fiunt $5x^3 - 6xx - 15x + 15$.

Cap. XVIII. Hi itidem multiplicati per progreſſionem 3. 2. 1. 0, & diviſi per x, fiunt $15xx - 12x - 15$; & rurſum diviſi per 3 fiunt $5xx - 4x - 5$. Et hi multiplicati per progreſſionem 2. 1. 0, & diviſi per $2x$, fiunt $5x - 2$. Jam cùm terminus æquationis altiſſimus, x^5, affirmativus ſit; tento, quinam numerus ſcriptus in his productis pro x efficiet ea omnia affirmativa eſſe. Et quidem tentando 1, fit $5x - 2 = 3$, affirmativum; ſed $5xx - 4x - 5$, fit -4, negativum. Quare limes erit major quàm 1. Tento itaque numerum aliquem majorem, puta 2. Et in ſingulis ſubſtituendo 2 pro x, evadunt,

$$\begin{array}{l} 5x - 2 = 8 \\ 5xx - 4x - 5 = 7 \\ 5x^3 - 6xx - 15x + 15 = 1 \\ 5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 79 \\ x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 46. \end{array}$$

Quare cùm numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, ſint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quàm radicum affirmativarum maxima. Similiter ſi limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel, quod perinde eſt, muto ſigna terminorum alternorum, & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum ſignis, quantitates, in quibus numeri ſubſtituendi ſunt, fient

$$\begin{array}{l} 5x + 2 \\ 5xx + 4x - 5 \\ 5x^3 + 6xx - 15x - 15 \\ 5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63 \\ x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30xx + 63x + 120 \end{array}$$

Ex his ſeligo quantitatem aliquam, ubi termini negativi maximè prævalere videntur; puta $5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$: & hîc, ſubſtituendo pro x numeros 1 & 2, prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quàm -2. Subſtituendo autem numerum 3, prodit numerus affirmativus 234. Et ſimiliter in cæteris quantitatibus ſubſtituendo numerum 3 pro x prodit ſemper numerus affirmativus. Id quod ex inſpectione ſolâ colligere licet. Quare numerus -3 tranſcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites 2 & -3, inter quos radices omnes conſiſtunt.

Horum verò limitum inventio uſui eſt, tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum ſurdarum ex ipſis; ne fortè radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione noviſſimâ, ſi radices rationales, ſiquas fortè habeat, invenire vellem; ex ſuperioribus certum eſt, has non alias eſſe poſſe, quàm diviſores ultimi termini æquationis, qui hîc eſt 120. Proin tentando omnes ejus diviſores, ſi nullus earum, ſcriptus in æquatione pro radice x, efficeret om-

nes

nes terminos evanescere; certum est æquationem non admittere radicem, nisi quæ sit surda. At ultimi termini 120, divisores permulti sunt, nimirum 1. − 1.2. − 2.3. − 3.4. − 4.5. − 5.6. − 6.8. − 8.10. − 10.12. − 12.15. − 15.20. − 20.24. − 24.30. − 30.40. − 40.60. − 60.120. & − 120. Et hos omnes divisores tentare, tædio esset. Cognito autem quòd radices inter limites 2 & − 3 consistunt, liberamur à tanto labore. Jam enim non opus erit, divisores tentare, nisi qui sunt inter hos limites; nimirum divisores 1, − 1, & − 2. Nam si horum nullus radix est, certum est æquationem non habere radicem, nisi quæ sit surda. De Surdis Divisoribus.

CAPUT XIX.

Æquationum reductio per divisores surdos.

HActenus reductionem æquationum tradidi, quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam, annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel, quod perinde est, tentandum erit, annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit, ut ex utrâque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nihilo, & terminus altissimus affirmativò signo afficiatur. Deinde, si æquatio quadratica *sit, (nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut si æquatio sit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$, & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget $xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$, *& extractâ utrobique radice, fiet* $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$; sive $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$.

Quòd si æquatio sit quatuor dimensionum, *sit ea* $x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, ubi p, q, r, & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis signis propriis adfectas. Fac* $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta$. $s - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta$

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β *&* 2ζ *divi-*

CAPUT XIX. *forem integrum, & non quadratum; qui & impar esse debet, & per 4 divisus unitatem relinquere, si terminorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantitatis* $\frac{\beta}{n}$, *si p sit par; vel imparis divisoris dimidium, si p sit impar; vel nihil, si dividuum* β *sit nihil. Aufer Quotum de* $\frac{1}{2}pk$, *& reliqui dimidium dic l. Dein pro* Q *pone* $\frac{\alpha+nkk}{2}$, *& tenta si n dividat* QQ$-s$, *& Quoti radix sit rationalis & æqualis l. Si hoc contigerit ad utramque partem æquationis adde* $nkkxx + 2nklx + nll$, *& radicem extrahes utrobique; prodeunte* $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}$ *in* $kx+l$.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^4+12x-17=0$; & quia p & q hîc desunt, & r est 12, & s est -17, substitutis hisce numeris fiet $\alpha=0$, $\beta=12$, & $\zeta=-17$; & ipsorum β & 2ζ, seu 12 & -34, communis divisor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ est 6, & ejus divisores 1, 2, 3, & 6 successivè tentandi sunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l respectivè. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$, id est kk, æquale Q. Est & $\sqrt{\frac{QQ-s}{n}}$, id est, $\sqrt{\frac{QQ+17}{2}}=l$. Ubi numeri pares 2 & 6 scribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & QQ$-s$ numerus erit impar, adeoque dividi non potest per n seu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi sunt. Ubi verò 1 & 3 scribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & QQ$-s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi possunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen sola -3 congruit cum l. Pono itaque $k=1$, $l=-3$, & Q$=1$; & quantitatem $nkkxx+2nklx+nll$, id est $2xx-12x+18$, addo ad utramque partem æquationis; & prodit $x^4+2xx+1=2xx-12x+18$; & extractâ utrobique radice, $xx+1=x\sqrt{2}-3\sqrt{2}$. Quòd si radicis extractionem effugere malueris, pone $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$, & invenietur, ut antè, $xx+1=\pm\sqrt{2}\times\overline{x-3}$. Et ex hâc æquatione, si radices iterum extrahas, proveniet $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\sqrt{\frac{-1}{2}\mp3\sqrt{2}}$, *h. e.* secundùm signorum variationes, $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$, & $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Item $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$; & $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$. Quæ quidem quatuor sunt radices æquationis sub initio propositæ, $x^4+12x-17=0$. Sed earum ultimæ duæ sunt impossibiles.

Proponamus

Proponamus jam æquationem $x^4 - 6x^3 - 58xx - 114x - 11 = 0$, & ſcribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s reſpective, orietur $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, & $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. Numerorum β & 2ζ, ſeu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis diviſor eſt unicus 3, adeoque hic erit n; & ipſius $\frac{\beta}{n}$, ſeu -105, diviſores ſunt 3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi ſunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu -105 per 3, ſubduco de $\frac{1}{2}pk$, ſeu -3×3, & reſtat 26; cujus dimidium, 13, eſſe debet l. Sed $\frac{\alpha + nkk}{2}$, ſeu $\frac{-67+27}{2}$, id eſt -20, erit Q, & $QQ - s$ erit 411, qui dividi poteſt per n ſeu 3; ſed quoti 137 radix non poteſt extrahi. Quamobrem rejicio 3, & tento 5 pro k. Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſeu -105 per 5, eſt -21, & hunc ſubducendo de $\frac{1}{2}pk$ ſeu -3×5, reſtat 6, cujus dimidium 3 erit l. Eſt & Q, ſeu $\frac{\alpha + nkk}{2}$, id eſt $\frac{-67+75}{2}$, numerus 4. Et $QQ - s$, ſeu $16 + 11$ dividi poteſt per n; & Quoti, qui eſt 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo eſſe $l = 3$, $k = 5$, $Q = 4$, & $n = 3$; & ſi $nkkxx + 2nklx + nll$, id eſt $75xx + 90x + 27$ ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi poſſe, & prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n} \times \overline{kx + l}$; ſeu $xx - 3x + 4 = \pm\sqrt{3} \times \overline{5x + 3}$: & extractâ iterum radice $x = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{17 \pm \frac{21\sqrt{3}}{2}}$.

Haud ſecus ſi proponatur æquatio hæcce, $x^4 - 9x^3 + 15xx - 27x + 9 = 0$, ſcribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s reſpective, emerget $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $-50\frac{5}{8} = \beta$, & $2\frac{7}{64} = \zeta$. Ipſorum β & 2ζ, ſeu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$ communes diviſores ſunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; ſed 9 quadratus eſt, & 3, 15, 27, 135 diviſi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis reſtant ſoli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primò $n = 5$, & ipſius $\frac{\beta}{n}$, ſeu $-\frac{81}{8}$, diviſores impares dimidiati, nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, ſubductus de $\frac{1}{2}pk$, ſeu $-\frac{9}{4}$, relinquit 18 pro $2l$; & $\frac{\alpha + nkk}{2}$, ſeu -2 eſt, Q; &

QQ $-s$,

CAPUT XIX. $QQ-s$, seu -5, dividi quidem potest per n, seu 5; sed Quoti negativi, -1, radix impossibilis est, quæ tamen deberet esse 9. Quare concludo k non esse $\frac{1}{2}$, & tento jam si sit $\frac{3}{2}$. Quotum, qui oritur dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$, nempe Quotum $-\frac{27}{4}$, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu $-\frac{27}{4}$, & restat 0. Unde l jam nihil erit. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu 3, æqualis Q, & $QQ-s$ nihil est; unde rursus l, qui hujus $QQ-s$ divisi per n radix est, invenitur nihil. Quamobrem, his ita quadrantibus, concludo esse $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, & $Q=3$: adeoque addendo ad utramque partem æquationis propositæ terminos $nkkxx+2nlkx+nll$ id est $\frac{45}{4}xx$, & radicem quadraticam utrobique extrahendo, prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$; id est $xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}\times\frac{3}{2}x$.

Eâdem methodo reducuntur etiam æquationes literales. Ut si fuerit $x^4-2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx-2a^3x+a^4=0$, substituendo $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$ & $+a^4$ pro p, q, r, & s respectivè, obtinebuntur $aa-cc=\alpha$, $-acc-a^3=\beta$, & $\frac{3}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. Quantitatum β & 2ζ divisor communis est $aa+cc$, qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$, seu $-a$, divisores habet 1 & a. Sed quia n duarum est dimensionum, & $k\sqrt{n}$ non nisi unius esse debet, ideo k nullius erit, adeoque non potest esse a. Sit ergo $k=1$, & diviso $\frac{\beta}{n}$ per k, aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$, seu $-a$, & restabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu aa, est Q, & $QQ-s$, seu a^4-a^4, nihil est; & inde rursus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q rectè inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis propositæ terminis $nkkxx+2nklx+nll$, id est $aaxx+ccxx$, radicem utrobique extrahi posse, & extractione illâ prodire $xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}\times\overline{kx+l}$; id est $\overline{xx-ax+aa}=\pm x\sqrt{aa+cc}$. Et, extractâ iterum radice, $x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$ + vel $-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum surdarum*: potest tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, si modò pro quantitate n usurpetur unitas; eoque pacto unâ vice examinare possumus, utrùm æquatio, fractis & surdis terminis carens, divisorem aliquem duarum dimensionum, aut

4 rationalem

rationalem aut surdum, admittat. Ut si æquatio $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$ proponatur, substituendo -1, -5, $+12$, & -6, pro p, q, r, & s respectivè invenientur $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $9\frac{3}{8} = \beta$, & ponendo $n = 1$, Quantitatis $\frac{\beta}{n}$, seu $\frac{75}{8}$, divisores sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75: quorum dimidia (siquidem p sit impar) tentanda sunt pro k. Et si pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, & ejus dimidium $-\frac{5}{2} = l$. Item $\frac{\alpha + nkk}{2} = \frac{1}{2} = Q$, & $\frac{QQ - s}{n} = 6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l. De Surdis Divisoribus.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q rectè inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis $nkkxx + 2nklx + nll$, id est $6\frac{1}{4}xx - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4}$, radicem utrobique extrahi posse; & extractione illâ prodire $xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm\sqrt{n} \times \overline{kx + l}$: id est, $xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1 \times \overline{2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}}$, seu $xx - 3x + 3 = 0$, & $xx + 2x - 2 = 0$; adeoque per hasce duas æquationes quadraticas, æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditiùs inveniuntur per aliam methodum suprà traditam.

Siquando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi sunt divisores, ita ut omnes pro k tentare molestum fuerit, potest eorum numerus citò minui, quærendo omnes divisores quantitatis $\alpha s - \frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui, aut imparis alicujus dimidio, debet quantitas Q æqualis esse. Sic in exemplo novissimo $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ est $-\frac{9}{2}$, è cujus divisoribus 1, 3, 9, aut iisdem dimidiatis, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q. Quare sigillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, & $\frac{75}{2}$ pro k, rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$, seu $-\frac{21}{8} + \frac{1}{2}kk$, id est Q, esse aliquem è numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, &c. pro k, prodeunt respectivè $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, &c. pro Q, è quibus soli $-\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, adeoque, cæteris rejectis, aut erit $k = \frac{3}{2}$, & $Q = -\frac{3}{2}$ aut $k = \frac{5}{2}$, & $Q = \frac{1}{2}$. Qui duo casus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimensionum.

Si æquatio sex *dimensionum reducenda est*, sit ea $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0$, & fac $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta = \gamma$.

$$\gamma - \tfrac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \quad t - \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \eta \quad v - \tfrac{1}{4}\beta\beta = \vartheta.$$

$$\zeta\vartheta - \tfrac{1}{4}\eta\eta = \lambda.$$

Dein sumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2ϑ,

divisor

CAPUT XIX. divifor integer, & non quadratus, nec per numerum quadratum, divifibilis, qui etiam per numerum 4 divifus relinquit unitatem; fi modò terminorum p, r, t aliquis fit impar. Pro k fumatur divifor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$, fi p fit par, vel diviforis imparis dimidium, fi p fit impar, vel nihil fi λ nihil fit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$. Pro l divifor aliquis quantitatis $\frac{Qr-QQp-t}{n}$, fi Q fit integer; vel diviforis imparis dimidium, fi Q fit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil, fi dividuum iftud $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ fit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}Qp+nkl$. Dein tenta fi $RR-v$ dividi poffit per n, & Quoti radix extrahi; & præterea fi radix ifta æqualis fit tam quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$ quàm quantitati $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$. Si hæc omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice æquationis propofitæ, fcribe hanc $x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R=\pm\sqrt{n}\times\overline{kxx+lx+m}$. Etenim hæc æquatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet æquationem propofitam. Quòd fi ea omnia in nullo cafu evenerint, reductio erit impoffibilis, fi modò priùs conftet, æquationem per diviforem rationalem reduci non poffe.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^6-2ax^5+2bbx^4+2abbx^3 \begin{matrix}-2aabb\\+2a^3b\\-4ab^3\end{matrix}\,xx \begin{matrix}+3aab^4\\-a^4bb\end{matrix}=0$, & fcribendo $-2a$, $+2bb$, $+2abb$, $-2aabb+2a^3b-4ab^3$, 0, & $3aab^4-a^4bb$ pro p, q, r, s, t, & v refpectivè, prodibunt $2bb-aa=\alpha$. $4abb-a^3=\beta$. $2a^3b+2aabb-4ab^3-a^4=\gamma$. $-b^4+2a^3b+3aabb-4ab^3-\frac{5}{4}a^4=\zeta$. $-\frac{1}{2}a^5+3a^3bb-4ab^4=\eta$. & $-aab^4+a^4bb-\frac{1}{4}a^6=\theta$. Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis divifor eft $aa-2bb$, feu $2bb-aa$, perinde ut aa vel $2bb$ majus fit. Sed efto aa majus quàm $2bb$, & $aa-2bb$ erit n. Debet enim n femper affirmativum effe. Porro $\frac{\zeta}{n}$ eft $-\frac{5}{4}aa+2ab+\frac{1}{2}bb$; $\frac{\eta}{n}$ eft $-\frac{1}{2}a^3+2abb$; & $\frac{\theta}{n}$ eft $-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb$: adeoque $\frac{\zeta}{2n}\times\frac{\theta}{n}-\frac{\eta\eta}{8nn}$ feu, $\frac{\lambda}{2nn}$, eft $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4bb+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{8}aab^4$; cujus divifores funt 1, a, aa; fed quia $\sqrt{n}\times k$ non nifi unius dimenfionis effe poteft, & $\sqrt{n}$ unius eft, ideo k nullius erit; proinde non nifi numerus effe poteft. Quare rejectis a & aa, reftat folum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ etiam nihil eft; adeoque l, qui ejus divifor effe debet,

erit

erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r - p\text{Q} + nkl$ dat abb pro R. Et $\text{RR} - v$ eſt $-2aab^4 + a^4bb$; quod dividi poteſt per n, ſeu $aa - 2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negativè ſumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{\text{QR} - \frac{1}{2}t}{nl}$, ſeu $\frac{0}{0}$, non eſt inæqualis; quantitati verò definitæ $\frac{\text{QQ} + p\text{R} - nll - s}{2nk}$ æqualis eſt. Quamobrem radix illa $-ab$ erit m; &, loco æquationis propoſitæ, ſcribi poteſt $x^3 + \frac{1}{2}pxx + \text{Q}x + \text{R} = \sqrt{n} \times \overline{kxx + lx + m}$, i. e. $x^3 - axx + abb = \sqrt{aa - 2bb} \times \overline{xx - ab}$. Cujus concluſionis veritatem probare potes, quadrando partes æquationis inventæ, & auferendo terminos ad dextram ex utrâque pârte. Eâ enim operatione producetur æquatio $x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 - 2aabbxx + 2a^3bxx - 4ab^3xx + 3aab^4 - a^4bb = 0$, quæ reducenda proponebatur.

DE SURDIS DIVISORIBUS.

Si æquatio eſt octo *dimenſionum, ſit ea* $x^8 + px^7 + qx^6 + rx^5 + sx^4 + tx^3 + vxx + wx + z = 0$, & fiat $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$. $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$. $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{2}\alpha\alpha = \gamma$. $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$. $v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$. $w - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$. & $z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$. Et terminorum 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, quære communem diviſorem, qui integer ſit, & non quadratus, nec per quadratum diviſibilis; quique etiam per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modò terminorum alternorum p, r, t, w, aliquis ſit impar. Si nullus eſt ejuſmodi diviſor communis, certum eſt æquationem per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ reduci non poſſe; & ſi non poteſt ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum diviſor communis. Opuſculum igitur hactenus inſtitutum examinatio quædam eſt, utrùm æquatio reducibilis ſit necne, adeoque, cùm ejuſmodi reductiones rarò poſſibiles ſint, finem operi ut plurimùm imponet.

Et ſimili ratione ſi æquatio ſit decem, duodecim, vel plurium dimenſionum, impoſſibilitas reductionis cognoſci poteſt.

Ut ſi ea ſit $x^{10} + px^9 + qx^8 + rx^7 + sx^6 + tx^5 + vx^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, faciendum erit $q - \frac{1}{4}pp = \alpha$, $r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta$, $s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \gamma$, $t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = \delta$, $v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = \varepsilon$, $a - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma = \zeta$, $b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma = \eta$, $c - \frac{1}{2}\gamma\delta = \theta$, $d - \frac{1}{4}\delta\delta = \varkappa$; & quærendus communis diviſor terminorum quinque 2ε, 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, qui integer ſit & non quadratus; quique etiam per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modò terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis ſit impar.

CAPUT XIX. Sic ſi *duodecim* dimenſionum æquatio ſit $x^{12}+px^{11}+qx^{10}+rx^{9}+sx^{8}+tx^{7}+vx^{6}+ax^{5}+bx^{4}+cx^{3}+dxx+ex+f=0$, faciendum erit $q-\frac{1}{4}pp=\alpha$, $r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta$, $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma$, $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta$, $v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\varepsilon$, $a-\frac{1}{2}p\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$, $b-\frac{1}{2}\alpha\varepsilon-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta$, $c-\frac{1}{2}\beta\varepsilon-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta$, $d-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon-\frac{1}{4}\delta\delta=\varkappa$, $e-\frac{1}{2}\delta\varepsilon=\lambda$, $f-\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon=\mu$; & quærendus communis diviſor integer, & non quadratus, terminorum ſex 2ζ, 8η, 4θ, $8\varkappa$, 4λ, 8μ, qui per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modò terminorum alternorum p, r, t, a, c, e aliquis ſit impar.

Atque ita in infinitum progredi licebit, & æquatio propoſita ſemper per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit, ubi ejuſmodi diviſor communis nullus eſt. Siquando verò ejuſmodi diviſor n inventus ſpem faciat futuræ reductionis, poteſt ea inſtituti inſiſtendo veſtigiis operis, quod in æquatione octo dimenſionum ſubjungimus.

Quære numerum quadratum, cui, per n multiplicato, ultimus æquationis terminus z, ſub ſigno proprio adnexus, quadratum numerum efficit. Id autem expeditè fiet, ſi ad z, ubi n eſt par, vel ad $4z$ ubi n eſt impar, ſucceſſivè addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps, donec ſumma æqualis fiat numero alicui in tabulâ numerorum quadratorum, quam ad manus eſſe ſuppono. Et ſi nullus ejuſmodi quadratus numerus priùs occurrit, quàm ſummæ illius radix quadratica aucta radice quadraticâ exceſſûs illius ſummæ ſupra ultimum æquationis terminum, quadruplo major ſit quàm maximus terminorum æquationis propoſitæ p, q, r, s, t, v, &c. non opus erit rem ultrà tentare. Æquatio enim reduci non poteſt. Sed ſi ejuſmodi numerus quadratus priùs occurrit, ſit ejus radix s, ſi n eſt par, vel 2s ſi n eſt impar; & $\sqrt{\frac{ss-z}{n}}$ dic h. Debent autem s & h eſſe numeri integri, ſi n eſt par; at ſi n impar eſt, poſſunt eſſe fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et ſi unus eorum fractus eſt, alter fractus eſſe debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, p & k, poſt inveniendis, obſervandum eſt. Et omnes numeri s & h, qui intra præfatum limitem inveniri poſſunt, in catalogum referendi ſunt.

Poſtea pro k tentandi ſunt omnes numeri ſucceſſivè, qui non efficiunt $nk\pm\frac{1}{2}p$ quadruplo majus quàm maximus terminus æquationis;

quationis; & ponendum eſt in omni caſu $\frac{nkk+\alpha}{2}=Q$. Dein pro l tentandi ſunt ſucceſſivè numeri omnes, qui non efficiunt $nl\pm Q$ quadruplo majus quàm maximus terminus æquationis: & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4}+nkl=R$. Denique pro m tentandi ſunt ſucceſſivè omnes numeri, qui non efficiunt $nm\pm R$ quadruplo majus quàm maximus terminorum æquationis; & videndum, an in caſu quovis, ſi fiat $s-QQ-pR+nll=2H$, & $H+nkm=S$, ſit S aliquis numerorum, qui priùs pro S in catalogum relati erant; & præterea ſi alter numerus ei S reſpondens, qui pro h in eundem catalogum relatus erat, ſit his tribus $\frac{2RS-v}{2nm}$, $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}$ & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}$ æqualis. Si hæc omnia in aliquo caſu evenerint, vice æquationis propoſitæ, ſcribenda erit hæcce $x^4+\frac{1}{2}px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{n}\times\overline{kx^3+lxx+mx+h}$.

De Surdis Divisoribus.

Exempli gratiâ proponatur æquatio $x^8+4x^7-x^6-10x^5+5x^4-5x^3-10xx-10x-5=0$. Et erit $q-\frac{1}{4}pp=-1-4=-5=\alpha$. $r-\frac{1}{2}p\alpha=-10+10=0=\beta$. $s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=5-\frac{25}{4}=-\frac{5}{4}=\gamma$. $t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=-5+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}=\delta$. $v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=-10-\frac{25}{8}=-\frac{105}{8}$. $w-\frac{1}{2}\beta\gamma=-10=\zeta$. $z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=-5-\frac{25}{64}=-\frac{345}{64}=\eta$. Ergo 2δ, 2ε, 2ζ, 8η, reſpectivè, ſunt -5, $-\frac{105}{4}$, -20, & $-\frac{345}{8}$, & earum diviſor communis 5; qui per 4 diviſus relinquit 1, perinde ut ob terminum imparem s oportuit. Cùm itaque inventus ſit diviſor communis n, ſeu 5, qui ſpem facit futuræ reductionis, quoniam iſte impar eſt, ad $4z$, ſeu -20, ſucceſſivè addo n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, &c. ſeu 5, 15, 25, 35, 45, &c. & prodeunt -15. 0. 25. 60. 105. 160. 225. 300. 385. 480. 585. 700. 825. 960. 1105. 1260. 1425. 1600. Ex quibus ſolùm 0. 25. 225, & 1600 quadrati ſunt. Quare horum radices dimidiatæ 0, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, 20, in catalogum referendæ ſunt pro S, & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$, id eſt 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, 9, reſpectivè pro h. Sed quia $S+nh$, ſi ſcribatur 20 pro S & 9 pro h, ſit 65, numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos ſolùm refero in tabulam, ut ſequitur.

h	1. $\frac{3}{2}$. $\frac{7}{2}$.
S	0. $\frac{5}{2}$. $\frac{15}{2}$.

His ita diſpoſitis, tento pro k numeros omnes, qui non efficiunt $\frac{1}{2}p\pm nk$, ſeu $2\pm 5k$, majus quadruplo maximi termini æquationis

tionis

CAPUT XIX. tionis 40; id eſt numeros, $-8.-7.-6.-5.-4.-3.-2.-1.0.1.2.3.4.5.6.7$, ponendo $\frac{nkk+\alpha}{2}$, ſeu $\frac{5kk-5}{2}$, id eſt numeros $\frac{315}{2}.120.\frac{175}{2}.60.\frac{75}{2}.20.\frac{15}{2}.0.-\frac{5}{2}.0.\frac{15}{2}.20.\frac{75}{2}.60.\frac{175}{2}.120$. reſpectivè pro Q. Imo verò cum $Q\pm nl$, & multò magis Q, non debeat majus eſſe quàm 40, rejiciendos eſſe ſentio $\frac{315}{2}.120.\frac{175}{2}$ & 60, & qui his reſpondent $-8.-7.-6.-5.5.6.7$. adeoque ſolos $-4.-3.-2.-1.0.1.2.3.4$ pro k, & $\frac{75}{2}.20.\frac{15}{2}.0.-\frac{5}{2}.0.\frac{15}{2}.20.\frac{75}{2}$ pro Q reſpectivè tentandos. Tentemus autem -1 pro k, & 0 pro Q; & in hoc caſu, pro l tentandi deinceps erunt ſucceſſivè omnes numeri, qui non efficiunt $Q\pm nl$ majus quàm 40, id eſt omnes numeri inter 10 & -10, & pro R reſpectivè numeri $\frac{2\beta-npkk}{4}+nkl$, ſeu $-5-5l$ id eſt $-55.-50.-45.-40.-35.-30.-25.-20.-15.-10.-5.0.5.10.15.20.25.30.35.40.45$, quorum tamen tres priores & ultimum, quià majores quàm 40, negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R; & in hoc caſu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri, qui non efficiunt $R\pm nm$, ſeu $5\pm 5m$, majus quàm 40; id eſt numeri omnes inter 7 & -9; & videndum, an ſi ponendo $s-QQ-pR+nll$, id eſt $5-20+20$, ſeu $5,=2H$, ſit $H+nkm$, ſeu $\frac{5}{2}-5m,=S$: id eſt, ſi ex his numeris $\frac{-65}{2}.\frac{-55}{2}.\frac{-45}{2}.\frac{-35}{2}.\frac{-25}{2}.\frac{-15}{2}.\frac{-5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{15}{2}.\frac{25}{2}.\frac{35}{2}.\frac{45}{2}.\frac{55}{2}.\frac{65}{2}.\frac{75}{2}.\frac{85}{2}$, aliquis æqualis ſit alicui numerorum $0.\pm\frac{5}{2}.\pm\frac{15}{2}$, qui priùs in tabulam pro S relati erant. Et hujuſmodi quatuor occurrunt, $-\frac{15}{2}.-\frac{5}{2}.\frac{5}{2}.\frac{15}{2}$, quibus reſpondent $\pm\frac{7}{2}.\pm\frac{3}{2}.\pm\frac{3}{2}.\pm\frac{7}{2}$ pro h in eâdem tabulâ ſcripti, ut & $2.1.0.-1$ pro m ſubſtituti. Verùm tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $+\frac{3}{2}$ pro h; & fiet $\frac{2RS-w}{2nm}=\frac{-25+10}{10}=-\frac{3}{2}$, & $\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}=\frac{25+10-5}{-20}=-\frac{3}{2}$, & $\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}=\frac{-10+5+20}{-10}=-\frac{3}{2}$. Quare cùm prodeat omni caſu $-\frac{3}{2}$ ſeu h, concludo numeros omnes rectè inventos eſſe, adeoque vice æquationis propoſitæ ſcribendum eſſe $x^4+\frac{1}{2}px^3+Qxx+Rx+S=\sqrt{n}\times\overline{kx^3+lxx+mx+h}$, id eſt $x^4+2x^3+5x-2\frac{1}{2}=\sqrt{5}\times\overline{-x^3-2xx+x-1\frac{1}{2}}$. Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimenſionum, quæ ſub initio proponebatur.

Quòd ſi tentando caſus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipſius h nullo in caſu inter ſe conſenſiſſent, argumento fuiſſet, æquationem, per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ, reduci non potuiſſe.

Deberent

Deberent autem aliqua hîc in operis abbreviationem annotari; sed quæ brevitatis causâ prætereo, cùm tantarum reductionum perexiguus sit usus, & rei possibilitatem potiùs quàm praxin commodissimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *surdæ radicis quadraticæ*. De Surdis Divisoribus.

Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem surdæ radicis cubicæ*, sed & has, ut quæ perrarò utiles sint, brevitatis gratiâ prætereo.

Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgò notæ, quas, si penitus præterirem, Lector fortasse desideraret. Proponatur æquatio cubica $x^3 * +qx+r=0$, cujus secundus terminus deest. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci posse constat ex precedentibus. Et supponatur x esse $=a+b$. Erit $a^3+3aab+3abb+b^3$ (id est x^3) $+qx+r=0$. Sit $3aab+3abb$ (id est $3abx$) $+qx=0$; & erit $a^3+b^3+r=0$. Per priorem æquationem est $b=-\frac{q}{3a}$, & cubicè, $b^3=-\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo, per posteriorem, est $a^3-\frac{q^3}{27a^3}+r=0$, seu $a^6+ra^3=\frac{q^3}{27}$; & per extractionem affectæ radicis quadraticæ $a^3=-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$. Extrahe radicem cubicam, & habebitur a. Et supra erat $-\frac{q}{3a}=b$, & $a+b=x$. Ergo $a-\frac{q}{3a}$ radix est æquationis propositæ.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $y^3-6yy+6y+12=0$. Ad tollendum secundum æquationis hujus terminum, ponatur $x+2=y$, & orietur $x^3*-6x+8=0$; ubi est $q=-6$; $r=8$; $\frac{1}{4}rr=16$; $\frac{q^3}{27}=-8$; $a^3=-4\pm\sqrt{8}$; $a-\frac{q}{3a}=x$; & $x+2=y$; id est $2+\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}+\frac{2}{\sqrt[3]{-4\pm\sqrt{8}}}=y$.

Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum, ubi q affirmativum est; vel etiam ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quàm $\frac{1}{4}rr$; *id est ubi duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles*. At ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ simul majus quàm $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{q^3}{27}}$ quantitas impossibilis; atque adeo æquationis radix x vel y, hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu *tres sunt radices possibiles*, quæ omnes eodem modo se habent ad æquationis

Caput XIX. æquationis terminos q & r, & indifferenter deſignantur per literam x vel y, adeoque omnes eâdem deberent lege erui & exprimi, quâ una aliqua eruitur & exprimitur: *ſed omnes tres lege præfatâ exprimere impoſſibile eſt.* Quantitas $a - \frac{q}{3a}$, quâ x deſignatur, multiplex eſſe non poteſt, eâque de cauſâ Hypotheſis quòd x, hoc in caſu ubi triplex eſt, æqualis eſſe poteſt binomio $a - \frac{q}{3a}$, ſeu $a + b$, cujus nominum cubi, $a^3 + b^3$, conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impoſſibilis eſt; & ex hypotheſi impoſſibili cònclusionem impoſſibilem colligi, mirum eſſe non debet.

Eſt & alius modus has radices exprimendi. Nimirum de a^3+b^3 $+r$ id eſt de nihilo, aufer a^3+r, ſeu $\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$, & reſtabit $b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}$. Eſt itaque $a = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, & $b = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; vel $a=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$, & $b=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; adeoque horum ſumma $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27}}}$; erit $= x$.

Poſſunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.

Tollendus eſt autem primùm ſecundus æquationis terminus. Sit æquatio reſultans $x^4+qxx+rx+s=0$. Pone hanc multiplicatione duarum, $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, generari; id eſt eandem eſſe cum hâc, $x^4 * \begin{matrix}+f\\+g\\-ee\end{matrix} xx \begin{matrix}+eg\\-ef\end{matrix} x + fg = 0$; &, collatis terminis, fiet $f+g-ee=q$; $eg-ef=r$; & $fg=s$. Quare $q+ee=f+g$; $\frac{r}{e} = g-f$; $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$; $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$; $\frac{qq+2eeq+e^4-\frac{rr}{ee}}{4} (=fg)=s$; &, per reductionem, $e^6+2qe^4 \begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix} ee-rr=0$. Pro ee ſcribe y; & fiet $y^3+2qyy \begin{matrix}+qq\\-4s\end{matrix} y -rr=0$, æquatio cubica, cujus terminus ſecundus tolli poteſt, & radix deinceps per regulam præcedentem, vel ſecus, extrahi. Dein, habitâ illâ radice, regrediendum erit, ponendo $\sqrt{y}=e$; $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}=f$; $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}=g$; & æquationes duæ, $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$,

$+g=0$, extractis earum radicibus, dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ, $x^4+qxx+rx+s=0$; nimirum $x=-\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-f}$, & $x=\frac{1}{2}e\pm\sqrt{\frac{1}{4}ee-g}$. Ubi notandum eſt, quòd ſi æquationis biquadraticæ radices quatuor poſſibiles ſunt, æquationis cubicæ, $y^3+2qyy\begin{smallmatrix}+qq\\-4s\end{smallmatrix}y-rr=0$, radices tres poſſibiles erunt; atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt. *Sic & ſi æquationis quinque, vel plurium, dimenſionum radices affectæ in radices non affectas, mediis æquationis terminis quoque pacto ſublatis, convertantur; illa radicum expreſſio ſemper erit impoſſibilis, ubi plures quàm una radix, in æquatione imparium dimenſionum, poſſibiles ſunt, aut plures quàm duæ, in æquatione parium dimenſionum, quæ per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ, methodo ſuprà expoſitâ, reduci nequeunt.* De Surdis Divisoribus.

Docuit *Carteſius* æquationem biquadraticam per regulas ultimò traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio à nobis ſuprà reducta, $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Tolle ſecundum terminum, ſcribendo $v+\frac{1}{4}$ pro x, & orietur $v^4-\frac{43}{8}vv+\frac{75}{8}v-\frac{851}{256}=0$. Ad tollendas fractiones ſcribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur $z^4-86zz+600z-851=0$. Hîc eſt $-86=q$; $600=r$; & $-851=s$; adeoque $y^3+2qyy\begin{smallmatrix}+qq\\-4s\end{smallmatrix}y-rr=0$, ſubſtitutis æquipollentibus, fiet $y^3-172yy+10800y-360000=0$. Ubi tentando omnes ultimi termini diviſores $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, & deinceps uſque ad 100, invenietur tandem $y=100$. Quod idem multo expeditiùs, per methodum à nobis ſuprà expoſitam, inveniri potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, & $\frac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}$, id eſt $\frac{-86+100-60}{2}$, ſeu -23, erit f; & $\frac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$, ſeu 37, erit g; adeoque æquationes, $xx+ex+f=0$, & $xx-ex+g=0$, ſcripto z pro x, & ſubſtitutis æquipollentibus, evadent $zz+10z-23=0$, & $zz-10z+37=0$. Reſtitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur $vv+2\frac{1}{2}v-\frac{23}{16}=0$, & $vv-2\frac{1}{2}v+\frac{37}{16}=0$. Reſtitue inſuper $x-\frac{1}{4}$ pro v, & emergent $xx+2x-2=0$, & $xx-3x+3=0$; æquationes duæ, quarum radices quatuor, $x=-1\pm\sqrt{3}$, & $x=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$, eædem ſunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ ſub initio propoſitæ, $x^4-x^3-5xx+12x-6=0$. Sed hæ faciliùs, per methodum inveniendi diviſores à nobis ſuprà explicatam, inveniri potuerunt.

ÆQUA-

Appendix.

ÆQUATIONUM

CONSTRUCTIO LINEARIS.

HActenus æquationum proprietates, tranſmutationes, limites & omnis generis reductiones, docui. Demonſtrationes non ſemper adjunxi, quoniam ſatis faciles mihi viſæ ſunt, & nonnunquam, abſque nimiis ambagibus, tradi non poſſent. Reſtat jam tantùm, ut æquationum, poſtquam ad formam commodiſſimam reductæ ſunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hîc præcipua difficultas eſt, in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodiſſimè per æquationis conſtructionem aliquam, ſeu Geometricam, ſive Mechanicam, conſit. Quâ de causâ non pigebit hujuſmodi conſtructiones aliquas ſubjungere.

Veteres, ut ex Pappo diſcimus, triſectionem anguli, & inventionem duarum mediè proportionalium, ſub initio per rectam lineam & circulum, fruſtrà aggreſſi ſunt. Poſtea conſiderare cœperunt alias permultas lineas, ut Conchoidem, Ciſſoidem, & Conicas ſectiones, & per harum aliquas ſolverunt Problemata. Tandem re penitius examinatâ, & Conicis ſectionibus in Geometriam receptis, Problemata diſtinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas ortum à ſolidi, id eſt Coni, conſideratione derivantes, ſolvebantur; & *Linearia*, ad quorum ſolutionem requirebantur lineæ magis compoſitæ. Et juxta hanc diſtinctionem, problemata ſolida per alias lineas quàm Conicas ſectiones ſolvere à Geometriâ alienum eſt; præſertim ſi nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & Conicas ſectiones in Geometriam recipiantur. At Recentiores longiùs progreſſi receperunt lineas omnes in Geometriam, quæ per æquationes exprimi poſſunt, & pro dimenſionibus æquationum diſtinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt, non licere Problema per lineam ſuperioris generis conſtruere, quod conſtrui poteſt per lineam inferioris. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, diſtinctionem earum in genera, juxta dimenſiones æquationum, per

quas definiuntur, laudo. At æquatio non eſt, ſed deſcriptio, quæ curvam Geometricam efficit. Circulus linea Geometrica eſt, non quòd per æquationem exprimi poteſt; ſed quòd deſcriptio ejus poſtulatur. Æquationis ſimplicitas non eſt, ſed deſcriptionis facilitas, quæ lineam ad conſtructiones Problematum priùs admittendam eſſe indicat. Nam æquatio ad Parabolam ſimplicior eſt, quàm æquatio ad circulum; & tamen circulus, ob ſimpliciorem deſcriptionem, priùs admittitur. Circulus & Coni ſectiones, ſi æquationum dimenſiones ſpectentur, ejuſdem ſunt ordinis; & tamen circulus, in conſtructione problematum, non connumeratur cum his, ſed ob ſimplicem deſcriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum conſtruere, quod per rectas conſtrui poteſt, non ſit illicitum; per Conicas verò ſectiones conſtruere, quod per circulum conſtrui poteſt, vitio vertatur. Aut igitur legem à dimenſionibus æquationum in circulo obſervandam eſſe ſtatue, & ſic diſtinctionem inter problemata plana & ſolida ut vitioſam tolle; aut concede, legem illam in lineis ſuperiorem generum non ita obſervandam eſſe, quin aliquæ, ob ſimpliciorem deſcriptionem, præferantur aliis ejuſdem ordinis, &, in conſtructione Problematum, cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In conſtructionibus quæ ſunt æquè Geometricæ, præferendæ ſemper ſunt ſimpliciores. Hæc lex omni exceptione major eſt. Ad ſimplicitatem verò conſtructionis expreſſiones Algebraicæ nil conferunt. Solæ deſcriptiones linearum hìc in cenſum veniunt. Has ſolas conſiderabant Geometræ, qui circulum conjungebant cum rectâ. Prout hæ ſunt faciles, vel difficiles, conſtructio facilis vel difficilis redditur. Adeòque à rei naturâ alienum eſt, leges conſtructionibus aliunde præſcribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum, & fortè Conicas ſectiones, è Geometriâ cum Veteribus excludamus, aut admittamus omnes ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem. Si Trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in datâ ratione ſecare. Numquid ergo reprehenderes, ſiquis hâc lineâ ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes, hanc lineam per æquationem non definiri, lineas verò quæ per æquationes definiuntur adhibendas eſſe? Igitur ſi an-

Æquationum Constructiones.

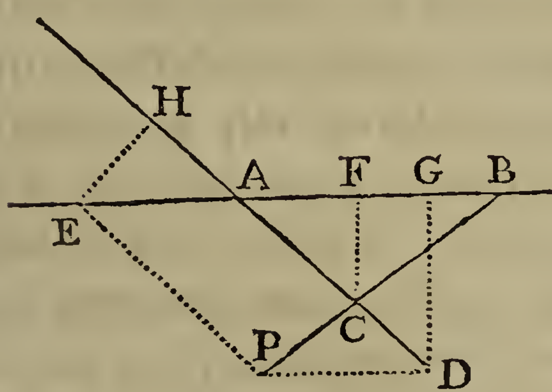
Appendix. gulus *e.g.* in 10001 partes dividendus esset, teneremur curvam lineam æquatione plusquam centum dimensionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium describere, nedum intelligere, valeret; & hanc anteponere Trochoidi, quæ linea notissima est, & per motum rotæ, vel circuli, facillimè describitur. Quod quàm absurdum sit quis non videt? Aut igitur Trochoides in Geometriam non est admittenda, aut, in constructione Problematum, curvis omnibus difficilioris descriptionis anteferenda. Et eadem est ratio de reliquis curvis. Quo nomine trisectiones anguli per Conchoidem, quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus posuere, præ aliorum hâc de re inventis omnibus laudamus; siquidem lineas omnes præter rectam & circulum è Geometriâ excludere debeamus, aut secundum descriptionis simplicitatem admittere, & Conchoides, simplicitate descriptionis, nulli curvæ præter circulum cedit. Æquationes sunt expressiones computi Arithmetici, & in Geometriâ locum propriè non habent, nisi quatenus quantitates verè Geometricæ (id est lineæ, superficies, solida & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Divisiones, & ejusmodi computa in Geometriam recèns introducta sunt; idque inconsultò, & contra primum institutum scientiæ hujus. Nam qui constructiones Problematum per rectam & circulum, à primis Geometris adinventas, considerabit, facilè sentiet, Geometriam excogitatam esse, ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ scientiæ confundi non debent. Veteres tam sedulò distinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam terminos Arithmeticos nunquam introduxerint. Et recentes, utramque confundendo, amiserunt simplicitatem, in quâ Geometriæ elegantia omnis consistit. Est itaque *Arithmeticè* quidem simplicius quod per simpliciores æquationes determinantur; at *Geometricè* simplicius est, quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometriâ prius & præstantius esse debet, quod est ratione Geometricâ simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit, si cum Mathematicorum Principe *Archimede*, aliisque Veteribus, Conchoidem ad Solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen siquis aliter senserit, sciat me hic de constructione non Geometricâ, sed qualicunque, sollicitum esse, quâ

2 radices

radices æquationum in numeris proximè assequar. Cujus rei gratiâ præmitto hoc Problema Lemmaticum. *Æquationes Constructiones.*

Inter datas duas lineas, AB, AC, *rectam datæ longitudinis,* BC, *ponere quæ producta transeat per datum punctum* P.

Si circa polum P gyret linea BC, & simul termino ejus C incedat super rectâ AC, ejus alter terminus B describet Conchoidem Veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eâdem lege linea BC duci potest, ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur.

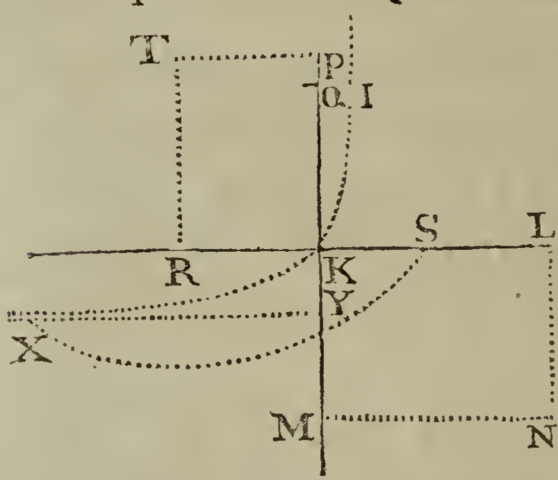


Sicui constructio hæcce per Conchoidem minùs placeat, potest alia per Conicam sectionem ejus vice substitui. A puncto P ad rectas AD, AE age PD, PE constituentes parallelogrammum EADP, & à punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicula CF, DG, ut & à puncto E ad rectam AC versus A productam perpendiculum EH; & dictis $AD = a$. $PD = b$. $BC = c$. $AG = d$. $AB = x$, & $AC = y$. Erit AD. AG :: AC. AF, adeoque $AF = \frac{dy}{a}$. Erit & AB. AC :: PD. CD, seu $x.y :: b.a - y$. Ergo $by = ax - yx$, quæ æquatio est ad Hyperbolam. Rursus per 13. II. *Elem.* erit $BCq = ACq + ABq - 2FAB$, id est $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$. Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit $cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx$, æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas lineas, Hyperbolam & Circulum, ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis x & y, seu AB & AC, quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLMN, & asymptotis LN, MN per punctum K describe Hyperbolam IKX.

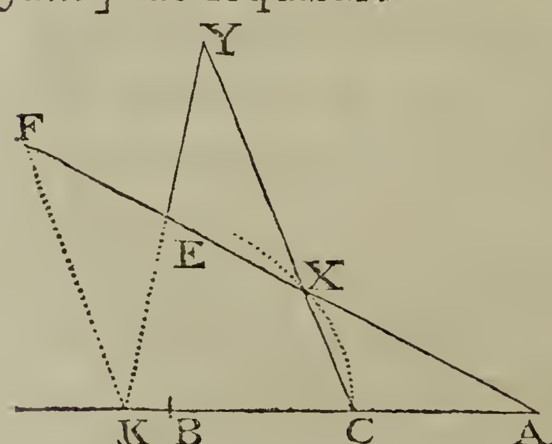
In

In KM verſus K productâ cape KP æqualem AG & KQ æqualem BC. Et in KL productâ verſus K cape KR æqualem AH, & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T intervallo TS deſcribe circulum. Secet hic Hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ AC & AB, vel una earum cum



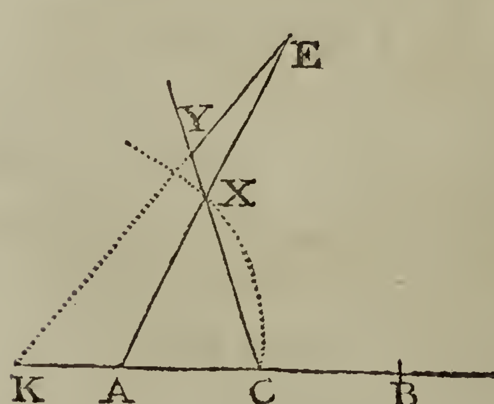
puncto P, determinant poſitionem quæſitam rectæ BC. Cui conſtructioni demonſtrandæ, & ejus caſibus ſecundum caſus Problematis determinandis non immoror.

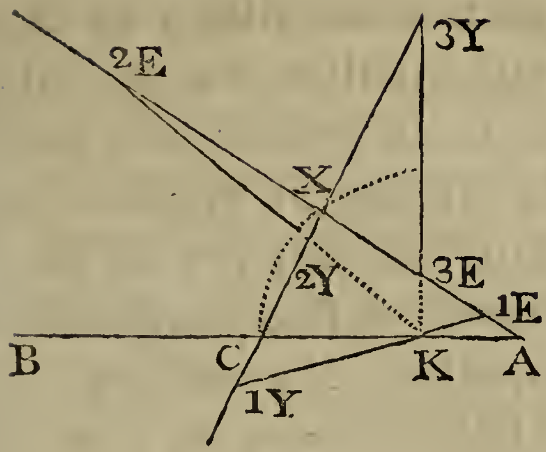
Hâc, inquam, conſtructione ſolvi poteſt Problema ſicui ita viſum ſit. Sed hæc ſolutio magis compoſita eſt quàm ut uſibus ullis inſervire poſſit. Nuda ſpeculatio eſt, & ſpeculationes Geometricæ tantum habent elegantiæ quantum ſimplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis ſecum afferunt. Eâ de cauſâ conſtructionem per Conchoidem præfero ut multo ſimpliciorem, & non minùs Geometricam; & quæ reſolutioni æquationum à nobis propoſitæ optimè conducit. Præmiſſo igitur præcedente Lemmate conſtruimus Geometricè Problemata cubica, & quadrato-quadratica [*utpote quæ ad cubica reduci poſſunt*] ut ſequitur.



Proponatur æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$. *cujus terminus ſecundus deeſt, tertius verò ſub ſigno ſuo deſignatur per* $+q$ *&* *quartus per* $+r$.

Duc quamlibet KA quam dic n. In KA utrinque productâ cape $KB = \frac{q}{n}$, ad eaſdem partes cum KA ſi habeatur $+q$, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K radio KC fac circulum CX, cui inſcribe rectam CX æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge AX, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis





gitudinis cum CA, quæque producta tranſeat per punctum K, & XY erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X verſus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, ſi habeatur $+r$, & contrò ſi habeatur $-r$. Æquationum Constructiones.

Demonſtratio.

Ad demonſtrationem præmittimus Lemmata ſequentia.

LEM. I. *Eſt* YX *ad* AK *ut* CX *ad* KE. Etenim age KF parallelam CX, & ob ſimilia triangula ACX, AKF, & EYX, EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF; & YX ad YE, ſeu AC, ut KF ad KE; adeóque ex æquo perturbatè YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

LEM. II. *Eſt* YX *ad* AK *ut* CY *ad* AK + KE. Nam componendo eſt YX ad AK ut YX + CX, id eſt CY ad AK + KE. Q. E. D.

LEM. III. *Eſt* KE − BK *ad* YX *ut* YX *ad* AK.

Nam per 12 II. *Elem.* eſt $YKq - CKq = CYq - CY \times CX = CY \times YX$; hoc eſt, ſi Theorema reſolvatur in proportionem, CY ad YK − CK ut YK + CK ad YX. Sed eſt $YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK$. Et $YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK$. Adeoque eſt CY ad KE − BK ut KE + AK ad YX. Sed per *Lemma ſecundum* erat CY ad KE + AK ut YX ad AK. Ergo ex æquo eſt YX ad KE − BK ut AK ad YX. Seu KE − BK ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

His præmiſſis demonſtrabitur Theorema ut ſequitur. In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, ſeu $KE \times YX = AK \times CX$. In *tertio* erat KE − BK ad YX ut YX ad AK. Unde, ſi prioris rationis termini ducantur in YX, fiet $KE \times YX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK, id eſt $AK \times CX - BK \times YX$ ad YXq ut YX ad AK; & ductis extremis & mediis in ſe $AKq \times CX - AK \times BK \times YX = YX$ *cub.* Denique pro YX, AK, BK, & CX reſtitutis x, n, $\frac{q}{n}$, & $\frac{q}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D. Quod verò ad ſignorum variationes attinet, iſtis ſecundum caſus Problematum determinandis non immoror.

Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deeſt $x^3 + pxx + r = 0$. Et ad ejus conſtructionem aſſumpto quolibet n, cape in rectâ aliquâ longitudines duas $KA = \frac{r}{nn}$, & $KB = p$; idque ad eaſdem partes ſi

r & p

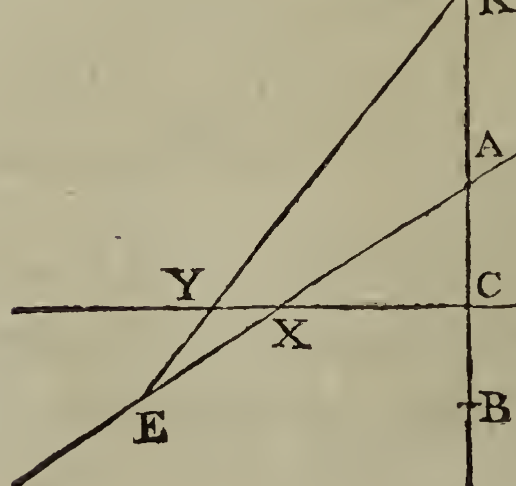
APPENDIX. r & p habeant eadem ſigna, aliter ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro K radio KC deſcribe circulum cui, inſcribe CX æqualem n, & produc eam utrinque. Item junge AK, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inſcribe EY ejuſdem longitudinis cum CA, ita ut ea ſi producatur tranſeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ ſunt ubi punctum Y cadit à parte puncti X verſus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X; ſi modò habeatur $+r$, & contrà ſi habeatur $-r$.

Ad hujus Propoſitionis demonſtrationem Schemata & Lemmata de priori propoſitione mutuò ſumantur, & *Demonſtratio* erit ut ſequitur.

Per *Lemma* 1, erat YX ad AK ut CX ad KE, ſeu $YX \times KE = AK \times CX$; & per *Lemma* 3, $KE - KB$ ad YX ut YX ad AK, aut (ſumpto KB ad contrarias partes) $KE + KB$ ad YX ut YX ad AK; adeóque $KE + KB$ in KE ad $YX \times KE$, ſeu $AK \times CX$, ut YX ad AK, ſeu CX ad KE. Quare ductis extremis & mediis in ſe, eſt KE *cub.* $+ KB \times KEq = AK \times CXq$, & ipſarum KE, KB, AK, & CX reſtitutis valoribus ſuprà aſſignatis, $x^3 + pxx = r$.

Proponimus jam æquationem trium dimenſionum $x^3 + pxx + qx + r = 0$, *nullo termino carentem, & cujus tres radices non ſunt omnes affirmativæ, neque omnes negativæ.*

Et primò ſi terminus q *negativus* eſt, in rectâ aliquâ KB capiantur longitudines duæ $KA = \frac{r}{q}$, & $KB = p$, idque ad eaſdem partes puncti K ſi p & $\frac{r}{q}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias. Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q: Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum, inſcribatur recta EY, quæ æqualis ſit



rectæ AC, & producta tranſeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis; quæ quidem affirmativa erit ſi punctum X cadat inter puncta A & E, negativa verò ſi punctum E cadat ad partes puncti X verſus A.

Quòd ſi terminus q *affirmativus* eſt, in rectâ KB capiantur longitudines illæ duæ KA =

$KA = \sqrt{\frac{-r}{p}}$, & $KB = \frac{q}{KA}$, idque ad eaſdem partes puncti K, ſi $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent ſigna diverſa; aliter ad contrarias: Biſeca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum, inſcribatur recta EY quæ æqualis ſit rectæ AC, & producta tranſeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit ſi punctum x cadat inter puncta A & F, affirmativa verò ſi punctum Y cadat ad partes puncti X verſus punctum C. Æquationum Constructiones.

Demonſtratio caſûs prioris.

Per *Lemma primum* erat KE ad CX ut AK ad YX, & ita (componendo) eſt KE + AK, id eſt KY + KC ad CX + YX, id eſt CY. Sed in triangulo rectangulo KCY eſt YCq æquale $YKq - KCq$, id eſt æquale $KY + KC$ in $KY - KC$, & reſolvendo terminos æquales in proportionales, $KY + KC$ ad CY ut CY ad $KY - KC$, ſeu $KE + AK$ ad CY ut CY ad $EK - KB$. Quare cùm in hâc proportione fuerit KE ad CX; duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut $KE + AK$ ad $KE - KB$; & ductis extremis & mediis in ſe KE *cub.* $- KB \times KEq = CXq \times KE + CXq \times AK$. Et reſtitutis valoribus ſuprà aſſignatis $x^3 - pxx = qx + r$.

Demonſtratio caſûs ſecundi.

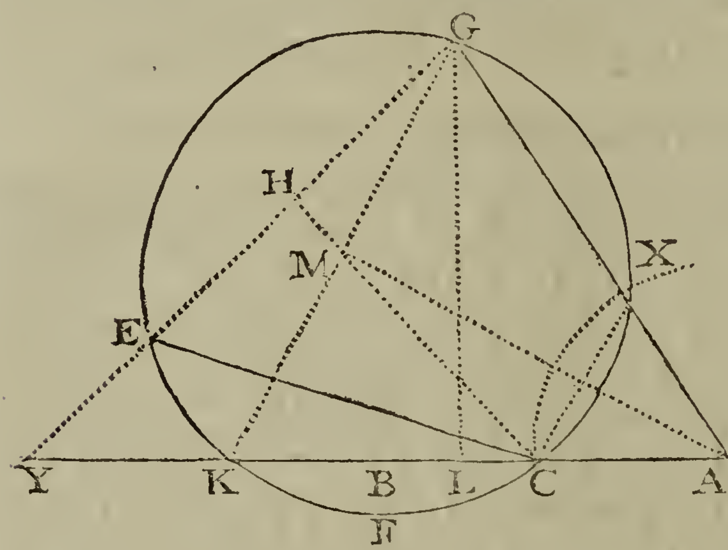
Per *Lemma primum* eſt KE ad CX ut AK ad YX, ductiſque extremis & mediis in ſe, ſit $KE \times YX = CX \times AK$. Scribe ergo in ſuperioribus $KE \times YX$ pro $CX \times AK$, & fiet KE *cub.* $- KB \times KEq = CXq \times KE + CX \times KE \times YX$. Et applicatis omnibus ad KE erit $KEq - KB \times KE = CXq + CX \times YX$: ductiſque omnibus in AK, habebitur $AK \times KEq - AK \times KB \times KE = AK \times CXq + AK \times CX \times YX$: Ac rurſus ſcripto $KE \times YX$ pro $CX \times AK$, fiet $AK \times KEq - AK \times KB \times KE = KE \times YX \times CX + KE \times YXq$: & applicatis omnibus ad KE orietur $AK \times KE - AK \times KB = YX \times CX + YXq$: ductiſque omnibus in YX emerget $AK \times KE \times YX - AK \times KB \times YX = YXq \times CX +$ YX *cub.* Et pro $KE \times YX$ ſcriptis in primo termino $CX \times AK$, fiet $CX \times AKq - AK \times KB \times YX = CX \times YXq +$ YX *cub.* ſeu quod perinde eſt YX *cub.* $+ CX \times YXq + AK \times KB \times YX - CX \times AKq = 0$. Atque pro YX, CX, AK & KB ſubſtitutis valoribus ſuprà aſſignatis x, p, $\sqrt{\frac{-r}{p}}$, $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$ emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio conſtruenda.

Solvuntur

APPENDIX. *Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, eâ lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.*

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest.*

Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque productâ cape $KB = \frac{q}{n}$, idque ad easdem partes puncti K cum lineâ KA si modò habeatur $-q$, aliter ad diversas. Biseca BA in C, & centro A intervallo AC describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam $CX = \frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum KCXG. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum ultimò descriptum KCXG in puncto G. Denique inter hunc ultimò descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum rectâ AC; ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KFC si habeatur $-r$; & contrà si habeatur $+r$ affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.



Ad hujus verò constructionis demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

LEM. I. *Positis quæ in constructione superiore, est* CE *ad* KA *ut* CE + CX *ad* AY, *&* CX *ad* KA.

Nam rectâ KG ductâ, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulos ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY, eò quòd EY & AC juxta Hypothesin æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur ex æquo perturbatè, quòd sit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut

KA

KA ad KY. Unde componendo fit CE+CX ad CX ut KA+KY ad KY, id eſt ut AY ad KY, & viciſſim CE+CX ad AY ut CX ad KY hoc eſt ut CE ad KA. Q. E. D. *Æquationum Constructiones.*

LEM. II. *Demiſſo ad lineam* GY *perpendiculo* CH, *fiet rectangulum* 2HEY *æquale rectangulo* CE×CX.

Nam demiſſo etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL, ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK ſegmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula ſunt & proinde ſimilia. Eſt ergo KG ad KL ut EC ad EH. Porro, à puncto A ad lineam KG demiſſo perpendiculo AM, ob æquales AK, AG biſecabitur KG in M, & triangula KAM KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos fient ſimilia: & inde eſt AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut eſt AK ad KM ita eſt 2AK ad 2KM ſeu KG, & ita (ob ſimilia triangula AKG, ACX) eſt 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita eſt 2EY ad CX. Ergo eſt 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo eſt 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in ſe) æquale eſt rectangulo EC×CX. Q. E. D.

Aſſumpſimus hic lineas AK, AG æquales eſſe. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop.* 36. *lib.* III. *Elem.*) æqualia ſunt, atque adeo ut CA eſt ad XA ita AG eſt ad AK. Sed CA, XA æquales ſunt per Hypotheſin; ergo & AG, AK.

LEM. III. *Conſtructis omnibus ut ſupra, tres lineæ* BY, CE, KA, *ſunt continue proportionales.*

Nam (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*) eſt $CYq = EYq + CEq + 2EY \times EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq - EYq = CEq + 2EY \times EH$. Sed $2EY \times EH$ (per *Lem.* 2.) æquale eſt rectangulo $CE \times CX$, & addito utrinque CEq fit $CEq + 2EY \times EH = CEq + CE \times CX$. Ergo $CYq - EYq$ æquale eſt $CEq + CE \times CX$, id eſt $CY + EY$ in $CY - EY$ æquale eſt $CEq + CE \times CX$. Et reſolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit $CE + CX$ ad $CY + EY$ ut $CY - EY$ ad CE. Sunt autem tres lineæ EY, CA, CB æquales, & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque AY pro $CY + EY$, & BY pro $CY - EY$, & fiet $CE + CX$ ad AY ut BY ad CE. Sed (*per Lem.* 1.) eſt CE ad KA ut $CE + CX$ ad AY, ergo eſt CE ad KA ut BY ad CE, hoc eſt lineæ tres BY, CE, KA, ſunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum conſtructio ſuperioris Problematis ſic *demonſtratur*.

Per Lemma I. eſt CE ad KA ut CX ad KY, adeoque $KA \times CX = KY \times CE$, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA \times CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* eſt $BK + \frac{KA \times CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in ſe provenit CEq æquale $BK \times KA + \frac{KAq \times CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit CE *cub.* æquale $BK \times KA \times CE + KAq \times CX$. CE erat radix æquationis dicta x, KA erat n, KB $\frac{q}{n}$, & CX $\frac{r}{nn}$. His pro CE, KA, KB, & CX ſubſtitutis oritur $x^3 = qx + r$; ſeu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio conſtruenda; ubi q & r negativa prodeunt ſumptis KA & KB ad eaſdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori ſegmento CGK exiſtente. Hic *unus caſus* eſt Conſtructionis demonſtrandæ. Ducatur KB ad partes contrarias, id eſt, mutetur ſignum ejus ſeu ſignum ipſius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde eſt, ſignum termini q, & habebitur conſtructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: *Qui caſus eſt alter*. In his caſibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad eaſdem partes lineæ AK. Cadant CX & radix negativa ad eaſdem mutato ſigno ipſius CX ſeu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde eſt) ſigno ipſius r, & habebitur *caſus tertius*. $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes ſunt negativæ. Et mutato rurſus ſigno ipſius KB ſeu $\frac{q}{n}$ vel ſolius q, incidetur in *caſum quartum* $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium caſuum conſtructiones percurrere licebit, & ſigillatim demonſtrare ad modum caſus primi. Nos uno caſu demonſtrato cæteros leviter attingere ſatis eſſe putavimus. Hi verbis iiſdem mutato ſolum linearum ſitu demonſtrantur.

Conſtruenda jam ſit æquatio cubica $x^3 + pxx * + r = 0$, *cujus tertius terminus deeſt*.

In figura ſuperiore aſſumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY, KA, & KB quarum KA valeat $\frac{r}{nn}$, & KB valeat p. Has cape ad eaſdem partes puncti K, ſi modo ſigna terminorum p & r ſint eadem, ſecus ad contrarias. Biſeca BA in C, & centro

& centro K intervallo KC defcribe circulum CXG. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini affumptæ n. Junge AX & produc junctam ad G ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K, C, X, G, defcribe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam infcribe rectam EY ejufdem longitudinis cum recta AC ea lege ut hæc infcripta recta tranfeat per punctum G fi modo ipfa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K verfus punctum A fi modo habeatur $+r$; fin habeatur $-r$, affirmativæ funt quæ cadunt ad partes contrarias. Et fi affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ funt quæ jacent ex altera.

Æquationum Constructiones.

Demonftratur autem hæc conftructio ope Lemmatum trium noviffimorum in hunc modum.

Per *Lemma tertium* funt BY, CE, KA continue proportionales; & per *Lemma primum* ut eft CE ad KA ita eft CX ad KY. Ergo BY eft ad CE ut CX ad KY. BY idem eft quod KY−KB. Ergo KY−KB eft ad CE ut CX ad KY. Sed ut eft KY−KB ad CE ita eft KY−KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY eft CE in KY æquale KA in CX. Ergo KY−KB in KY eft ad KA in CX (ut KY−KB ad CE, hoc eft) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in fe invicem fit KY−KB in KYq æquale KA in CXq: id eft KY *cub.* −KB×KY *quad.* æquale KA×CX *quad.* Erat autem in conftructione, KY radix æquationis dicta x, KB æqualis p, KA æqualis $\frac{r}{nn}$, & CX æqualis n. Scribantur igitur x, p, $\frac{r}{nn}$, & n pro KY, KB, KA, & CX refpective, & fiet $x^3-pxx=r$, feu $x^3-pxx-r=0$.

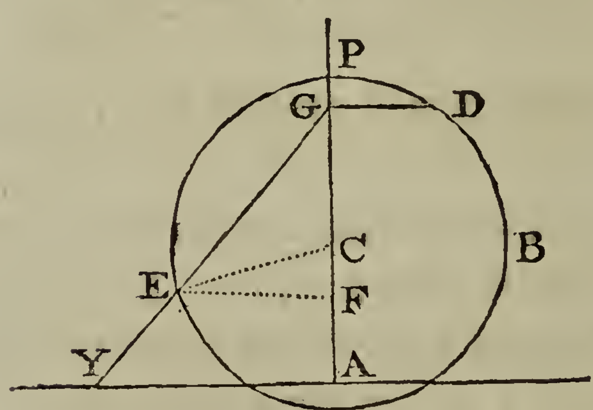
Refolvi poteft conftructio demonftranda in hafce quatuor æquationum cafus, $x^3-pxx-r=0$, $x^3-pxx+r=0$, $x^3+pxx-r=0$, & $x^3+pxx+r=0$. Cafum primum jam demonftratum dedi, cæteri tres iifdem verbis mutato tantum linearum fitu demonftrantur. Nimirum uti fumendo KA & KB ad eafdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.* −KB×KYq = KA×CXq, & inde $x^3-pxx-r=0$: fic fumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit fimili argumentationis progreffu KY *cub.* +KB×KYq = KA×CXq, & inde $x^3+pxx-r=0$.

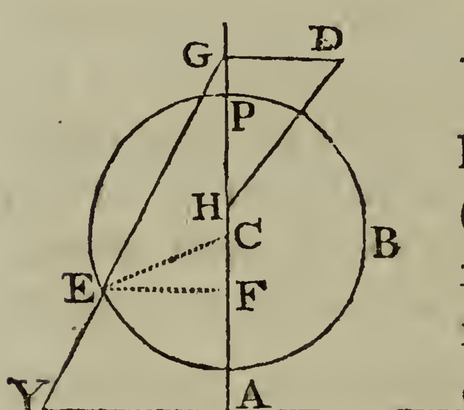
 Et

APPENDIX. Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY *cub.* $+$KB$\times$KY$q = -$KA$\times$CXq, seu $x^3+pxx+r=0$, & KY *cub.* $-$KB$\times$KYq $= -$KA$\times$CXq, seu $x^3-pxx+r=0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

Proponatur jam æquatio cubica $x^3+pxx+qx+r=0$, *nullo (nisi forte tertio) termino carens.* Ea construetur ad hunc modum.

Cape ab arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$. Deinde si termini p & r habent contraria signa, centro C intervallo CD describe circulum PBE. Sin eadem sunt eorum signa, centro D intervallo GC describe circulum occultum secantem rectam GA in H; dein centro C intervallo GH describe circulum PBE. Tum fac GA $= -\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$, eamque duc in linea GC ad partes puncti G versus C si modo quantitas $-\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$ (signis terminorum p, q, r, in æquatione construendâ probe observatis) affirmativa obvenerit: secus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE superius descriptum inscribe lineam EY æqualem termino p, ea lege ut hæc inscripta convergat ad punctum G. Quo facto & productâ illâ EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis construendæ. Quæ quidem radices affirmativæ sunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, si modo habeatur $+p$; & contra si $-p$.





Demonstrationi hujus constructionis præmittimus *Lemmata* sequentia.

LEM. I. *Demisso ad* AG *perpendiculo* EF *&* *acta recta* EC, *est* EGq+GCq=ECq+2CGF.

Nam per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.* est EGq = ECq + GCq + 2GCF. Addatur utrinque GCq & fiet EGq+GCq=ECq+2GCq+2GCF. Sed

$2GCq+2GCF$ eſt $2GC$ in $GC+CF$ id eſt $2CGF$. Ergo $EGq+GCq=ECq+2CGF$. Q. E. D. Æquationum Constructiones.

Lem. II. *In conſtructionis caſu primo ubi circulus* PBE *tranſit per punctum* D, *eſt* $EGq-GDq=2CGF$.

Nam per *Lemma primum* eſt $EGq+GCq=ECq+2CGF$, & ablato utrinque GCq, fit $EGq=ECq-GCq+2CGF$. Sed $ECq-GCq$ idem eſt quod $CDq-GCq$, hoc eſt idem quod GDq. Ergo $EGq=GDq+2CGF$, & ſubducto utrobique GDq, fit $EGq-GDq=2CGF$. Q. E. D.

Lem. III. *In conſtructionis caſu ſecundo, ubi circulus* PBE *non tranſit per punctum* D, *eſt* $EGq+GDq=2CGF$.

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq+GCq=ECq+2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq+GCq-ECq=2CGF$. Sed $GC=DH$ & $EC=CP=GH$: ergo $GCq-ECq=DHq-GHq=GDq$, atque adeo $EGq+GDq=2CGF$. Q. E. D.

Lem. IV. *Eſt* $2CGF$ *in* $GY=2CG$ *in* AGE.

Namque ob ſimilia triangula GEF, GYA eſt GF ad GE ut AG ad GY; hoc eſt (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG\times AG$ ad $2CG\times GY$. Ducantur extrema & media in ſe, & fiet $2CG\times GY\times GF=2CG\times AG\times GE$. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum conſtructio Problematis ſic demonſtratur.

In caſu *primo* eſt (per *Lem.* 2.) $EGq-GDq=2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq\times GY-GDq\times GY=2CGF\times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $=2CG\times AGE$. Pro GY ſcribe $EG+EY$, & fiet $EG\ cub.+EY\times EGq-GDq\times EG-GDq\times EY=2CGA\times EG$, ſeu $EG\ cub.+EY\times EGq\begin{smallmatrix}-GDq\\-2CGA\end{smallmatrix}\times EG-GDq\times EY=0$.

In caſu *ſecundo* eſt (per *Lem.* 3.) $EFq+GEq=2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq\times GY+GDq\times GY=2CGF\times GY$ (hoc eſt per *Lem.* 4.) $=2CG\times AGE$. Pro GY ſcribe $EG+EY$, & fiet $EG\ cub.+EY\times EGq+GDq\times EG+GDq\times EY=2CGA\times EG$, ſeu $EG\ cub.+EY\times EGq\begin{smallmatrix}+GDq\\-2CGA\end{smallmatrix}\times EG+GDq\times EY=0$.

Jam vero erat EG radix æquationis conſtructæ dicta x; item $GD=\sqrt{\frac{r}{p}}$, $EY=p$, $2CG=n$, & $GA=-\frac{q}{n}-\frac{r}{np}$, id eſt in caſu primo ubi terminorum p & r diverſa ſunt ſigna: at in caſu ſecundo ubi alterutrius p vel r mutatur ſignum fiet $-\frac{q}{n}+\frac{r}{np}=GA$. Scribantur igitur

Appendix. tur pro EG, GD, EY, 2CG, & GA quantitates x, $\sqrt{\frac{r}{p}}$, p, n, & $-\frac{\ }{n} \mp \frac{\ }{np}$,

& casu *primo* fiet $x^3+px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} x-r=0$, id est $x^3+pxx+qx-r=0$,

casu autem *secundo* $x^3+px^2 \begin{matrix} +\frac{r}{p} \\ +q-\frac{r}{p} \end{matrix} x+r=0$, id est $x^3+pxx+qx+r=0$,

Est igitur in utroque casu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

Subdistinguitur autem casus uterque in casus plures particulares: Nimirum prior in hosce $x^3+px^2+qx-r=0$, $x^3+pxx-qx-r=0$, $x^3-pxx+qx+r=0$, $x^3-pxx-qx+r=0$, $x^3+px^2-r=0$, & $x^3-pxx+r=0$; posterior in hosce $x^3+pxx+qx+r=0$, $x^3+pxx-qx+r=0$, $x^3-pxx+qx-r=0$, $x^3-pxx-qx-r=0$, $x^3+pxx+r=0$, & $x^3-pxx-r=0$. Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum linearum situ, compinguntur.

Hæ sunt Problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum, & rectam lineam positione datam, eâ lege, ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscribitur autem talis recta, ducendo *Conchoidem* veterum, cujus Polus sit punctum illud, ad quod recta inscribenda debet convergere, Regula seu Asymptotos recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc Conchoides circulum præfatum in puncto E, per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis, rectam illam, inter circulum & alteram positione datam rectam, ratione quâcunque mechanicâ interponere.

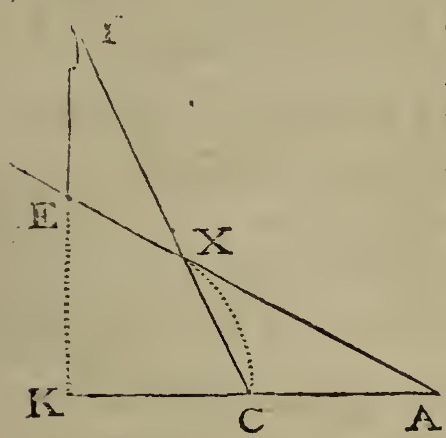
In hisce autem constructionibus notandum est quod quantias n, ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur; id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

Inveniendæ sint inter a & b duæ medie proportionales x & y. Quoniam sunt $a.\ x.\ y.\ b$ continue proportionales erit aa ad xx ut x ad b, adeoque $x^3=aab$, seu $x^3-aab=0$. Hic desunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $-aab$. Igitur in constructionum formulâ primâ, ubi recta EY ad datum punctum K

convergens

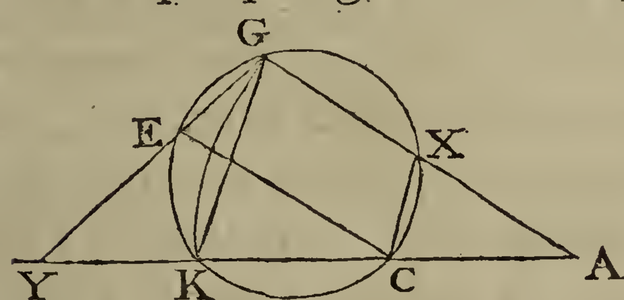
convergens inſeritur inter alias duas poſitione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$ id eſt æqualis $\frac{-aab}{nn}$, aſſumo n æqualem a, & ſic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emerget conſtructio. Æquationum Constructiones.

Duco quamvis KA æqualem a, eamque biſeco in C, centroque K intervallo KC deſcribo circulum CX ad quem apto rectam CX



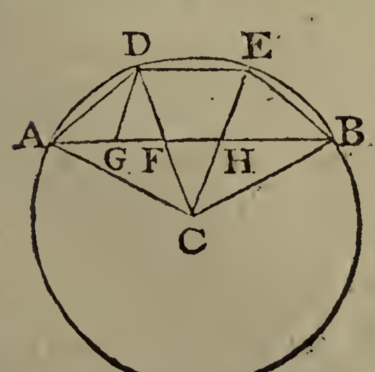
æqualem b & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id eſt XY & KE duæ medie proportionales inter a & b. Conſtructio nota eſt.

Inter altera autem conſtructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, eſtque CX $= \frac{r}{nn}$ id eſt (in hoc Problemate $= \frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n = a$, & ſic fit CX $= b$, cæteraque peraguntur ut ſequitur.



Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque biſeco in C & centro A intervallo AK deſcribo circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$ conſtituendo triangulum æquicrurum AKG. Dein per puncta C, K, G circulum deſcribo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inſcribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK, EC, KY, $\frac{1}{2}$ KG, id eſt EC & KY duæ medie proportionales erunt inter datas a & b.

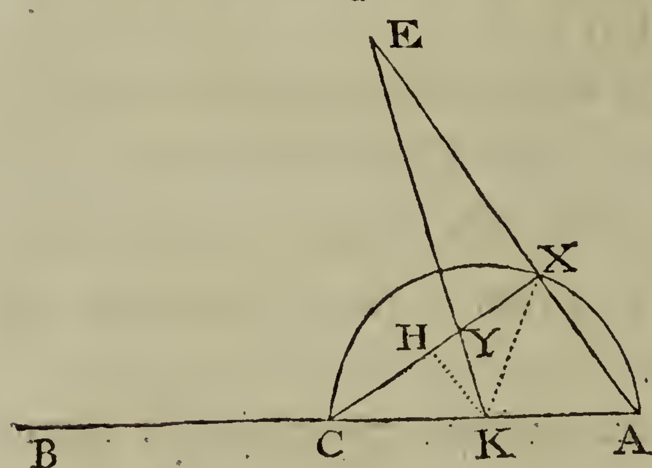
Secandus jam ſit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus ſecandus ACB, *partes ejus inveniendæ* ACD, DCE, ECB.



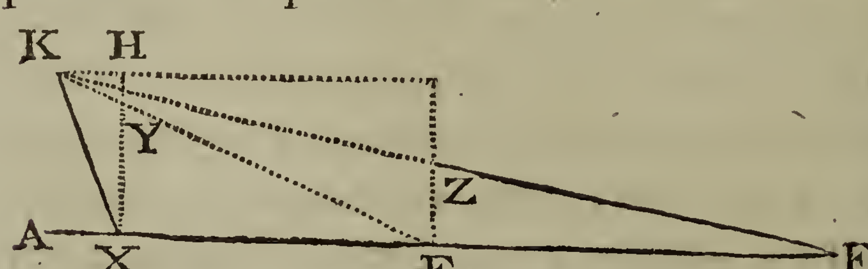
Centro C intervallo CA deſcribatur circulus ADEB ſecans rectas CA, CD, CE, CB in A, D, E, B. Jungantur AD, DE, EB ut & AB ſecans rectas CD, CE in F & H, & ipſi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob ſimilia triangula CAD, ADF, DFG, continue proportionales ſunt CA, AD, DF, FG. Ergo ſi dicatur AC$=a$, & AD

APPENDIX. & AD$=x$, fiet DF $= \frac{xx}{a}$, & FG $= \frac{x^3}{aa}$. Eſt autem AB = BH + HG + FA − GF = 3AD − GF $= 3x - \frac{x^3}{aa}$. Dic AB$=b$, & fiet $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$, ſeu $x^3 - 3aax + aab = 0$. Hic deeſt æquationis terminus ſecundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in conſtructionum formula prima ubi erat $p=0$, KA $= n$, KB $= \frac{q}{n}$, & CX $= \frac{r}{nn}$, id eſt in problemate jam conſtruendo KB $= -\frac{3aa}{n}$, & CX $= \frac{aab}{nn}$, ut hæ quantitates evadant quam ſimpliciſſimæ pono $n=a$, & ſic fit KB $= -3a$, & CX $=b$. Unde talis emergit Problematis *conſtructio.*

Ago quamvis KA $=a$, & ad contrarias partes KB$=3a$. Biſeco BA in C, centroque K intervallo KC deſcribo circulum, cui inſcribo rectam CX $=b$. Et actâ rectâ AX, inter ipſam infinite productam & rectam CX pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit XY $=x$. Quinetiam ob æquales circulos ADEB, CXA, & æquales ſubtenſas AB, CX, nec non æquales ſubtenſarum partes BH, XY, æquales erunt anguli ACB, CKX, ut & anguli BCH, XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujuſvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur ponendo inter chordas CX, AX infinitè productas rectam EY æqualem diametro AC, & convergentem ad circuli centrum K.



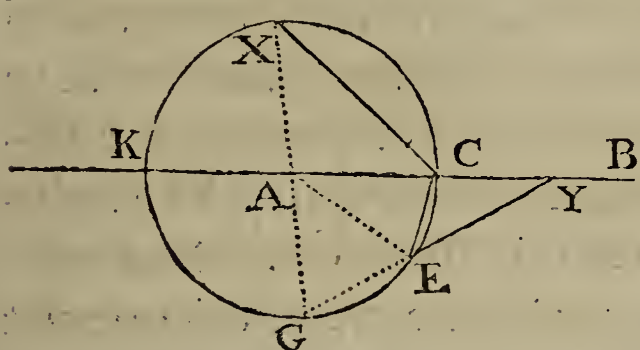
Hinc ſi à circuli centro K ad ſubtenſam CX demittas perpendiculum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut ſi detur quilibet angulus HKX inveniri poſſit ejus pars tertia HKY demittendo à quolibet lateris utriuſvis KX puncto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipſius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE. *Vel ſic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum AX erigatur perpendiculum XH, & à lateris alterius XK puncto quovis K agatur



gatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud *Pappum*, *lib*. 4. *Prop*. 32. Æquationum Constructiones.

Quod si angulum per alteram constructionum formulam ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris : hic etiam erunt KB $= \frac{q}{n}$, & CX $= \frac{r}{nn}$, id est in problemate de quo nunc agimus KB $= \frac{-3aa}{n}$, & CX $= \frac{aab}{nn}$, adeoque ponendo $n = a$ fiet KB $= -3a$, & CX $= b$. Et inde talis emerget *constructio*.

A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ KA $= a$, & KB $= 3a$. Biseca AB in C, centroque A intervallo AC describe circulum. In eo pone rectam CX $= b$. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum jam descriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæsita x, qua tertia pars anguli dati subtenditur.

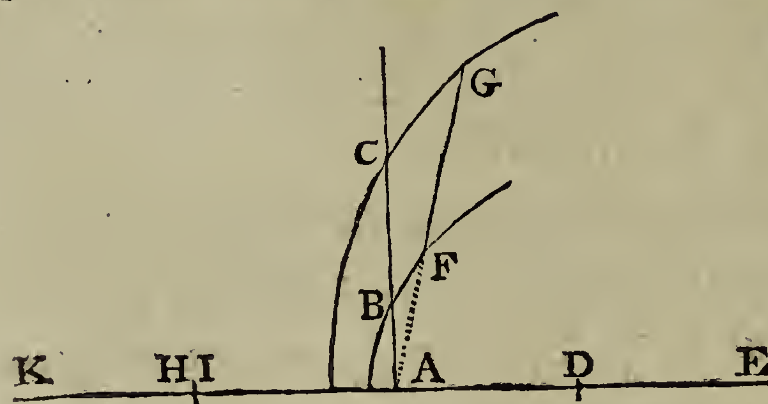


Talis constructio consequitur formulam superius allatam : quæ tamen sic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB & KXG, & æquales subtensas CX & AB, æquales sunt anguli CAX sive KAG & ACB, adeoque CE subtensa est tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinité productum rectam EY æqualem circuli semidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum trifariam secare. Lemma Archim 8. Eædem constructiones facilius explicari possint quam hic factum est ; sed in his volui ostendere quomodo ex generalibus Problematum constructionibus superius

 expositis

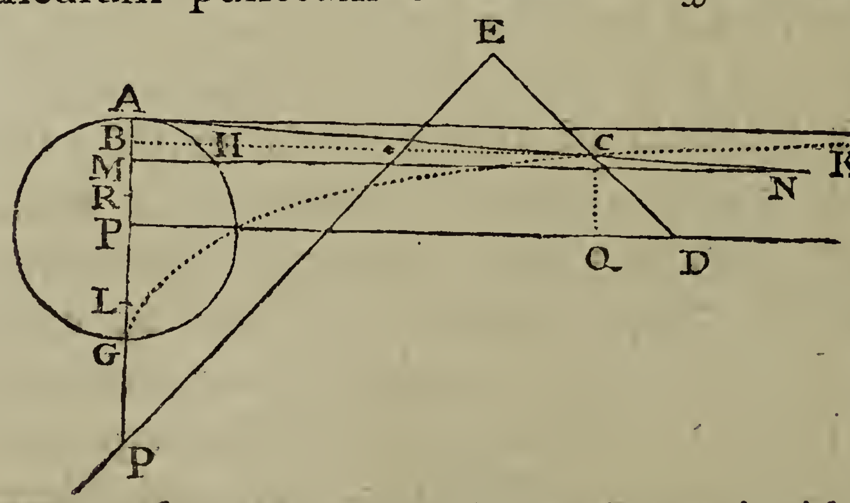
APPENDIX. expositis constructiones simplicissimas particularium Problematum derivare liceat.

Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quamplurimas. *Ut si inter a & b inveniendæ essent duæ medié proportionales.* Age quamvis AK$=b$, & huic perpendiculare AB$=a$. Biseca AK in I, & in eâdem AK, subtensæ BI æqualem pone AH; ut & in lineâ AB productâ subtensæ BH æqualem AC.



Tum in lineâ AK ad alteras partes puncti A cape AD cujusvis longitudinis, & huic æqualem DE, centrisque D & E, intervallis DB, EC describe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF, prima duarum medié proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *Cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualem nemo, quod scio, apposuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *Cissois* pertinet. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infinitum. Et producatur FG ad P, ut FP æqualis sit circuli Diametro. Moveatur norma rectangula PED eâ lege ut crus ejus EP perpetuó transeat per punctum P, & crus alterum ED circuli Diametro AG seu FP æquale, termino suo D tangat semper lineam FD, & cruris hujus medium punctum C describet *Cissoidem* desideratam GCK ut supra exposui. Quare si inter duas quasvis a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales: cape AM$=a$, erige perpendiculum MN $=b$. Junge AN; & lege præfatâ moveatur norma



PED, usque dum punctum ejus C incidat in rectam AN. Tum demisso ad AP perpendiculo CB, cape t ad BH, & u ad BG, ut est

MN

MN ad BC, & ob continue proportionales AB, BH, BG, BC erunt etiam continue proportionales a, t, v, b. Æquationum Constructiones.

Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia Problemata solida. Verbi gratiâ proponatur æquatio cubica $x^3 \mp pxx + qx - r = 0$: ubi q semper affirmativum sit, r negativum, & p signi utriusvis. Fac AG $= \frac{r}{q}$, eamque biseca in F, & cape FR & GL$=\frac{1}{2}p$, idque versus A si habeatur $+p$ aliter versus P. Erige insuper normalem FD, inque eà cape FQ$=\sqrt{q}$ huic etiam erige normalem QC. In normæ autem crure ED, cape ED & EC ipsis AG & AR æquales respectivè, & applicetur deinceps norma ad Schema sic ut punctum ejus D tangat rectam FD, & punctum C rectam QC, tum si compleatur parallelogrammum BQ; erit LB æquationis radix quæsita x.

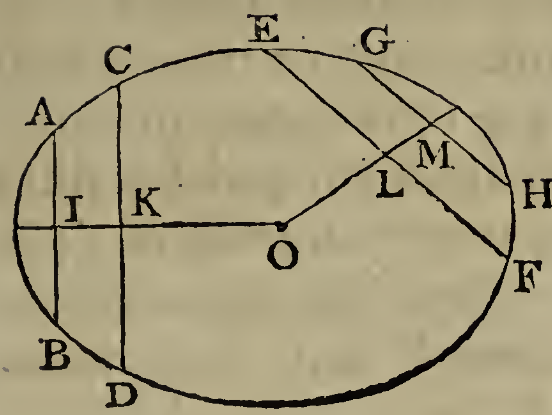
Hactenus constructionem solidorum Problematum, per operationes, quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita, exponere visum fuit. Sic Veteres, postquam confectionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constructiones, ob difficilem Conicarum sectionum descriptionem, inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per Conchoidem, Cissoidem, extensionem filorum, & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: prælatâ mechanicâ utilitate inutili speculationi Geometricæ, ut ex *Pappo* discimus. Sic magnus ille *Archimedes* trisectionem anguli, per coni sectiones, à superioribus Geometris expositam, neglexit, & in Lemmatis suis angulum, modo à nobis superius exposito, trifariam secare docuit. Si veteres problemata, per figuras, eâ tempestate in Geometriam non receptas, construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ coni sectiones à plerisque receptæ.

Verumtamèn novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hasce omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem Problematum, eo ordine, quo æquationes, quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometriâ fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus, hâc lege, cum coni sectionibus conjungendus esset, quem tamen Geometræ omnes cum lineâ rectâ conjungunt. Vacil-

 lante

APPENDIX. lante autem hâc regulâ, tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes Analyticas in Geometriam. In Geometriam planam, meo quidem judicio, lineæ nullæ præter rectam & circulum admitti debent; nisi forte linearum distinctio aliqua prius excogitetur, quâ linea circularis conjungatur cum rectâ, & à reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum. Nam figuræ omnes sunt planæ, quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometræ postulent in plano describere. Et problema omne planum est, quod per figuras planas construi potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conicis sectionibus, alisque magis compositis figuris, problemata omnia solida, & plus quam solida, quæ per has figuras construi possunt, evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta Analyticè simplicior est quam circulus; hoc non obstante problemata ejusdem sunt ordinis, quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum rectâ. Et multo magis Ellipsis, quæ minus differt à circulo, quam circulus à rectâ, postulando consimiliter descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis, speculando Ellipsin, incideret in problema aliquod solidum, et ipsum beneficio ejusdem Ellipseos & circuli construeret; hoc problema jam pro plano habendum esset: eo, quod Ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis, quæ superest, absolvitur per circuli solius descriptionem. Eâdem de causâ problemata quævis plana per datam Ellipsin construere licitum est. Verbi gratiâ si datæ Ellipseos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB, CD Ellipsi occurrentes in A, B, C, D, aliasque duas EF, GH Ellipsi occurrentes in E, F, G, H. Has bisecarem in I, K, L, M, & junctas IK, LM producerem, usque ad concursum suum in O. Legitima est hæc constructio plani problematis per Ellipsin. Nil refert quod Ellipsis Analyticè definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod Ellipsis Geometricè generetur sectione figuræ solidæ. Hypothesis sola, quod Ellipsis jam descripta habetur in plano, problemata omnia solida, per ipsam constructa, reducit ad ordinem planorum, efficitque, ut plana

omnia



omnia per ipſam legitimè conſtruan- tur. Et eadem eſt ratio Poſtulati. Quod vi poſtulatorum fieri poteſt, ut jam factum, & datum aſſumere conceſſum eſt. Poſtuletur igitur Ellipſin in plano deſcribere, & ad ordinem planorum problematum reducentur, ea omnia, quæ per Ellipſin conſtrui poſſunt, planaque omnia per Ellipſin licebit conſtruere.

Æquationum Constructiones.

Neceſſe eſt igitur aut Problemata plana & ſolida inter ſe confundi, aut lineas omnes rejici è Geometriâ planâ præter rectam & circulum, & ſiqua forſan alia detur aliquando, in ſtatu conſtruendi alicujus Problematis. Verum genera problematum confundi, nemo certe permiſerit. Rejiciantur igitur è Geometriâ planâ ſectiones Conicæ, aliæque figuræ omnes præter rectam & circulum, & quas contigerit in ſtatu problematum dari. Alienæ ſunt igitur à Geometriâ deſcriptiones illæ omnes conicarum ſectionum in plano, quibus hodierni Geometræ tantoperè indulgent. Nec tamen ideo Coni ſectiones è Geometriâ rejiciendæ erunt. Hæ in plano non deſcribuntur Geometricè, generantur vero in ſolidi Geometrici ſuperficie plane. Conus conſtituitur Geometrice, & plano Geometrico ſecatur. Tale Coni ſegmentum figura Geometrica eſt, eundemque habet locum in Geometriâ ſolidâ ac ſegmentum circuli in planâ, & hâc ratione baſis ejus, quam Coni ſectionem vocant, figura Geometrica eſt. Locum igitur habet Coni ſectio in Geometriâ, quatenus ea ſuperficies eſt ſolidi Geometrici. Aliâ autem nullâ ratione Geometricâ, quam ſolidi ſectione, generatur, & ideo non niſi in Geometriam ſolidam antiquitùs admiſſa fuit. Talis autem Conicarum ſectionum generatio difficilis eſt, & in rebus practicis, quibus Geometria potiſſimum inſervire debet, prorſus inutilis. Ideo veteres ſe ad varias figurarum in plano deſcriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar conſtructiones præcedentes concinnavimus. Sunto conſtructiones illæ Mechanicæ: ſic & conſtructiones per Coni ſectiones, in plano ut jam moris eſt deſcriptas, Mechanicæ ſunt. Sunto conſtructiones per datas Coni ſectiones Geometricæ: ſic & conſtructiones per alias quaſ-

cunque

Appendix. cunque figuras datas Geometricæ sunt, & ejusdem ordinis cum constructionibus planorum Problematum. Nullâ ratione preferendæ sunt in Geometriâ Sectiones conicæ figuris aliis, nisi quatenus illæ à sectione Coni, praxi ad solutionem problematum prorsus inutili, derivantur. Verumtamen ne constructiones per Conicas sectiones omnino prætercam, visum fuit aliqua de his subjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommodæ consulatur.

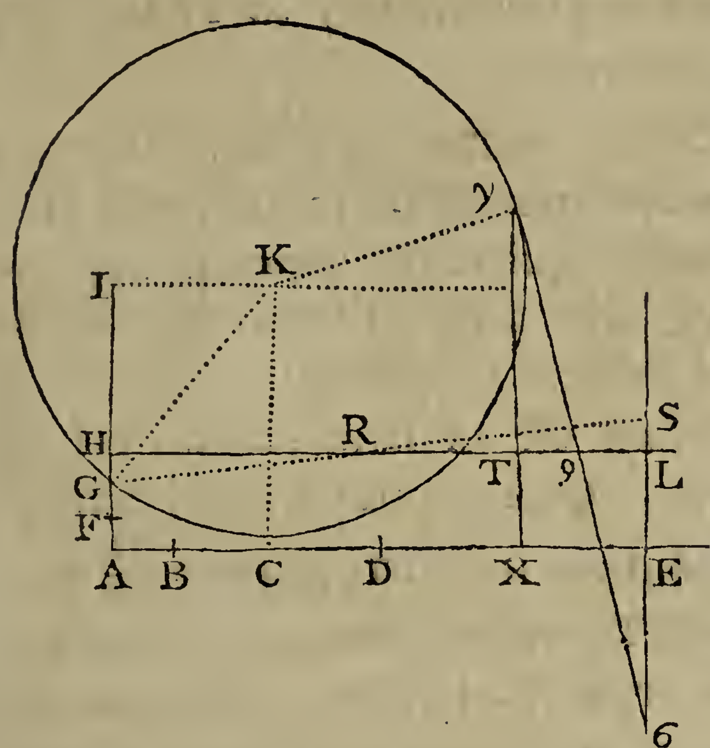
Conicarum sectionum simplicissima est Ellipsis. Hæc notior est, & circulo magis affinis, & praxi manuali facilius describitur in plano. Parabolam præferunt plerique, ob simplicitatem æquationis, per quam ea exprimitur. Verum hâc ratione Parabola ipsi etiam circulo præferenda esset, contra quam fit. Falsa est igitur argumentatio à simplicitate æquationum. Æquationum speculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum simplicitas est considerationis Analyticæ. Nos in compositione versamur, & compositioni leges dandæ non sunt ex Analysi. Manuducit Analysis ad Compositionem: sed Compositio non prius verè consit, quam liberatur ab omni Analysi. Insit compositioni vel minimum Analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est, & à mistura speculationum Analyticarum abhorret. Pendet Figurarum simplicitas à simplicitate geneseos & Idearum, & æquatio non est, sed descriptio, sive Geometrica sive Mechanica, quâ figura generatur, & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam, quomodo æquationes per ipsam construere licet.

Proponatur æquatio quævis cubica $x^3 = pxx + qx + r$, *ubi* p, q & r *datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis* $+$ & $-$ *significant, & alteruter terminorum* p & q, *vel etiam uterque deesse potest.* Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones unâ illâ operatione quæ sequitur exhibebimus.

A puncto D in rectâ quavis datâ cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eâdem rectâ $BA = \frac{q}{n}$, idque versus punctum C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad

Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF, FI æqualem $\frac{r}{nn}$, & FH in ratione ad FI ut eſt BC ad BE. FH vero & FI capiendæ ſunt ad partes puncti F verſus G ſi termini p & r habent eadem ſigna, aliter ad partes verſus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG deſcribatur circulus. Tum in lineâ HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ ſit ad HL ut BD ad BE: agatur GR ſecans EL in S, & moveatur lineâ G[illegible] puncto ejus R ſuper lineâ HL, & puncto S ſuper lineâ EL incedente, donec tertium ejus punctum G deſcribendo Ellipſin, occurrat circulo, quemadmodum videre eſt in poſitione $\gamma\varrho\sigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occurſus illius puncto γ in rectam AE demiſſi erit radix æquationis. Poteſt autem Regulæ GRS vel $\gamma\varrho\sigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot ſunt poſſibiles radices. Et è radicibus hæ ſunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur à puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, ſi modo habeatur $+r$: & contra ſi habeatur $-r$.

Æquationum Constructiones.



Demonſtratur autem hæc conſtructio ſubſidio *Lemmatum* ſequentium.

LEM. I. *Poſitis quæ in ſuperiore conſtructione, eſt* $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$.

Namque ex natura circuli eſt $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed eſt $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$ hoc eſt æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id eſt ipſi $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop.* 4. *Lib.* II. *Elem.*) æquale eſt $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo

Appendix. adeo $AIq - GIq$ æquale eſt $AGq + 2AGI$, hoc eſt æquale $2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GI$, ſeu æquale $2AG \times FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale eſt $\gamma Xq - 2AI \times \gamma X + 2AG \times FI$. Q. E. D.

Lem. II. *Poſitis quæ in ſuperiore conſtructione, eſt* $2EAX - AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$.

Notum eſt enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\sigma$ ſuperius aſſignato deſcribit Ellipſin cujus centrum eſt L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ ſive $2GR$, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ ſive $2GS$. Et horum ratio ad invicem ea eſt quæ lineæ HR ad lineam HL, ſive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus tranſverſum eſt ad latus rectum principale ut BE ad BC ſive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura Ellipſeos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH} T\gamma q$. Eſt autem LT æquale $AE - AX$, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Eſt autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex $GH + LS$, propterea quod GS hypotenuſa eſt trianguli rectanguli cujus latera ſunt ipſis AE & $GH + LS$ æqualia. Eſt & (ob ſimilia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo $GH + LS$ ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex $GH + LS$, eſt ad GHq ut HLq ad HRq, hoc eſt (per conſtructionem) ut BEq ad BDq, id eſt ut BE ad BC, ſeu FI ad FH, adeoque quadratum ex $GH + LS$ æquale eſt $\frac{FI}{FH} GHq$. Eſt itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH} GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH} GHq$, & reſtabit $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + AHq - GHq$. Eſt autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$ & ſubducto utrinque GHq reſtat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc eſt $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, ſeu $= 2AG \times FH$, atque adeo eſt $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \times X\gamma + 2AG \times FH$, i. e. $= \frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \times X\gamma + 2AG \times FI$. Q. E. D.

Lem. III. *Iiſdem poſitis eſt* AX *ad* $X\gamma - AG$ *ut* $X\gamma$ *ad* 2BC.

Nam ſi de æqualibus in *Lemmate ſecundo* ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, reſtabunt æqualia $2CE \times AX$ & $\frac{HI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH$

$\times X\gamma + 2AI \times X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH \times CE \times AX$ æquale $HI \times X\gamma q - 2FI \times AH \times X\gamma + 2AI \times FH \times X\gamma$. Eſt autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2FI \times AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI \times AH - 2FHA = 2AHI$, & $2AHI - 2FHI = 2HI \times AF$. Ergo $2FI \times AH - 2FH \times AI = 2HI \times AF$, adeoque $2FH \times CE \times AX = HI \times X\gamma q - 2HI \times AF \times X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE \times AX$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$. Sed per conſtructionem HI eſt ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE \times AX$ ad $2BC \times AX$ & proinde $2BC \times AX$ & $X\gamma q - 2AF \times X\gamma$ (per *Prop.* 9. *lib.* V. *Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$, id eſt ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D. Æquationum Conſtructiones.

LEM. IV. *Iiſdem poſitis, eſt* 2FI *ad* $AX - 2AB$ *ut* $X\gamma$ *ad* 2BC.

Nam de æqualibus in Lemmate tertio, nimirum $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, ſubducantur æqualia in *Lemmate primo*, & reſtabunt æqualia $-2AB \times AX + AXq = 2FI \times X\gamma - 2AG \times FI$, hoc eſt AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia ſunt latera 2FI ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc eſt (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D.

Præſtratis his Lemmatibus, Conſtructio Problematis ſic tandem demonſtratur.

Per *Lemma quartum* eſt $X\gamma$ ad 2BC ut 2FI ad $\overline{AX - 2AB}$, hoc eſt (per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2BC \times 2FI$ ad $2BC \times \overline{AX - 2AB}$, ſeu ad $2BC \times AX - 2BC \times 2AB$. Sed per *Lemma tertium* eſt AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad 2BC, ſeu $2BC \times AX = X\gamma q - 2AF \times X\gamma$, adeoque $X\gamma$ eſt ad 2BC ut $2BC \times 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF \times X\gamma - 2BC \times 2AB$. Et ductis extremis & mediis in ſe, fit $X\gamma$ *cub.* $- 2AF \times X\gamma q - 4BC \times AB \times X\gamma = 8BCq \times FI$. Addantur utrinque $2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma$, & fiet $X\gamma$ *cub.* $= 2AF \times X\gamma q + 4BC \times AB \times X\gamma + 8BCq \times FI$. Erat utem in conſtructione demonſtrandâ, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x, nec non $AF = p$, $BC = n$, $AB = \frac{q}{n}$, & $FI = \frac{r}{nn}$, adeoque $BC \times AB = q$. Et $BCq \times FI = r$. Quibus ſubſtitutis fiet $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

Corol. Hinc ſi AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum fiet 2FI ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad 2BC. Unde conſtat inventio duarum mediè proportionalium inter datas quaſlibet FI & BC.

 Scholium.

APPENDIX.

Scholium. Hactenus æquationis cubicæ constructionem per Ellipsin solummodo exposui: sed regula suâ naturâ generalior est, sese ad omnes coni sectiones indifferenter extendens. Nam si loco Ellipseos velis Hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A, F, G, I, H, K, L & R determinentur ut antè; excepto tantùm quòd FH debet sumi ad partes ipsius F contra I, & quòd HR non in lineâ HL, sed in lineâ AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ à puncto L ad puncta duo R & R hinc inde duci pro asymptotis Hyperbolæ. Cum istis itaque asymptotis LR, LR describe Hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K intervallo KG: & dimidia perpendiculorum ab eorum intersectionibus ad rectam AE demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & − probè mutatis, demonstrantur ut priùs.

Quòd si Parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet, eritque Parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A describenda, sito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B situm est respectu puncti C.

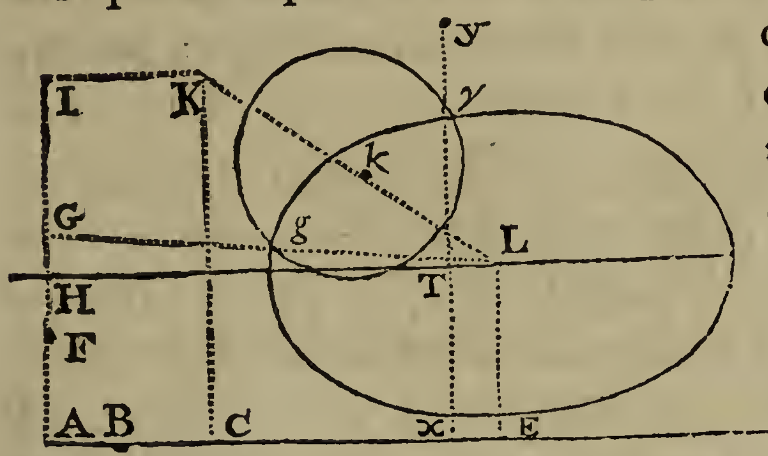
Sic sunt constructiones per Parabolam, si simplicitatem analyticam spectes, simplicissimæ omnium. Eæ per Hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per Ellipsin absolvuntur. Quòd si praxeos manualis in describendis figuris spectetur simplicitas, mutandus est ordo.

In hisce autem constructionibus observandum venit, quòd proportione lateris recti principalis ad latus transversum determinatur species Ellipseos & Hyperbolæ; & proportio illa eadem est quæ linearum BC & BE, atque adeo assumi potest: Parabolæ verò species est unica quam artifex ponendo BE infinitè longam assequitur. Sic igitur penes artificem est, æquationem quamcunque cubicam per conicam sectionem imperatæ speciei construere. A figuris autem specie datis ad figuras magnitudine datas devenietur, augendo vel diminuendo in ratione datâ lineas omnes, quibus figuræ specie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas, per datam quamvis Conicam sectionem, construere licebit. Id quod sic pleniùs explico.

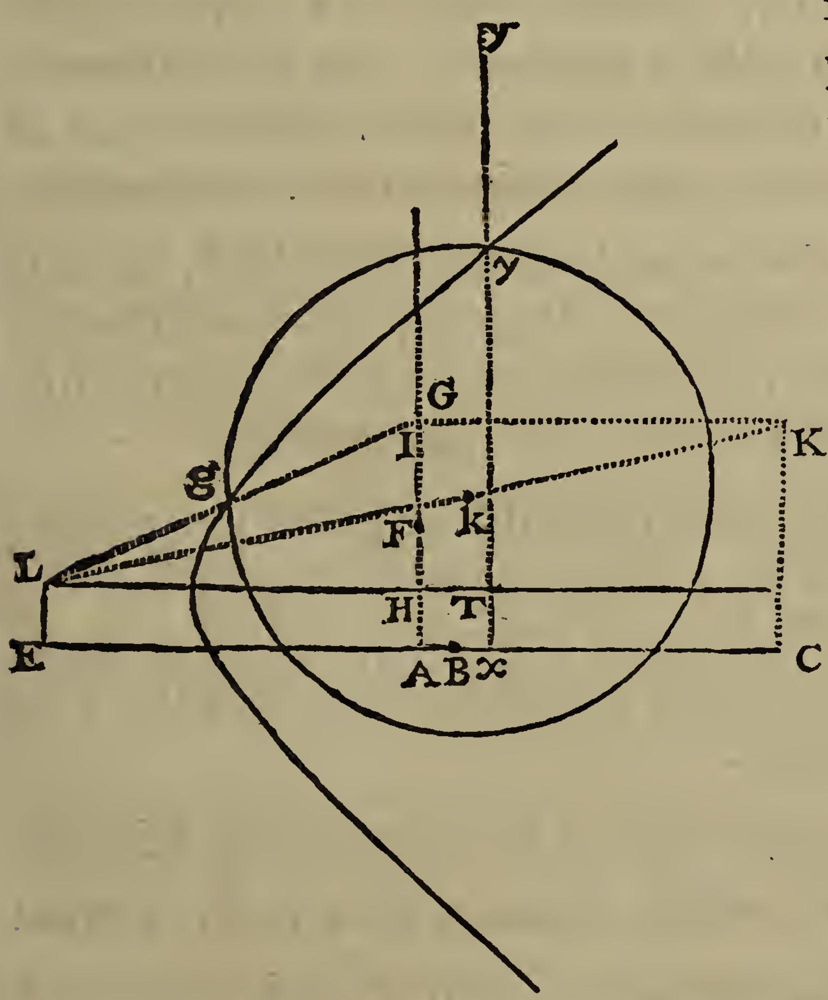
Proponatur

Proponatur æquationem quamcunque cubicam $x^3 = pxx.\ qx.\ r.$ ope datæ cujuscunque sectionis conicæ construere. ÆQUATIONUM CONSTRUCTIONES.

A puncto quovis B in rectâ quâvis infinitâ BCE, cape duas quascunque longitudines BC, BE ad easdem partes si data Coni sectio sit Ellipsis, ad contrarias si ea sit Hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ sectionis latus rectum principale ad latus transversum; & BC nominatâ



n, cape $BA = \frac{q}{n}$, idque versus C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p & FG æqualem AF; item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur verò FI versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter versus A. Dein fac ut sit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape à puncto F versus I si sectio sit Ellipsis, aut ad partes contrarias si ea sit Hyperbola. Porro compleantur parallelogramma IACK & HAEL, & hæ omnes jam



descriptæ lineæ transferantur ad datam sectionem Conicam, aut quod perinde est, his superponatur curva, ita ut axis ejus sive transversa diameter principalis conveniat cum rectâ LH & centrum cum puncto L. His ita constitutis agatur recta KL ut & recta GL secans conicam sectionem in g. In LK cape Lk quæ sit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg describe circulum. A punctis ubi hic secuerit curvam impositam demitte perpendicula ad lineam LH, cujusmodi sit γT. Denique versus γ, cape TY quæ

APPENDIX. quæ ſit ad Tγ ut LG ad Lg, & hæc TY producta ſecet rectam AB in X, eritque recta $\frac{1}{2}$XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet à puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes, ſi modò habeatur $+r$, & contrà ſi $-r$ obvenerit.

Hoc modo conſtruuntur æquationes cubicæ per Ellipſes & Hyperbolas datas: Quòd ſi detur Parabola, capienda eſt BC æqualis lateri recto ipſius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut antè, centro K intervallo KG deſcribendus eſt circulus, & Parabola ita applicanda ad Schema jam deſcriptum (aut Schema ad Parabolam) ut ipſa tranſeat per puncta A & G, & axis ejus ipſi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit à puncto C. His ita conſtitutis, ſi perpendicula ab ejus occurſibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis conſtruendæ.

Et notes quòd ubi ſecundus æquationis terminus deeſt, & latus rectum Parabolæ ponitur numerus binarius, hæc conſtructio evadet eadem cum illâ quam Carteſius attulit in Geometriâ ſuâ, præterquam quòd lineamenta hîc ſunt illorum dupla.

Hæc eſt conſtructionum regula generalis. Verùm ubi problemata particularia proponuntur, conſulendum eſt conſtructionum formulis ſimpliciſſimis. Libera enim manet quantitas n, cujus aſſumptione conſtructio plerumque ſimplicior reddi poteſt. Ejus rei exemplum unum ſubjungo.

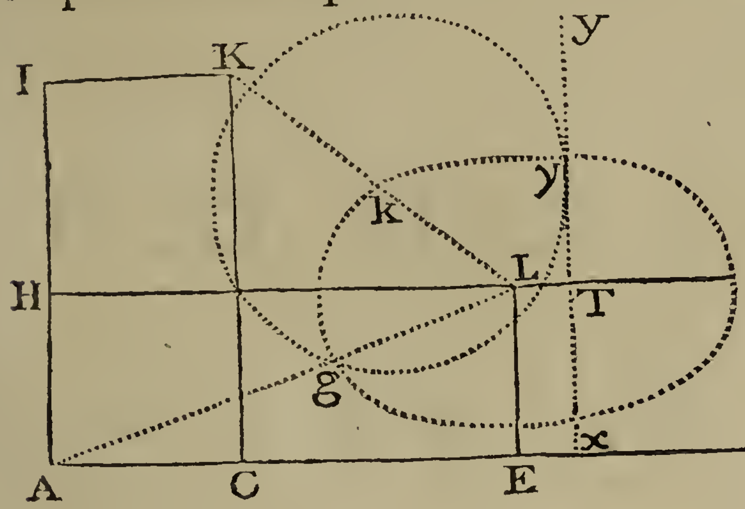
Detur Ellipſis, & inter datas lineas a & b inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a.\ x.\ \frac{xx}{a}.\ b$ erunt continuè proportionales, adeoque $ab=\frac{x^3}{a}$, ſeu $x^3=aab$, æquatio eſt quam conſtruere oportet. Hîc deſunt termini p, & q, & terminus r eſt aab, adeoque BA & AF nullæ ſunt, FI & eſt $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus noviſſimus evadat ſimplicior aſſumatur $n=a$, & fiet FI $=b$. Deinde conſtructio ita ſe habebit.

A puncto quovis A in rectâ quâvis infinitâ AE cape AC $=a$, & ad eaſdem partes puncti A cape AC ad AE ut eſt Ellipſeos latus rectum principale ad latus tranſverſum. Tum in perpendiculo

AI

AI cape AI $= b$, & AH ad AI ut eſt AC ad AE. Compleantur parallelogramma IACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic ſchemati imponatur Ellipſis data. Secet ea rectam AL in puncto g, Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg deſcribatur circulus ſecans Ellipſin in γ. Ad AE demittatur perpendiculum γX ſecans HL in T, & producatur id ad Y ut ſit TY ad Tγ ſicut LA ad Lg. Sic fiet $\frac{1}{2}$XY prima duarum mediè proportionalium x. Q. E. I.

Æquationum Constructiones.



FINIS ARITHMETICÆ UNIVERSALIS.

TOMI PRIMI

PARS SECUNDA,

IN QUA CONTINENTUR

TRACTATUS OMNES

AD

FUNDAMENTA GEOMETRIÆ SUBLIMIORIS

PERTINENTES.

MONITUM EDITORIS.

CUM in eâ diu fuerim opinione, fore ut ſublimioris Geometriæ ſcientia faciliùs atque meliùs ex ipſius Newtoni libris quàm aliunde ferè haurienda eſſet, modò ea ſuppleta eſſent quæ Newtonus reliquit imperfecta, et pauca quædam accuratiùs expoſita, quæ ille breviùs dixit quàm ut diſcentibus perſpicua eſſent; nonnulla Newtonianis adjungere decrevimus, quæ tironibus viam complanare poſſint, modò ipſi à Matheſi elementariâ ſatis inſtructi ad hæc ſublimiora accedant. Exigit igitur inſtituti ratio, ut quo ordine hæc omnia ſint legenda, ſi quis tempore breviſſimo minimoque labore fructus ſtudiorum maximos percipere cupiat, breviter exponam.

CUI *igitur nova ſit quæ in hiſce traditur diſciplina, is omnium primum Tractatum ipſius Newtoni de Rationibus Primis Ultimiſque diligenter velim perlegat.*

2. *Dein noſtrâm Fluxionum Geometriam.*

3. *Newtoni Introductionem ad Quadraturam Curvarum, et libri ipſius de Quadraturis initium, abſolutam uſque ſecundi Problematis enodationem.*

4. *Analyſin per æquationes numero terminorum infinitas, collatis Geometriæ Analyticæ locis cognatis, ad quæ notationes noſtræ legentes ablegant.*

5. *Nostram Infinitorum Logisticam.*

6. *Excerpta ex Epistolis Newtoni ad Series Infinitas Fluxionesque pertinentia.*

7. *Newtoni Geometriam Analyticam, ab initio doctrinæ fluxionalis absolutum usque nonum Problema.*

8. *Librum de Quadraturâ Curvarum, ab initio resumptum, finem usque*; *conferendo Geometriæ Analyticæ loca cognata.*

9. *Methodum Differentialem.*

10. *Enumerationem linearum tertii ordinis. Nos verò in condendis demonstrationibus nostris, eam nobis legem tulimus, ut non aliis unquam tanquam cognitis uteremur, præter ea quæ non cognovisse lectori non licebit, qui ordinem legendi à nobis præscriptum observaverit.*

D E

DE

RATIONIBUS

PRIMIS ULTIMISQUE

E

LIBRO PRIMO PRINCIPIORUM.

DE

RATIONIBUS

PRIMIS ULTIMISQUE

E

LIBRO PRIMO PRINCIPIORUM.

LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

Si negas; fiant ultimò inæquales, & ſit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypotheſin.[a]

LEMMA

[a] Siquis ea quæ ſub Lemmatis Primi titulo hîc proferuntur, pro definitione potiùs haberi velit, quâ nimirum conſtituit Newtonus quidnam ſit ultima illa, quam ſæpè adeo locuturus eſt, ſive magnitudinum ſive rationum æqualitas, is ſententiæ ſuæ me certè haud magnoperè refragantem habiturus eſt. Quid enim? Si duarum magnitudinum, A, B, quarum illam A minorem ponamus, harum ſi major B fixa maneat, minor A ſenſim increſcat, eâ quidem lege, ut licèt nunquam ea major evadat quàm B, intra certum tamen tempus minùs abiit à B quàm pro differentiâ ullâ quam minimam quis poſuerit, quidni habeatur illa A alteri B ultimò æqualis? Cùm dari nequeat magnitudo ulla illâ B vel tantillo minor, quam A ultimò non exuperabit; cùm tamen ipſam B nunquam ei exuperare liceat. Vel ſi, manente magnitudine minore A, major B ſenſim minuatur, eâ quidem lege, ut licet nunquam ea minor fiat quàm A, intra certum tamen tempus minùs exuperet A, quàm pro differentiâ ullâ quam minimam quis poſuerit, quidni habeatur illa B alteri A ultimò æqualis? Cùm dari nequeat magnitudo ulla illâ A vel tantillo major, quâ altera B ultimò minor non fiat; cùm tamen ipſâ A nunquam ea fiat minor.

A B

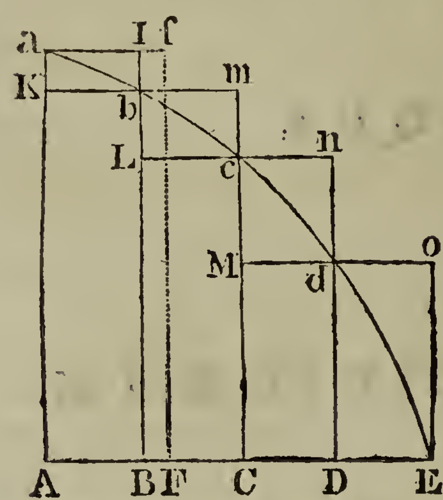
Rurſum duæ magnitudines, A, B, increſcendo vel decreſcendo quovis modo mutationes ſubeant. Sint datæ duæ, C, D; ſitque E magnitudo cui mutabilis B ultimò æqualis fiat. Sit etiam alia F, quæ habeat ad E rationem eam quam C ad D. Jam ſi magnitudini mutabili, A, is ſit muta-

tionum

De Rationibus

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis AacE, *rectis* Aa, AE *& curvâ* acE *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque,* Ab, Bc, Cd, *&c. sub basibus* AB, BC, CD, *&c. æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, *&c. figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, *&c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quòd ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*

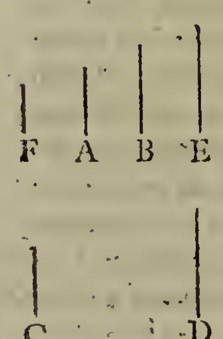


Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum Kl, Lm, Mn, Do, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summâ Aa, id est, rectangulum ABla. Sed hoc rectangulum, eò quòd latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I) figura inscripta & circumscripta, & multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. E. D.

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, *&c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum FAaf. Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ



tionum suarum omnium terminus atque finis, ut illi F ultimò æqualis fiat, his positis, quidni ratio illius C ad D, magnitudinis A ad B ultima dicatur ratio? Vel quidni dicantur rationes illæ, C ad D, A ad B, ultimò æquales? Siquidem illa A cuivis magnitudini ultimò inæqualis fiat, quæ ad ultimam ipsius B magnitudinem rationem habeat aliam atque C habet ad D. Si neges, inquit Newtonus, magnitudines, A, B, in casu primo habendas esse ultimò æquales, necesse est contrarium velis; eas habendas esse ultimò inæquales. Si hoc velis, necesse erit aliquam inter eas ponas differentiam ultimam: nam inæqualium est semper aliquid quo alterum ab altero absit: neque propiùs quam pro differentiâ illâ, quam ultimam habituræ sunt, magnitudines ultimò inæquales accedere poterunt. Hoc autem contrarium est legi mutationum à nobis constitutæ. Haud igitur inæquales ultimò habendæ sunt magnitudines, quarum mutationes legi, quam tulimus, obtemperant. Si non inæquales,

ſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſuâ AF in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. E. D. PRIMIS ULTIMISQUE.

Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

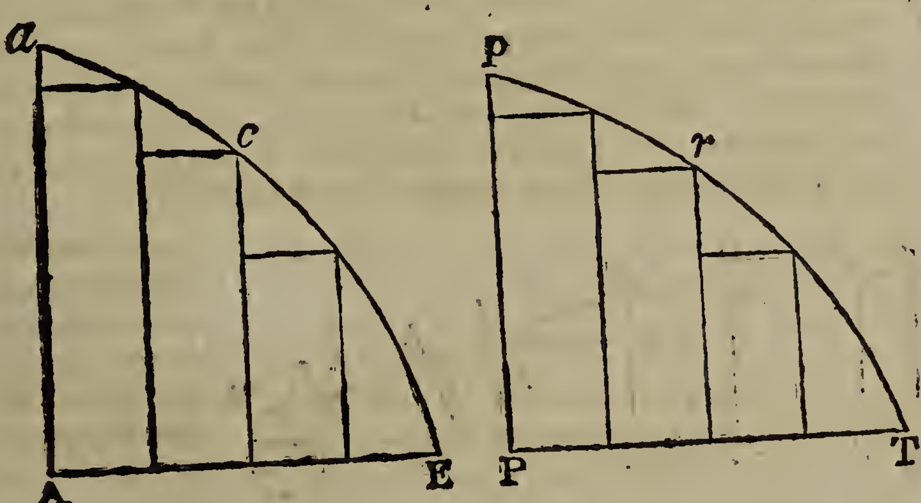
Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, &c. comprehenditur, coincidit ultimò cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta, quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *ac*E,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus figuris A*ac*E, P*pr*T, *inſcribantur (ut ſuprà) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quòd figuræ duæ* A*ac*E, P*pr*T, *ſunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figurâ priore (per lem-

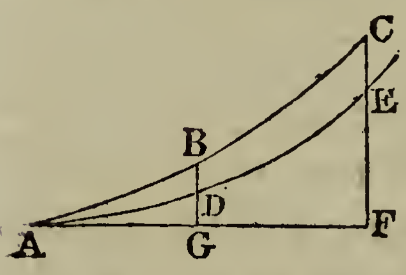
quales, æquales certè. Namque Æqualis & Inæqualis haud ſanè novimus intermedium quid, cui
nec æquali nec inæquali eſſe liceat. Jam verò ſi magnitudines illæ A, B jure optimo cenſeantur
ultimò æquales, rationes etiam, ſecundùm eandem legem noſtram mutabiles, nihilo ineptiùs ultimò
æquales dici, id etiam invictis argumentis obtinebimus. Quid enim? Cùm in caſu ſecundo
magnitudinum mutabilium, A, B, datæ, F, E, ſint ultimæ magnitudines, hoc eſt cùm A fiat
ultimò æqualis illi F, necnon B ultimò æqualis illi E, nonne dicendum A eſſe ultimò ad F ut E
ultimò ad E. Id verò ſi rectè dicitur, nonne Euclides ipſe dicere jubebit, eſſe permutando A
ultimò ad B ſicut F ad E. Quòd ſi illud etiam rectè dicitur, cùm ſit præterea F ad E ut C ad D
(id enim poſuimus), nonne iterum ex Euclidis mente dicendum erit, eſſe A ad B ultimò ſicut C ad
D, ſive rationes, A ad B, C ad D, eſſe ultimò æquales. Evicimus igitur, inquit Newtonus, magnitudines rationeſque mutabiles, quarum mutationes legem à nobis conſtitutam ſervant, habendas eſſe ultimò æquales.

DE RATIONIBUS

ma III) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. E. D (b).

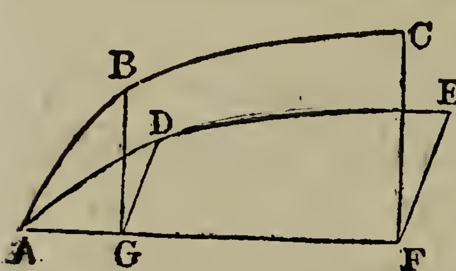
Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium

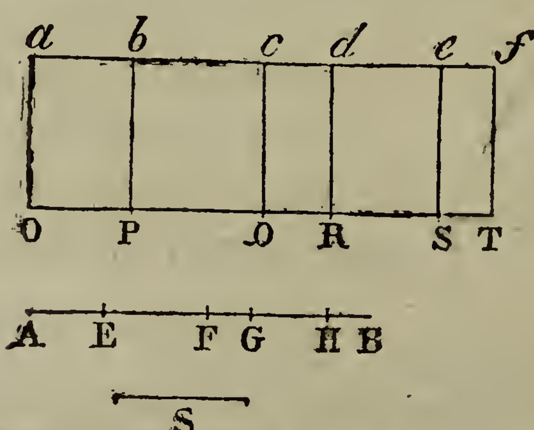
(b) *Cor. H.* 1. Si duæ curvæ (ABC, ADE) axem habeant communem (AF) hujus autem curvæ ordinatæ ad ordinatas alterius datam aliquam rationem gerant, binas utique semper conferendo, quæ ex eodem axis puncto eductæ sint, areæ curvarum AFC, AFE, datam ordinatarum inter se rationem habebunt. Nempe hoc dico; à puncto G in axe curvarum, AF, pro lubitu assumpto eductâ ad perpendiculum rectâ GB, quæ curvis duabus, ABC, ADE, illi in puncto B, huic in puncto D, occurrat, si rectis BG, DG, data aliqua ratio intercedat, quæ eadem obtineat à quocunque demum axis puncto ordinata educatur, eadem arearum etiam, AFC, AFE, inter ipsas ratio erit.

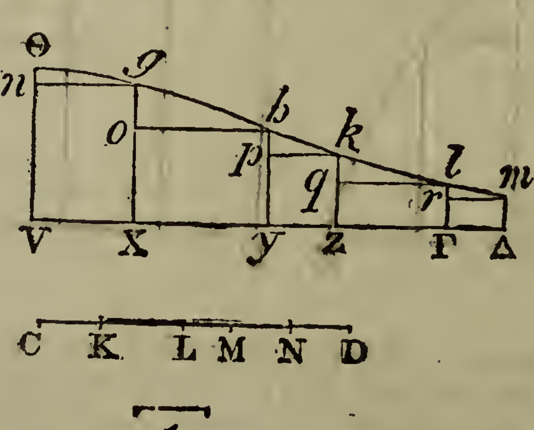


Cor. H. 2. Quòd si recta GB non ad perpendiculum, sed cum datâ quâvis ad axem communem AF inclinatione, educatur, idem obtinebit.

Cor. H. 3. Si verò curvæ duæ, ABC, ADE, eo modo ad se mutuò sint affectæ, ut rectæ, GB, GD, à puncto aliquo G in axe communi, AF, ordinatim eductæ, datis quidem sed diversis ad axem illam inclinationibus, datam inter se rationem gerant; quæ eadem obtineat, à quocunque demum axis puncto ordinatæ illæ educantur; vel sic etiam areis ABCF, ADEF, data quædam ratio intercedet; ea nimirum, quam rectæ à punctis B, D in axem AF ad perpendiculum demissæ inter se habent.







(c) Sint duæ quantitates AB, CD cujuscunque generis quæ in partes quotcunque dividantur, AE, EF, FG, GH, HB; CK, KL, LM, MN, ND; quæ partes totidem in hâc et in illâ sint. Si partes illæ, numero earum infinitè aucto, magnitudinibus verò singularum infinitè imminutis, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque ordine ad cæteras, hoc est si AE ad CK, EF ad KL, FG ad LM, GH ad MN, HB ad ND, datam inter se rationem habeant; hoc si fiat, dicit Newtonus inter quantitates ipsas, AB, CD, eandem rationem datam obtinere, quæ partium evanescentium communis est.

DEMONSTRATIO AD MENTEM NEWTONI.

Exponatur recta OP datæ cujuslibet longitudinis; et in eâdem rectâ, infinitè productâ, capiatur PQ, ad quam OP rationem habeat eandem ac AE ad EF; et QR, ad quam PQ, rationem habeat quam

partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem (c). Primis Ultimisque.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quàm rectilinea; & areæ sunt in duplicatâ ratione laterum.

EF ad FG; et RS, ad quam QR rationem habeat quam FG ad GH; et ST, ad quam RS rationem habeat quam GH ad HB. Rectam OT ad perpendiculum insistat *oa* datæ cujuslibet longitudinis, et rectangulum *oaf*T compleatur; cujus cum lateribus parallelæ ducantur P*b*, Q*c*, R*d*, S*e*. Exponatur alia recta VΔ rectæ OT æqualis, in quâ capiantur partes, VX, X*y*, *y*Z, ZΓ, ΓΔ, partibus OP, PQ, QR, RS, ST, ordine æquales. Rectam VΔ ad puncta V, X, *y*, Z, Γ, Δ, rectæ V*n*, X*g*, *yh*, Z*k*, Γ*l*, Δ*m*, ad perpendiculum insistant.

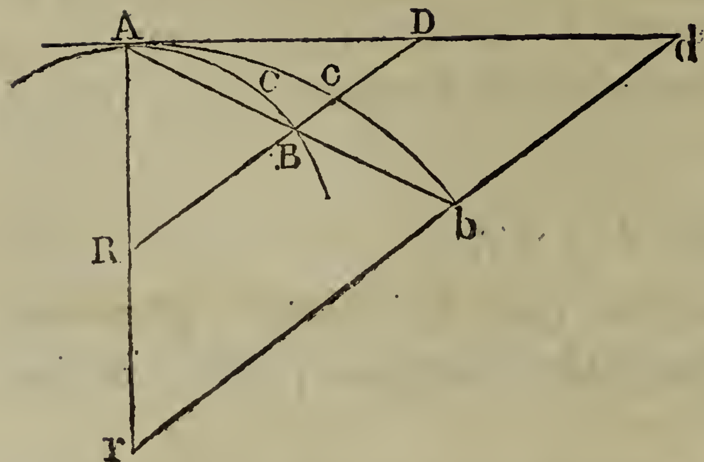
Capiantur X*g*, *yh*, Z*k*, Γ*l*, Δ*m*, ad quas *oa* rationes habeat quas AE ad CK, EF ad KL, FG ad LM, GH ad MN, HB ad ND; et rectangula V*g*, X*h*, *yk*, Z*l*, Γ*m* compleantur. Jam cùm OP sit ad PQ ut AE ad EF, componendo erit OQ : PQ = AF : FE. Sed PQ : QR = EF : FG. Id enim factum est. Igitur ex æquo OQ : QR = AF : FG, et componendo, OR : QR = AG : GF. Sed, QR : RS = FG : GH. Igitur ex æquo, OR : RS = AG : GH, et componendo OS : SR = AH : HG. Sed RS : ST = GH : HB. Igitur ex æquo OS : ST = AH : HB, et componendo OT : TS = AB : BH. Atque hinc colligitur rectam OT esse ad partes suas, OP, PQ, QR, RS, ST, sicut quantitas AB ad partes suas, AE, EF, FG, GH, HB, ordine sumendas. Et cùm parallelogramma ejusdem altitudinis sint inter se ut bases, rectangula *ob*, P*c*, Q*d*, R*e*, S*f* erunt inter se et ad rectangulum totum *of*, ut AE, EF, FG, GH, HB, partes quantitatis AB, inter se et ad totam. Atqui propter rectas VX, OP æquales, rectangula V*g*, *ob*, sunt inter se ut rectæ X*g*, P*b*; et X*g*, P*b*, sunt ut CK, AE; ita enim factæ sunt. Rectangulum igitur V*g* ad *ob* ut CK ad AE. Et ex modò ostensis, *ob* : *of* = AE : AB. Quare ex æquo erit V*g*, *of* ut CK ad AB. Rursum propter æquales X*y*, PQ, erit rectangulum *yo* ad Q*b* ut *yh* ad P*b*, id est ut KL ad EF. Et ex modò ostensis, Q*b* : *of* = EF : AB. Quare ex æquo, *yo* : *of* = KL : AB. Sed jam ostensum est X*n* esse ad P*a* ut CK ad AB. Ergo duo rectangula *yo*, X*n* simul sumpta erunt ad rectangulum *of*, ut CK, KL simul sumptæ ad AB (per. 24. 5. Elem.) Rursùm propter æquales *y*Z, QR, rectangulum Z*p* : R*c* = Z*k* : Q*c* = LM : FG. Et ex modò ostensis, RC : *of* = FG : AB. Quare ex æquo Z*p* : *of* = LM : AB. Tria igitur rectangula simul sumpta Z*p*, *yo*, X*n* erunt ad *of*, ut tres ML, LK, CK simul sumptæ, hoc est ut CL ad AB (per 24. 5. Elem.) Atque eandem eundo argumentationis viam eò tandem pervenietur, esse omnia rectangula Δ*r*, Γ*q*, Z*p*, *yo*, X*n* simul sumpta ad rectangulum *of* sicut quantitas CD ad quantitatem AB. Atque hæc ita erunt quotcunque fuerint rectangula illa, et quantacunque fuerit cujusque magnitudo. Quare et figura Δ*v*Θ*m*, cui rectangulorum illorum omnium summa, numero eorum infinitè aucto, magnitudinibus singulorum infinitè imminutis, ultimò fit æqualis, hæc etiam erit ad rectangulum *of* sicut CD ad AB.

Sit jam ratio illa data, quæ ultima est evanescentium partium quantitatis AB ad partes quantitatis CD simul evanescentes, ea quam recta S habet ad rectam *t*.

Jam numero partium quantitatum, AB, CD, infinitè crescente, magnitudinibus singularum infinitè decrescentibus, rectangulorum *ob*, P*c*, Q*d*, R*e*, S*f* necnon V*g*, X*h*, *yk*, Z*l*, Γ*m* numerum infinitè pariter augeri, magnitudines singularum infinitè pariter diminui, ex constructione et è demonstratis satis patet. Cùm vero recta *oa* semper sit ad rectam X*g* ut AE ad CK (id enim posuimus) et cùm AE fiat ultimò ad CK, ut S ad *t*, erit *oa* ad X*g* ultimò ut S ad *t*. Sed ut *oa* ad X*g* ita semper erit rectangulum *ob* ad rectangulum V*g*, propter OP, VX semper æquales. Ergo *ob* ad V*g* ultimò ut S ad *t*. Ac simili ratione rectangula reliqua P*c*, Q*d*, R*e*, S*f* ad reliqua X*h*, *yk*, Z*l*, Γ*m*, ordine sumenda, fient ultimò ut S ad *t*. Ergo ut S ad *t* ita erit rectangulum *of* ad figuram Θ*v*Δ*m* (per Lemma). Sed ex suprà ostensis rectangulum *of* ad figuram Θ*v*Δ*m* ut AB ad CD. Habet igitur AB ad CD rationem eam quam S ad *t*; hoc est, datam illam, quæ partium evanescentium ultimò sit communis. Q. E. D.

De Rationibus

LEMMA VI.



Si arcus quilibet positione datus, ACB, *subtendatur chordâ* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ* (d), *tangatur à rectâ utrinque productâ* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant, & coeant; dico, quòd angulus* BAD, *sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum, & ultimò evanescet.*

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem; & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

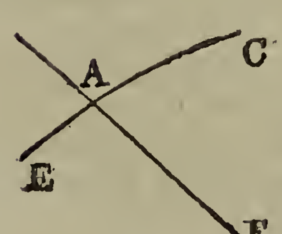
LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quòd ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB & AD ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti BD parallela agatur *bd*. Sitque arcus A*cb* semper similis arcui ACB. Et punctis A, B coeuntibus, angulus *d*A*b*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ A*b*, A*d*, & arcus intermedius A*cb* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB, AD, & arcus intermedius ACB evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. E. D.

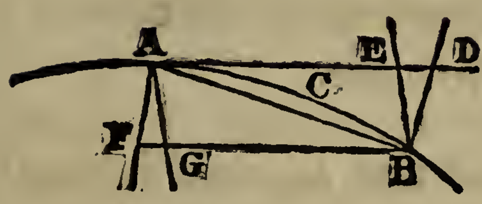
Corol. 1. Unde si per B ducatur tangenti parallela BF, rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuò secans in F, hæc BF ultimò

DEFINITIO.



(d) Curvæ cujuspiam, EAC, curvatura in puncto quovis, A, *continua* dicitur, si recta quævis, FA, quæ curvæ in puncto illo occurrat, angulos hinc inde faciat, FAE, FAC, quorum simul sumptorum summa duos rectos propiùs quàm pro datâ quâvis differentiâ accedat.

(e) Si



ultimò ad arcum evanefcentem ACB rationem habebit æqualitatis; eo quòd completo parallelogrammo AFDB rationem femper habet æqualitatis ad AD. Primis Ultimisque.

Corol. 2. Et fi per B & A ducantur plures rectæ BE, BD, AF, AG, fecantes tangentem AD & ipfius paralellam BF; ratio ultima abfciffarum omnium AD, AE, BF, BG, chordæque & arcûs AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro fe invicem ufurpari poffunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR (c) *cum arcu* ACB, *chordâ* AB, *&* *tangente* AD, *triangula tria* RAB, RACB, RAD *conftituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico, quòd ultima forma triangulorum evanefcentium eft fimilitudinis, & ultima ratio æqualitatis. (Vide fig. Lemma* VI.)

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur femper AB, AD, AR ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipfique RD parallela agi *rbd*, & arcui ACB fimilis femper fit arcus A*cb*. Et coeuntibus punctis A, B, angulus *b*A*d* evanefcet, & propterea triangula tria femper finita *r*A*b*, *r*A*cb*, *r*A*d* coincident, funtque eo nomine fimilia & æqualia. Unde & hifce femper fimilia & proportionalia RAB, RACB, RAD fient ultimò fibi invicem fimilia & æqualia. Q. E. D.

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro fe invicem ufurpari poffunt.

LEMMA IX.

Si recta AE *&* *curva* ABC *pofitione datæ fe mutuò fecent in angulo dato,* A, *&* *ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C *fimul*

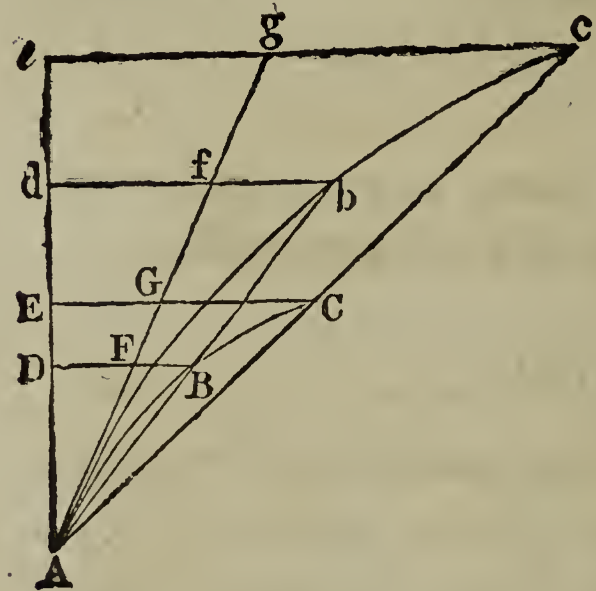
(c) Intellige rectam AR pofitione datam; rectam verò BR eâ lege mobilem, ut cum aliâ aliquâ, pofitione datâ, femper ea parallela maneat.

4 *accedant*

De Rationibus

accedant ad punctum A: *dico, quòd areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimò ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur ſemper AD produci ad puncta longinqua *d* & *e*; ut ſint A*d*, A*e* ipſis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis



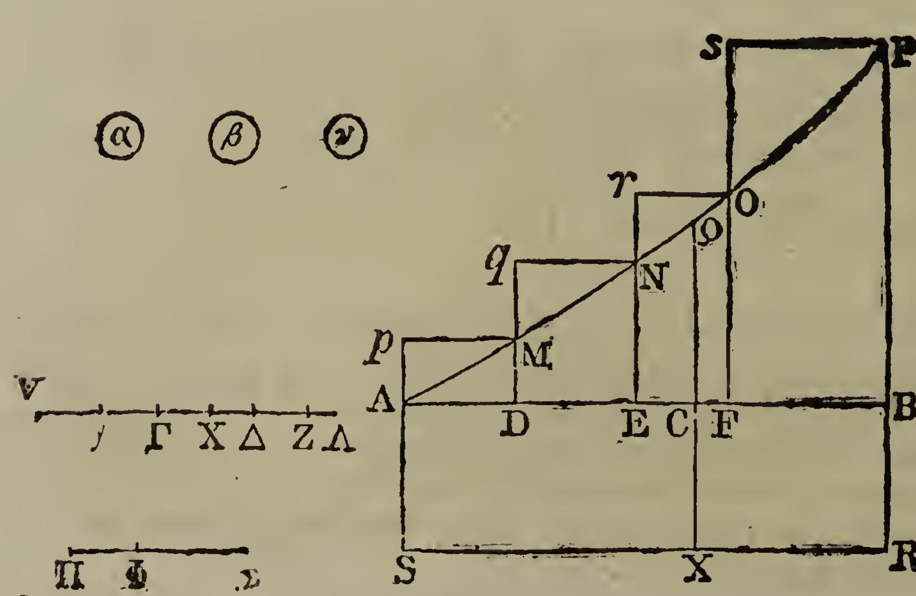
DB, EC parallelæ, quæ occurrant ipſis AB, AC productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva A*bc* ipſi ABC ſimilis, tum recta A*g*, quæ tangat curvam utramque in A, & ſecet ordinatam applicatas DB, EC, *db*, *ec* in F, G, *f*, *g*. Tum, manente longitudine A*e*, coeant puncta B, C cum puncta A; &, angulo *c*A*g* evaneſcente, coincident areæ curvilineæ A*bd*, A*ce*

(f) Ideoque (per Lemma 5.) erunt, &c.

Hæc ſic emendarem, " ideòque erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*. Sed his areis proportionales ſemper ſunt areæ ABD, ACE, (per Lemma 5.) et his lateribus latera AD, AE. Ergo &c."

Nimirum areas curvilineares A*bd*, A*ce*, cum rectilinearibus A*fd*, A*ge* ultimò congruentes, habere inter ſe ultimò rationem laterum A*d*, A*e* duplicatam ſatis patet ex ſimilitudine triangulorum A*fd*, A*ge*, et ex propoſitione 19 Libri 6 Elementorum Euclidis. Et arearum curvilinearium A*bd*, A*ce*, ABD, ACE conſtans analogia è lemmate quinto ad hunc modum colligenda eſt. Areæ curvilineæ ABD, A*bd* inter ſe ſunt ſimiles (id enim ponitur). Ergo ABD : A*bd* $=$ AD^2 : A*d*^{2} (per Lemma 5.) Simili ratione ACE : A*ce* $=$ AE^2 : A*e*^{2}, (per Lemma 5$^{\text{m}}$.) Sed AD^2 : A*d*^{2} $=$ AE^2 : A*e*^{2}; nimirum cùm rectæ quatuor AD, A*d*, AE, A*e* proportione inter ſe conveniant. Ergo ABD : A*bd* $=$ ACE : A*ce* (per V. 11. El.) Permutando ABD : ACE $=$ A*bd* : A*ce*.

THEOREMA.



(g) Exponatur recta AB datæ cujuſvis longitudinis, quæ in puncto cita dividatur, ut pars AC ſit ad totam AB, ut tempus quoddam *t* ad tempus majus T. Jam dividatur recta AB in partes quotvis, AD, DE, EF, FB; quæ ſint inter ſe et ad totam AB ut temporis T portiones totidem, ordine ſumendæ, inter ſe & ad totum tempus T. Rectam AB in punctis D, E, C, F, B, rectæ, DM, EN, FO, BP, ad perpendiculum inſiſtant; capianturque DM, EN, FO, BP, quæ ſint inter ſe ſicut velocitates, quas corpus quodpiam

ACe cum rectilineis A*fd*, A*ge*; ideoque (per Lemma v.) erunt in duplicatâ ratione laterum A*d*, A*e*: ſed his areis proportionales ſemper ſunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE (f). Ergo & areæ ABD, ACE ſunt ultimò in duplicatâ ratione laterum AD, AE. Q. E. D. PRIMIS ULTIMISQUE.

LEMMA X.

Spatia, quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ deſcribit, ſive vis illa determinata & immutabilis ſit, ſive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, ſunt ipſo motûs initio in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas AD, AE, & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; & ſpatia his velocitatibus deſcripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis deſcriptæ (g), hoc eſt, ipſo motûs initio

quodpiam α, urgente vi quâpiam finitâ utcunque mutabili, temporibus AD, AE, AF, AB adeptum fuerit. Idque ſemper fieri intelligatur, dum partium AD, DE, EF, FB numerus infinitè augeatur magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus: ductâque curvâ, quæ per omnium perpendiculorum puncta extrema A, M, N, O, P, tranſeat, et a puncto C eductâ ad perpendiculum rectâ CQ, quæ curvæ in Q occurrat, ſpatia quæ corpus α urgente vi illâ temporibus t, T tranſiverit, arearum ACQ, ABP inter ſe proportionem gerent.

Sint enim VX, VZ ſpatia, quæ corpus α urgente vi illâ temporibus t, T tranſivit. Rectam AB in puncto A recta datæ longitudinis, AS, ad perpendiculum inſiſtat. Puta corpus quoddam, β, toto tempore T velocitate æquabili latum, quæ ad velocitatem rectâ BP expoſitam datæ rectæ AS ad rectam BP rationem habeat; puta, inquam, corpus β, hâc velocitate latum, tempore T ſpatium ΠΣ tranſiiſſe. Capiantur rectæ, vy, $y\Gamma$, ΓΔ, ΔΛ, æquales ſpatiis quæ corpus quodlibet tertium ν temporibus AD, DE, EF, FB, velocitatibus DM, EN, FO, BP latum, deſcriberet. Hoc eſt corpori ν, in loco V quieſcenti, puta ictu quodam ſubito velocitatem omnem DM ſimul imprimi; quâ corpus illud ν totum tempus AD curſu recto vΛ perſeverans ſpatium vy abſolvat. Sub fine autem temporis AD, ſimul ac corpus in locum y pervenerit, puta velocitatem primùm impreſſam, DM, novo ictu accedente, in velocitatem EN ſubitò mutari. Et corpus novâ hâc velocitate totum tempus DE curſu recto perſeverans ſpatium $y\Gamma$ conficiat. Et ſub fine temporis DE, ſimul ac corpus in locum Γ pervenerit, puta velocitatem EN novo rurſum ictu in aliam, FO, mutari. Atque idem ſemper fieri intelligatur; nimirum ut ſub fine temporis cujuſque ex illis AD, DE, EF, FB, quæ tempus totum AB, ſive T, conſtituunt, corporis ν velocitas in illam ſubitò mutetur, quam corpus α ſub fine temporis proximè ſequentis acquiſierit: et velocitatibus hiſce diverſis, temporibus illis AD, DE, EF, FB ordine ſuccedentibus, corpus ν ſpatia vy, $y\Gamma$, ΓΔ, ΔΛ ordine conficiat; donec, conſumpto tandem toto tempore AB, in locum Λ pervenerit. Compleantur rectangula AR, Bs, Fr, Eq, Dp. Jam ſpatium vy habet ad ſpatium ΠΣ rationem compoſitam è rationibus temporis ad tempus et velocitatis ad velocitatem; hoc eſt rectæ AD ad AB, et DM ad AS, ſive rationem rectanguli AM ad rectangulum BS. Ac ſimili ratione ſpatium $y\Gamma$ erit ad ſpatium ΠΣ ut rectangulum DN ad rectangulum BS. Ergo ſpatia vy, $y\Gamma$ ſimul ſumpta erunt ad ſpatium ΠΣ ut rectangula AM, DN ſimul ſumpta ad rectangulum BS. (per 24. 5. Elem.) Rurſum ſpatium ΓΔ ad ſpatium ΠΣ ut rectangulum EO ad rectangulum BS. Ergo tria ſpatia vy, $y\Gamma$, ΓΔ, ſive ſpatium vΔ, ad ΠΣ, ut tria rectangula AM, DN, EO ſimul ſumpta ad rectangulum BS. Atque eâdem argumentationis viâ eò tandem perventum erit, eſſe omnia rectangula AM, DN, EO, FP, ſimul ſumpta ad rectangulum

De Rationibus

initio (per Lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. Q. E. D.

Corol. 1. Et hinc facilè colligitur, quòd corporum, ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus deſcribentium, errores, qui viribus quibuſvis æqualibus ad corpora ſimiliter applicatis generantur, & menſurantur per diſtantias corporum à figurarum ſimilium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iiſdem proportionalibus, ſine viribus iſtis, pervenirent, ſunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus, datam aliquam inter ſe ipſas proportionem ſervantibus, ad ſimiles figurarum ſimilium partes ſimiliter applicatis, generantur, ſunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum eſt de ſpatiis quibuſvis quæ corpora urgentibus diverſis viribus deſcribunt. Hæc ſunt, ipſo motûs initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires ſunt ut ſpatia, ipſo motûs initio, deſcripta directè, & quadrata temporum inverſè.

Corol. 5. Et quadrata temporum ſunt ut deſcripta ſpatia directè, & vires inverſè.

SCHOLIUM.

Si quantitates indeterminatæ diverſorum generum conferantur inter ſe, & earum aliqua dicatur eſſe ut eſt alia quævis directè vel inverſè: ſenſus eſt, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum poſteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et ſi earum aliqua dicatur eſſe ut ſunt aliæ duæ vel plures directè vel inverſè:

gulum BS ut ſpatia omnia vy, $y\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ ſimul ſumpta ad ſpatium $\Pi\Sigma$. Hinc, ſi partium AD, DF, EF, FB numerus infinitè augeatur, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus, (ex quo fiet ut ſpatiorum etiam, vy, $y\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ numerus pariter infinitè creſcet, ſingulorum verò magnitudines infinitè diminuentur) ſumma rectangulorum omnium, AM, DN, EO, FP, quæ ultimò ſcilicet evaneſcentium fit, hoc eſt (per Lemma 3.) area AEP, erit ad rectangulum BS, ut ultima ſpatiorum omnium vy, $y\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ evaneſcentium ſumma ad ſpatium $\Pi\Sigma$.

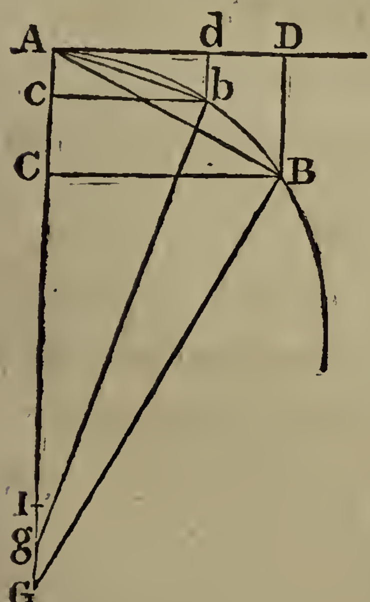
Sed ſumma ultima ſpatiorum omnium vy, $y\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ evaneſcentium, ſive longitudo rectæ $v\Lambda$ quæ ultimò fit, rectæ vz æqualis eſt. Numero enim partium, ſive temporum, AD, DE, EF, FB, infinitè creſcente, æqualis erit ultimò velocitas, quæ, tempore quovis finito, corpori γ acceſſerit, ei quæ eodem tempore corpori α. Si igitur recta $v\Lambda$ non ſit ultimò æqualis rectæ vz, ſint illæ rectæ ultimò inæquales. Corpus igitur α, quod urgente vi finitâ ſecundum legem quandam mutabili, motu à puncto v incepto, curſu recto tempore T perſeveravit, ſub fine temporis T in locum z devenerit. Et corpus aliud γ, quod urgente eâdem vi finitâ juxta eandem legem mutabili, motu ab

inversè: sensus est, quòd prima augetur vel diminuitur in ratione, quæ componitur ex rationibus, in quibus aliæ, vel aliarum reciprocæ, augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & C directè & D inversè: sensus est, quòd A augetur, vel diminuitur, in eâdem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$; hoc est, quòd A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ. Primis Ultimisque.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactûs, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs habentibus, est ultimò in ratione duplicatâ subtensæ arcûs contermini.

Cas. 1. Sit arcus ille AB, tangens ejus AD, subtensa anguli contactûs ad tangentem perpendicularis BD, subtensa arcûs AB. Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG, BG, occurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, sitque J intersectio linearum BG, AG ultimò facta, ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est, quòd distantia GJ minor esse potest quàm assignata quævis. Est autem (ex naturâ circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB *quad.* æquale AG × BD, & Ab *quad.* æquale Ag × bd; ideoque ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest, ut ratio AG ad Ag minùs differat à ratione æqualitatis, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ; ideoque ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minùs



ab eodem puncto V incepto, eodem cursu recto eodem tempore perseveravit, sub ejusdem temporis fine in alium locum A devenerit. Quod est absurdum. Non igitur sunt inæquales recta VZ et spatiorum Vy, $y\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA summa quæ ultima evanescentium fit. Æquales igitur. Ergo area ABP erit ad rectangulum BS ut VZ ad $\Pi\Sigma$.

Jam verò recta CQ producta rectæ SR in X occurrat, et capiatur $\Pi\Phi$ æqualis spatio, quod corpus velocitate æquabili AS latum, tempore t, seu AC, absolveret. Atque eodem argumento quo hactenus usi sumus, ostendere licet aream ACQ esse ad rectangulum CS ut spatium VX ad spatium $\Pi\Phi$. Invertendo CS : ACQ = $\Pi\Phi$: VX.

Cùm igitur sit ABP : BS = VZ : $\Pi\Sigma$
et BS : CS = BA : AC = T : t = $\Pi\Sigma$: $\Pi\Phi$
et CS : ACQ = $\Pi\Phi$: VX,
Erit, ex æquo, ABP : ACQ = VZ : VX. Q. E. D.

De Ratio-nibus

differat à ratione BD ad *bd* quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad A*b* *quad.* eadem cum ratione ultimâ BD ad *bd*. Q. E. D.

Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad *bd* quæ priùs, ideoque eadem ac AB *quad.* ad A*b* *quad.* Q. E. D.

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli D, *d*, communi lege constituti, ad æqualitatem semper vergent; & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimò æquales erunt, per Lem. 1; & propterea lineæ BD, *bd* sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. Q. E. D.

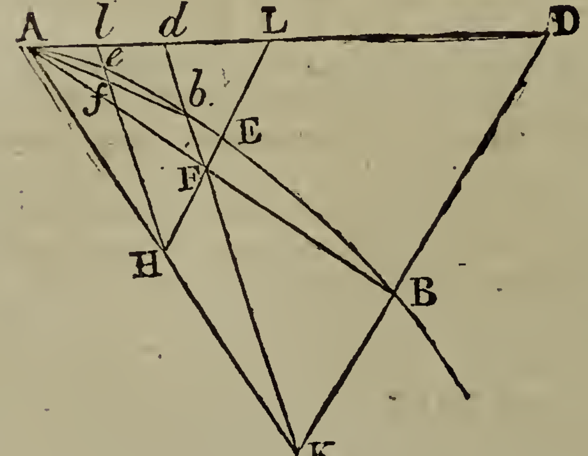
Corol. 1. Unde cùm tangentes AD, A*d*, arcus AB, A*b*, & eorum sinus BC, *bc* fiant ultimò chordis AB, A*b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimò ut subtensæ BD, *bd*.

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimò ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant, & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ BD, *bd* (h).

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, A*db* sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD, A*d*, inque sesquiplicatâ laterum DB, *db*; utpote in compositâ ratione laterum AD & DB, A*d* & *db* existentia.

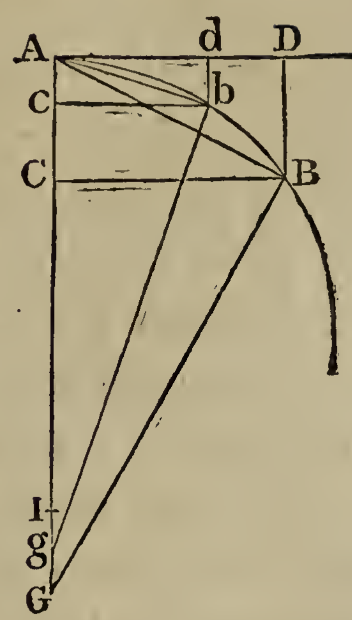
Sic



(h) Sagittæ, EF, *ef*, chordas, AE, A*b*, medias dividentes, in dato puncto H concurrant. Jungatur AH, et in AH productâ capiatur HK = AH; junctæque K*b*, KB et productæ contingenti AD in punctis *d*, D occurrant. Eidem contingenti occurrant sagittæ, *fe*, FE, productæ in punctis *l*, L. Ex constructione AH : AK = AF : AE. Sunt igitur HF, KE, sive FL, BD inter se parallelæ. Coeuntibus igitur punctis E, A ratio ultima evanescentis EL ad ED evanescentem, quadrati ex evanescente AE ad quadratum ex evanescente AB ultima erit (per Lemma). Eadem igitur quæ est quadrati ex AF ad quadratum ex AB, sive unitatis ad quaternarium: fiunt enim AF, AE ultimò æquales. Sed propter rectas BD, FL parallelas, erit BD ad

Primis Ultimisque.

Sic & triangula ABC, Abc funt ultimò in triplicatâ ratione laterum BC, bc. Rationem verò fefquiplicatam voco triplicatæ fubduplicatam, quæ nempe ex fimplici & fubduplicatâ componitur.



Corol. 5. Et quoniam DB, db funt ultimò parallelæ & in duplicatâ ratione ipfarum AD, Ad: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, Adb (ex naturâ parabolæ) (i) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, Adb; & fegmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc fegmenta erunt in duplicatâ ratione tum tangentium AD, Ad, tum chordarum & arcuum AB, Ab.

Scholium.

Cæterùm in his omnibus fupponimus angulum contactûs nec infinitè majorem effe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus fuis, nec iifdem infinitè minorem; hoc eft, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam effe, nec infinitè magnam; feu intervallum AJ finitæ effe magnitudinis. Capi enim poteft DB ut AD^3: quo in cafu circulus nullus, per punctum A, inter tangentem AD & curvam AB, duci poteft, proindeque angulus contactûs erit infinitè minor circularibus. Et fimili argumento fi fiat DB fucceffivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur feries angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet pofterior eft infinitè minor priore. Et fi fiat DB fucceffivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia feries infinita angulorum contactûs, quorum primus eft ejufdem generis cum circularibus, fecundus infinitè major, & quilibet pofterior infi-

ad FL, ut AB ad AF hoc eft ut quaternarius ad binarium. Quare ex æquo ratio ultima rectæ EL ad FL unitatis erit ad binarium. Ergo FE, EL fiunt ultimò æquales, ac proinde EF erit ultimò ad ED ficut unitas ad quaternarium. Simili ratione oftendetur effe cf ad bd ultimò ficut unitas ad quaternarium. Quare ultimò EF : BD = ef : bd; et permutando, ultimò, EF : ef = BD : bd. Sed ED, bd ad datum punctum K vergunt. Quare (per Lemma II.) punctis, B, b, in A coeuntibus, quadrata ex fubtenfis evanefcentibus AB, Ab funt ultimò inter fe ficut evanefcentes BD, bd: hoc eft, ficut fagittæ EF, ef evanefcentes. Q. E. D.

(i) *Ex natura parabolæ.* Etenim cùm BD, bd evanefcentes rationem inter fe ultimam habeant evanefcentium AD, Ad duplicatam, arcus evanefcens AB, cujufcunque demum generis curva AB fuerit, ab evanefcente arcu parabolico ultimò non differt.

De Rationibus

nitè major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series, utrinque in infinitum pergens, angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinitè major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum, ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem (k).

Quæ de curvis lineis, deque superficiebus comprehensis, demonstrata sunt, facilè applicantur ad solidorum superficies curvas, & contenta. Præmisi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minùs geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes, quâ potui brevitate, præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutiùs utemur. Proinde in sequentibus, siquando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quòd quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æquè contendi posset, nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit lo-

(k) Vide Keil. Introduct. ad Veram Physicam. Lect. 4.

cum ultimum & motus ceſſat, neque poſtea, ſed tunc cùm attingit; id eſt, illam ipſam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum, & quâcum motus ceſſat. Et ſimiliter per ultimam rationem quantitatum evaneſcentium, intelligendam eſſe rationem quantitatum, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed quâcum evaneſcunt. Pariter & ratio prima naſcentium eſt ratio quâcum naſcuntur. Et ſumma prima & ultima eſt quâcum eſſe (vel augeri aut minui) incipiunt & ceſſant. Extat limes, quem velocitas in fine motûs attingere poteſt, non autem tranſgredi. Hæc eſt velocitas ultima. Et par eſt ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & ceſſantium. Cúmque hic limes ſit certus & definitus, problema eſt verè geometricum, eundem determinare. Geometrica verò omnia, in aliis geometricis determinandis ac demonſtrandis, legitimè uſurpantur.

PRIMIS ULTIMISQUE.

Contendi etiam poteſt, quòd ſi dentur ultimæ quantitatum evaneſcentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & ſic quantitas omnis conſtabit ex indiviſibilibus, contrà quàm *Euclides* de incommenſurabilibus, in libro decimo elementorum, demonſtravit. Verùm hæc objectio falſæ innititur hypotheſi. Ultimæ rationes illæ quibuſcum quantitates evaneſcunt, reverâ non ſunt rationes quantitatum ultimarum, ſed limites, ad quos quantitatum, ſine limite decreſcentium, rationes ſemper appropinquant; & quas propiùs aſſequi poſſunt, quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò tranſgredi; neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data eſt differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis; nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ, ſeu maximæ, quarum iſta eſt ratio. In ſequentibus igitur, ſiquando, facili rerum conceptui conſulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evaneſcentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, ſed cogita ſemper diminuendas ſine limite.

DE ANALYSI

PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM

INFINITAS.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

DE

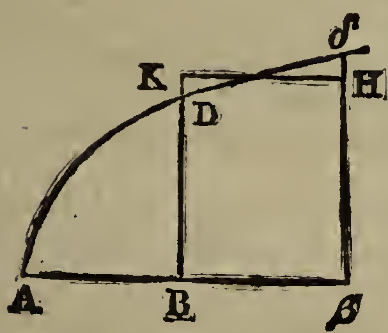
DE ANALYSI

PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

METHODUM generalem, quam, de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensurandâ, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam, potiùs quàm accuratè demonstratam, habes.

CAPUT PRIMUM.

Caput Primum.



BASI AB Curvæ alicujus AD, sit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

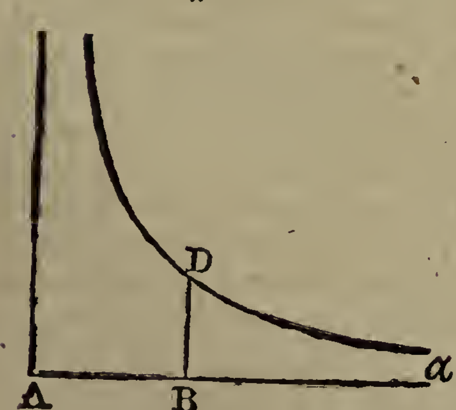
Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ* ABD.

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 \; (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = ABD$.
2. Si $4\sqrt{x} \; (= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} \; (= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3} = ABD$.
3. Si $\sqrt[3]{x^5} \; (= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} \; (= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) = ABD$.
4. Si $\frac{1}{x^2} \; (= x^{-2}) = y$; id est, si $a = 1 = n$, & $m = -2$;



Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}} =) \; -x^{-1} \; (= -\frac{1}{x}) = \alpha BD$, infinitè versus α protensæ; quam Calculus ponit negativam, propterea quòd jacet ex alterâ parte lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}} (= x^{-\frac{3}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{-\sqrt{x}} = BD\alpha$.
6. Si $\frac{1}{x} \; (= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ; qualis est Area Hyperbolæ ex utrâque parte lineæ BD.

Caput Secundum.

CAPUT SECUNDUM.

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipsius y *ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis, quæ à singulis Terminis emanant.* ([a])

Exempla

Regulæ Primæ

([a]) Duabus hisce regulis, quæ ex Problemate Secundo Quadraturæ Curvarum facilè sunt deducendæ, omnis ferè Arithmetica Infinitorum Wallisii summatim comprehensa est. Ac Primam quidem Wallisius ipse allegavit; Arithmet. inf. prop. 64 & 102; Secundam verò, si minùs verbis, saltem exemplis patefecit. Demonstrationem prioris syntheticam, simplicitate et elegantiâ planè admirabilem, haud ingratum certè Geometris fecero, si è Fermatio apponam.

" Unico, quod notissimum est, Proportionis Geometricæ attributo tota hæc methodus innititur.

" Theorema hoc est. *Datâ quâvis proportione geometricâ, cujus termini decrescant in infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium ad minorem terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.*

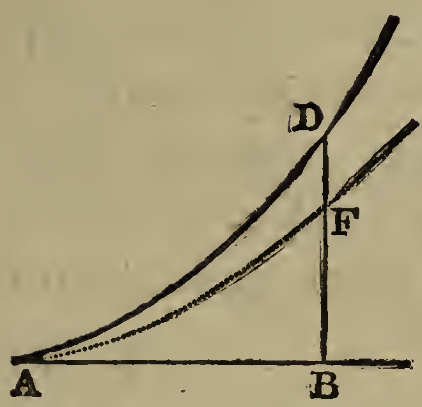
" Hoc posito, proponantur primò HYPERBOLÆ quadrandæ. Exponatur si placet hyperbola, cujus ea sit proprietas, ut sit semper ut quadratum rectæ HA ad quadratum rectæ AG ita recta GE ad rectam HI; et ut quadratum OA ad quadratum AH ita recta HI ad rectam ON. Aio spatium infinitum, cujus basis GE, & curva ES ex uno latere, ex alio vero asymptotos infinita GOR, æquari spatio rectilineo dato. Fingantur termini progressionis Geometricæ in infinitum extendendæ, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, in infinitum: et ad se per approximationem tantum accedant, quantum satis sit, ut juxta methodum Archimedeam parallelogrammum rectilineum GE × GH, quadrilineo mixto GHIE adæquetur. Item ut priora ex intervallis rectis proportionalium, GH, HO, OM, & similia, sint ferè inter se æqualia; ut commodè per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedea demonstrandi ratio institui possit: quod semel monuisse sufficiat.

" His positis, cùm sit $AG:AH = AH:AO = AO:AM$, erit pariter ut AG ad AH ita intervallum GH ad HO, et ita intervallum HO ad OM, &c. Parallelogrammum autem EG × GH erit ad parallelogrammum HI × HO, ut parallelogrammum HI × HO ad parallelogrammum NO × OM. Cùm enim ratio parallelogrammi GE × GH ad HI × HO componatur ex ratione rectæ GE ad rectam HI, et ex ratione rectæ GH ad HO; sit autem $GH:HO = AG:AH$, ut præmonuimus: ergo, ratio parallelogrammi GE × GH ad parallelogrammum HI × HO componitur ex ratione GE ad HI, et ex ratione AG ad AH. Sed $GE:HI = AH^2:AG^2$ (ex hyp.) et $AH^2:AG^2 = AO:AG$, propter proportionales. Ergo ratio parallelogrammi GE × GH ad HI × HO componitur ex ratione AO ad AG et AG ad AH. Sed ratio AO ad AH componittur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum GE × GH ad parallelogrammum HI × HO ut AO ad AH, sive ut AH ad AG. Similiter probabitur parallelogrammum HI × HO esse ad parallelogrammum NO × OM ut AM ad AO, hoc est ut AH ad AG. Ergo parallelogramma EG × GH, HI × HO, NO × OM, &c in infinitum sumpta erunt continuè proportionalia, in ratione rectæ HA ad GA. Est igitur, ex theoremate hujus methodi constitutivo, ut GH, differentia terminorum, ad minorem terminum GA, ita primum parallelogrammum EG × GH ad reliqua in infinitum parallelogramma; hoc est, ex adæquatione Archimedeâ, ad figuram sub HI asymptoto HR, et curvâ IND, in infinitum extendendâ, contentam. Sed ut HG ad GA ita, sumptâ communi latitudine rectâ GE, parallelogrammum GE × GH ad parallelogrammum GE × GA. Ergo parallelogrammum GE × GA, quod est spatium rectilineum datum, adæquatur figuræ prædictæ. Cui si addas parallelogrammum GE × GH, quod propter minutissimos τεμαχισμὸς evanescit, et abit in nihilum, superest verissimum et Archimedeâ licet prolixiore demonstratione facillimè firmandum, parallelogrammum AE, in hâc hyperbolæ specie, æquari figuræ sub base GE, asymptoto GR, curvâ ED, in infinitum producendâ, contentæ. Nec operosum ad omnes omninò hujusmodi hyperbolas, unâ demptâ, inventionem extendere.

" Sit

Exempla Prima.

QUADRATURA COMPOSITARUM.



1. Si $x^2+x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD. Etenim ſi ſemper ſit $x^2=$ BF, et $x^{\frac{3}{2}}=$ FD, erit, ex præcedente Regulâ, $\frac{1}{3}x^3=$ ſuperficiei AFB deſcriptæ per lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ AFD deſcriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ toti ABD.

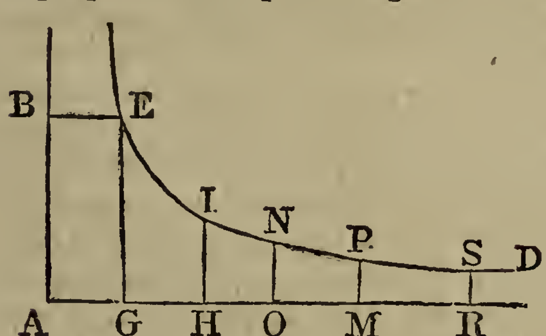
2. Sic ſi $x^2-x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ ABD.

3. Et ſi $3x-2x^2+x^3-5x^4=y$; Erit $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-x^5=$ ABD.

Exempla

DEMONSTRATIO FERMATIANA.

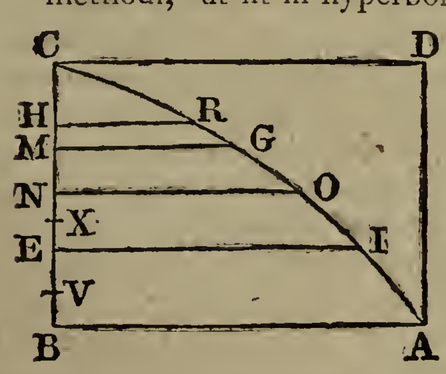
" Sit ea alterius, ſi placet, hyperbolæ proprietas, ut ſit GE ad HI ut cubus rectæ HA ad cubum " rectæ AG, & ſic de reliquis. Expoſitâ ex more infinitâ proportionalium, ut ſuprà, ſerie, fient " proportionalia parallelogramma EH, IO, NM ut ſuprà in infinitum. In hoc verò caſu paral-



" lelogrammum primum erit ad ſecundum, et ſecundum " ad tertium, &c. ut recta AO ad AG, quod ſtatim com- " poſitio proportionum manifeſtabit. Erit igitur ut pa- " rallelogrammum EH ad figuram, ita recta OG ad AG; " & ſumptâ communi latitudine GE, ita parallelogram- " mum OG × GE ad parallelogrammum AG × GE. Eſt " igitur ut parallelogrammum OG × GE ad parallelogram- " mum AG × GE, ita parallelogrammum EG × GH ad figu- " ram. Et viciſſim ut parallelogrammum OG × GE, ad " parallelogrammum EG × GH, ita AG × GE ad figuram. Ut autem parallelogrammum OG × GE " ad EG × GH ita OG ad GH, ſive 2 ad 1 ex adæquatione: intervalla enim baſi proxima facta " ſunt ex conſtructione ferè (*ſive ultimò*) æqualia inter ſe. Ergo, in hâc hyperbolâ, parallelogram- " mum EGA, quod eſt æquale ſpatio rectilineo dato, eſt duplum figuræ ſub baſe GE, aſymptoto " GR, et curvâ ESD in infinitum protensâ.

" Similis in quibuſlibet aliis caſibus habebit locum demonſtratio; niſi quòd in primariâ, ſive " Apollonianâ et ſimplici hyperbolâ, deficit eâ ſolâ ratione methodus, quia in hâc parallelo- " gramma, EH, IO, NM ſunt ſemper inter ſe æqualia; atque ideo cùm termini progreſſionis con- " ſtitutivi ſint inter ſe æquales, nulla inter eos eſt differentia, quæ totum in hoc negotio conficit " myſterium.

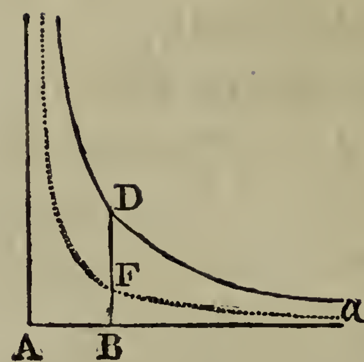
" Eâdem ratione PARABOLÆ omnes omninò quadrantur; nec eſt ulla, quæ ab artificio noſtræ " methodi, ut fit in hyperbolis, poſſit eſſe immunis.



" Sit ſemiparabola primaria AGRE cujus diameter CB, ſemibaſis " AB: ſumptis autem applicatis IE, ON, GM, &c. ſit ſemper ut " quadratum AB ad quadratum IE, ita recta BC, ad CE; et ut " quadratum IE ad quadratum ON ita recta EC ad CN: et ſic in " infinitum. Intelligantur, ex more methodi, rectæ BC, EC, NC, " MC, HC, in infinitum, continuè proportionales. Erunt etiam, ut " ſuperiùs probatum eſt, proportionalia parallelogramma, AE, IN, " OM, GH in infinitum. Ut cognoſcatur ratio parallelogrammi " AE ad parallelogrammum IN, recurrendum ex methodo ad com- " poſitionem proportionum. Componitur autem ratio parallelo- " grammi AE ad parallelogrammum IN ex ratione AB ad IE et ex ratione BE ad EN. Cùm autem " ſit ut AB quadratum ad IE quadratum, ita BC ad CE; ſi inter BC & CE ſumatur media propor- " tionalis CV, item inter EC, & CN, media proportionalis XC, erunt continuè proportionales BC, " VC, EC, XC, NC: et ut BC ad EC ita quadratum BC ad quadratum CV. Sed $BC:EC=AB^2:IE^2$. " Ergo $BC^2:CV^2=AB^2:IE^2$, et $BC:CV=AB:EI$. Ratio igitur parallelogrammi AE ad parallelo- " grammum IN componetur ex ratione BC ad VC, ſive VC ad CE, ſive EC ad CX, et ex ratione " BE ad EN, ſive BC ad CE. Ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus, BC nempe " ad CE, et CE ad CX, eſt eadem quæ ratio BC ad CX. Igitur parallelogrammum AE eſt ad

 " parallelo-

Exempla Secunda.

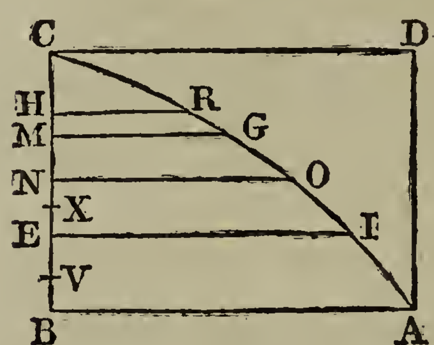


4. Si $x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$. Vel ſi $x^{-2}-x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$.

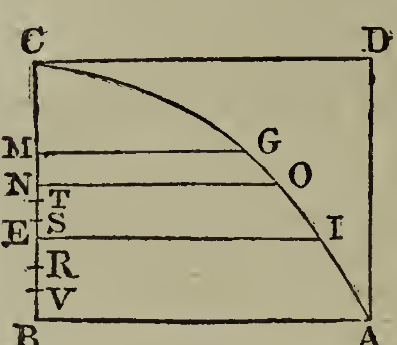
Quarum ſigna ſi mutaveris, habebis Affirmativum valorem ($x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}$) ſuperficiei αBD, modò tota cadat ſupra baſim ABα.

5. Sin

" parallelogrammum IN ut BC ad CX. [*Atque eadem erit ratio parallelogrammi* IN *ad parallelogrammum* OM, *et parallelogrammi* OM *ad parallelogrammum* GH, &c.] Ideoque ex theoremate methodi " conſtitutivo parallelogrammum AE erit ad figuram IRCHE ut recta BX ad rectam XC; ideoque



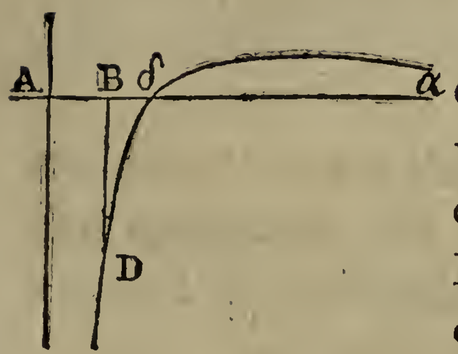
" ut idem parallelogrammum AE ad totam figuram AIGRCB ita " recta BX ad totam diametrum BC. Ut autem recta BX ad totam diametrum BC, ita, ſumptâ communi latitudine AB, parallelogrammum AB × BX ad parallelogrammum AB × BC, ſive " parallelogrammum BD, ductâ AD diametro parallelâ occurrente " tangenti CD in D. Ergo ut parallelogrammum AE ad totam " figuram ſemiparabolicam ARCB, ita parallelogrammum AB × BX " ad parallelogrammum BD. Et viciſſim ut parallelogrammum " AE ad parallelogrammum AB × BX ita, figura ad parallelogrammum BD. Ut autem parallelogrammum AE ad AB × BX, ita, " propter communem latitudinem, recta BE ad BX. Ergo ut BE ad BX ita figura ad parallelogrammum. Eſt autem BE ad BX, propter adæqualitatem, & ſectiones minutiſſimas, quæ " rectas BV, VE, EX, intervalla proportionalium repreſentantes, ferè inter ſe ſupponit æquales, " ut 2 ad 3. Ergo figura ſemiparabolica ARCB ad parallelogrammum BD, ut 2 ad 3.



" Rurſum, ſit curva AICB, cujus baſis AB diameter CB, ejus generis parabola, ut cubus applicatæ AB ſit ad cubum applicatæ IE ut " quadratum rectæ BC ad quadratum rectæ CE, et reliqua ponantur " ut ſuprà. Series nempe proportionalium rectarum BC, CE, CN, " CM, &c. item ſeries proportionalium parallelogrammorum AE, IN, " OM, &c. in infinitum. Inter BC et EC ſumantur duæ mediæ proportionales, CV, CR. Item inter EC & CN ſumantur etiam duæ " mediæ proportionales CS, CT. Conſtat ex conſtructione, cùm ratio " BC ad EC ſit eadem rationi EC ad NC, fore quoque continuè proportionales rectas BC, CV, CR, CE, CS, CT, CN. Eſt autem $AB^3:IE^3=$ " $CB^2:CE^2=CB:NC$ Cùm autem ſint, ut ſuprà probavimus, ſeptem continuè proportionales, BC, " CV, CR, CE, CS, CT, CN, ergo prima, tertia, quinta, ſeptima erunt etiam continuè proportionales: Ideoque erit BC ad RC ut RC ad CS, et ut CS ad CN. Ut igitur prima BC ad quartam " NC ita cubus primæ BC ad cubum ſecundæ RC. Sed ut BC ad NC ita probavimus eſſe cubum AB " ad cubum IE. Ergo $AB^3:IE^3=BC^3:RC^3$, et $AE:IE=BC;RC$. Cùm igitur ratio parallelogrammi " AE ad parallelogrammum IN, componatur ex ratione AB ad IE, et ex ratione BE ad EN, ſive " BC ad EC; eadem parallelogrammorum ratio componetur ex ratione BC ad RC et BC ad EC. " Ut autem BC prima ſeptem proportionalium ad EC quartam, ita RC tertia, ad CT ſextam. " Ergo parallelogrammi AE ad parallelogrammum IN ratio componitur ex ratione BC ad RC et " RC ad TC: hoc eſt parallelogrammum AE eſt ad parallelogrammum IN ut BC ad CT. Parallelogrammum igitur AE, ex prædemonſtratis, eſt ad figuram IGCE ut BT ad CT; ideoque ut " parallelogrammum AE ad totam figuram AICB, ita recta BT ad rectam BC, ſive AB × BT, ad " AB × BC, vel BD. Et viciſſim parallelogrammum AE ad AB × ET, ſive recta BE ad rectam ET, ut " figura AICB ad parallelogrammum BD. Recta autem BT continet quinque intervalla TS, SE, " ER, RV, VB, quæ inter ſe, propter noſtram methodum, cenſentur æqualia. Recta autem BE " continet tria ex iis intervallis, nempe ER, RV, VB. Ergo BE eſt ad BT, ac propterea figura " AICB ad parallelogrammum BD, ut 3 ad 5.

" Canon verò univerſalis inde nullo negotio elicietur. Patet nempe ſemper fore parallelogrammum BD ad figuram AICB ut aggregatum exponentium poteſtatum applicatæ et diametri

" ad



5. Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cùm Curva decuſſat ſuam Baſin inter B et α, ut hîc vides in δ,) iſtâ parte à parte ſuperiori ſubductâ, habebis valorem Differentiæ:(b) Earum verò Summam ſi cupis, quære utramque Superficiem ſeorſim, et adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo. QUADRATURA COMPOSITARUM.

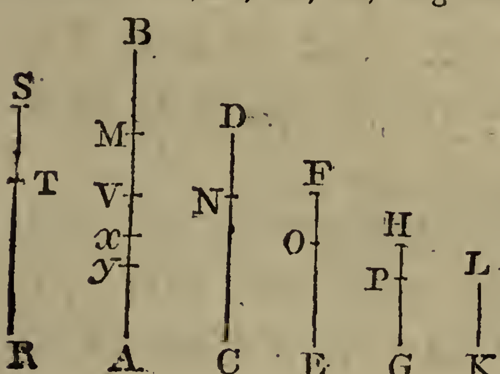
Exempla

" ad exponentem poteſtatis applicatæ. Ut in hoc exemplo videre eſt, in quo poteſtas applicatæ " AB eſt cubus, cujus exponens 3; poteſtas autem diametri eſt quadratum, cujus exponens 2. " Ergo debet eſſe BD ad AICB, ut jam demonſtravimus, & perpetuò conſtabit, ut ſumma 3 & 2, " hoc eſt 5, ad 3, exponentem applicatæ. DEMONSTRATIO FERMATIANA.

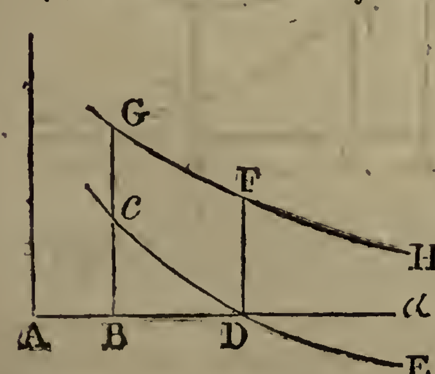
" In hyperbolis autem Canon non minori facilitate invenietur univerſalis. Erit enim in quâ- " cunque hyperbolâ, parallelogrammum BG (vid. fig. p. 259.) ad figuram in infinitum protenſam, " RGED, ut differentia poteſtatum applicatæ & diametri ad exponentem poteſtatis applicatæ." Nempe verbis hîc dicit Fermatius quæ Newtonus, Regulâ ſuâ Primâ, ſymbolis.

Cæterùm Theorema, ex quo deductæ ſunt Fermatii demonſtrationes, ad hunc ferè modum oſtendi poteſt.

Sint AB, CD, EF, GH, KL, magnitudines quarum ſit continua, ſecundum datam duarum RS, RT rationem, proportionis convenientia. Si earum numerus infinitè augeatur, dico maximæ AB ad reliquas omnes ſimul ſumptas proportionem ultimam eam eſſe quam ST habet ad TR. Magnitudini enim AB auferatur AM magnitudini CD æqualis. Et huic CD auferatur CN magnitudini EF æqualis. Et huic EF auferatur EO magnitudini GH æqualis. Et huic GH auferatur GP magnitudini KL æqualis. Tum ſumatur $MV = DN$. $Vx = FO$. $xy = HP$. Jam cùm AB ſit ad CD, vel AM, ut SR ad RT, dividendo erit BM ad CD ut ST ad TR. Simili ratione erit DN ſive MV ad EF ut ST ad TR. Necnon FO, ſive Vx ad GH, et HP, ſive xy, ad KL, ut ST ad TR. Erunt igitur omnes BM, MV, Vx, xy, ſimul ſumptæ, ſive By, ad omnes CD, EF, GH, KL, ſimul ſumptas ut ST ad TR. (per 12. 5. Elem.) Et quotcunque fuerint magnitudines illæ AB, CD, EF, GH, KL proportione inter ſe continuè convenientes, hæc ratio ſummæ differentiarum By ad ſummam omnium à maximâ manet. Quare major erit AB quam ut habeat ad omnium reliquarum ſummam rationem eam quam ST ad TR. Sed eo minùs quidem major quo minor fuerit Ay. Et Ay ultimæ reliquarum KL ſemper eſt æqualis, ut ex conſtructione ſatis patet. Et numero omnium infinitè creſcente, ultima illarum infinitè minuetur, & minor fiet ultimò quâvis datâ. Quare magnitudo Ay minor fit ultimo quâvis datâ. Quare magnitudo By ipſi BA fit ultimò æqualis; & rationes magnitudinis AB ad ſummam omnium CD, EF, GH, KL, ſimul ſumptas, & alterius By ad eandem ſummam fiunt ultimò æquales. (Newton De Rat. prim. & ult. 1.) Sed By ad ſummam illam rationem eam quam ST ad TR ſemper habet, ex ſuprà oſtenſis. Eadem igitur ratio ST ad TR magnitudinis AB ad omnes CD, EF, GH, KL ultima erit. Q. E. D.

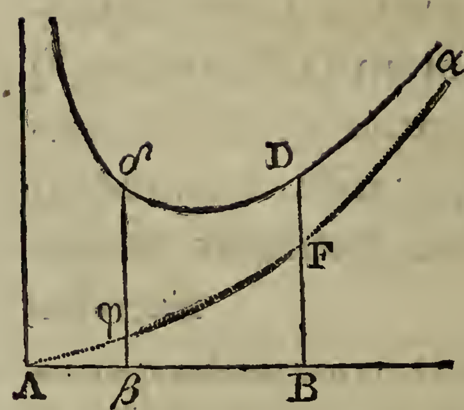


(b) Sit Curva CDE cujus abſciſſa AB, x, ordinatim applicata BC, y. Naturam vero curvæ hæc æquatio definiat, $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$. Talis quidem curva baſin AB ſecabit. Secet in D. Dico quantitatem $2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}$, quæ ex calculo ſecundum regulam Newtonianam peracto pro areâ provenerit, arearum CDB, αDE differentiam eſſe. Per D ducatur DF cum ordinatis (BC) curvæ CDE parallela. Et capiatur $DF = 1 = AD$. In BC, ordinatâ quâvis curvæ CDE, capiatur $BG = x^{-2}$. Et per GF ſcribatur curva GFH quam punctum G perpetuò tangit; ſive cujus ea ſit natura, ut $x^{-2} = z$, deſignante x abſciſſam AB, z ordinatam BC. Jam per regulam primam $-x^{-1} =$ areæ HGBα. Sed cùm $GB = x^{-2}$, et $BC = x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}}$, erit $GC = x^{-\frac{3}{2}}$. Et $-2x^{-\frac{1}{2}} =$ areæ HFGCE



curvis

Exempla Tertia.



6. Si $x^2+x^{-2}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-x^{-1}=$ Superficiei descriptæ. Sed hîc notandum est, quòd dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere lineæ BD.

Nempe, posito $x^2=$ BF, & $x^{-2}=$ FD; Erit $\frac{1}{3}x^3=$ ABF Superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1}=$ DFα Superficiei descriptæ per DF.

7. Et hoc semper accidit, cùm indices $(\frac{m+n}{n})$ rationum Basis x in valore Superficiei quæsitæ, sint variis Signis affecti. In hujusmodi Casibus, pars aliqua BD$\delta\beta$ Superficiei media (quæ sola dari poterit, cùm Superficies sit utrinque infinita) sic invenitur.

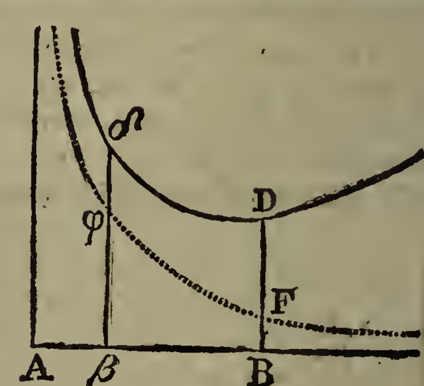
8. Subtrahe Superficiem ad minorem Basin Aβ pertinentem, à Superficie ad majorem Basin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Basium insistentem. Sic in hoc Exemplo *(Vide Fig. præcedentem.)* Si AB $=2$, & A$\beta=1$; Erit βBD$\delta=\frac{17}{6}$.

Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF$-$DFα) erit $\frac{8}{3}-\frac{1}{2}$, sive $\frac{13}{6}$; et superficies ad Aβ pertinens (viz. A$\phi\beta-\delta\phi\alpha$) erit $\frac{1}{3}-1$, sive $-\frac{2}{3}$: et earum differentia (viz. ABF$-$DF$\alpha-$A$\phi\beta+\delta\phi\alpha=\beta$BD$\delta$) erit $\frac{13}{6}+\frac{2}{3}$, sive $\frac{17}{6}$.

9. Eodem modo, si A$\beta=1$, AB$=x$; erit βBD$\delta=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^3-x^{-1}$.

10. Sic si $2x^3-3x^5-\frac{2}{3}x^{-4}+x^{-\frac{3}{5}}=y$, & A$\beta=1$; Erit βBD$\delta=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^6+\frac{2}{9}x^{-3}+\frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}-\frac{49}{18}$.

11. Denique notari poterit, quòd si quantitas x^{-1} in valore ipsius y reperiatur, iste terminus (cùm hyperbolicam superficiem generat) seorsim à reliquis considerandus est.



Ut si $x^2+x^{-3}+x^{-1}=y$: sit $x^{-1}=$ BF, & $x^2+x^{-3}=$ FD, ac A$\beta=1$; et erit $\delta\phi$FD$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex terminis x^2+x^{-3} generatur.

Quare

curvis duabus HFG, CDE interceptæ. Hinc $2x^{-\frac{1}{2}}-x^{-1}$ arearum HGBα, HGCDE differentia erit. Sed duarum HGBα, HGCDE, eadem quæ duarum CDB, αDE differentia erit; nempe cùm pars αDCGH utrıque

Quare, si reliqua superficies $\beta\phi$FB, quæ hyperbolica est, ex calculo aliquo sit data, dabitur tota βBDδ. QUADRATURA COMPOSITARUM.

CAPUT TERTIUM.

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

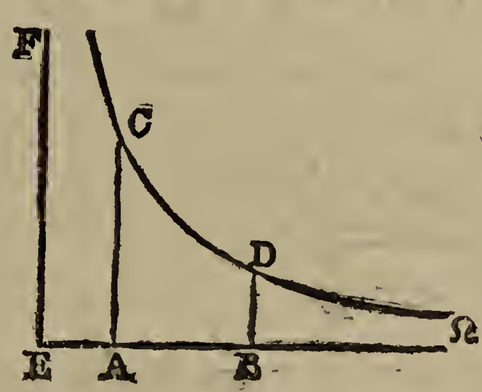
Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis, ad eundem Modum quo Arithmetici, in Numeris Decimalibus, dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas, deinceps elicies.

Exempla Dividendo.

1. SIT $\frac{aa}{b+x} = y$, curvâ nempe existente Hyperbolâ.

Jam ut Æquatio ista à Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$
\begin{array}{l}
b+x)\ aa + 0\ \left(\frac{aa}{b} - \frac{aax}{b^2} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4}\ \&c.\right. \\
\quad aa + \frac{aax}{b} \\
\hline
\quad 0 - \frac{aax}{b} + 0 \\
\qquad - \frac{aax}{b} - \frac{aax^2}{b^2} \\
\hline
\qquad\quad 0 + \frac{aax^2}{b} + 0 \\
\qquad\qquad + \frac{aax^2}{b^2} + \frac{aax^3}{b^3} \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0 - \frac{aax^3}{b^3} + 0 \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{aax^3}{b^3} - \frac{aax^4}{b^4} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0 + \frac{aax^4}{b^4}
\end{array}
$$



utrique sit communis. Ergo $2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}$ = differentiæ arearum CED, ADE. Q. E. D. [*E Commentariis Joannis Stewart Abredonensis.*]

4 Et

CAPUT TERTIUM.

Et ſic vice hujus, $y=\frac{aa}{b+x}$, nova prodit, $y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. ſerie iſtâc infinitè continuatâ; adeoque (per Regulam Secundam) area quæſita ABDC æqualis erit ipſi $\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. (c) infinitæ etiam ſeriei, cujus tamen Termini pauci initiales ſunt in uſum quemvis ſatis exacti, ſi modò x ſit aliquoties minor quàm b.

2. Eodem modo, ſi ſit $\frac{1}{1+xx}=y$, dividendo prodibit $y=1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9$ &c.

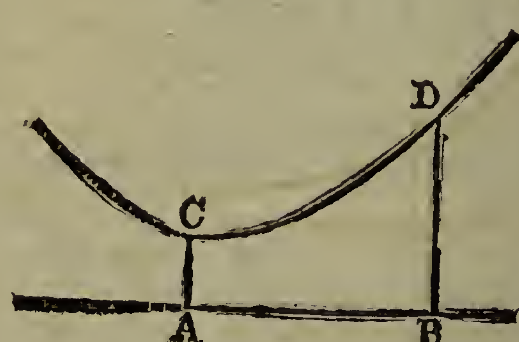
3. Vel ſi Terminus xx ponatur in diviſore primus, hoc modo, $xx+1$, prodibit $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$ &c. pro valore ipſius y; unde (per Regulam Secundam) erit BDΩ $=-x^{-1}+\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{1}{5}x^{-5}+\frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cùm x eſt ſatis parva, poſteriori cùm ſatis magna ſupponitur.

4. Denique ſi $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=y$; dividendo prodit $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit ABDC $=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

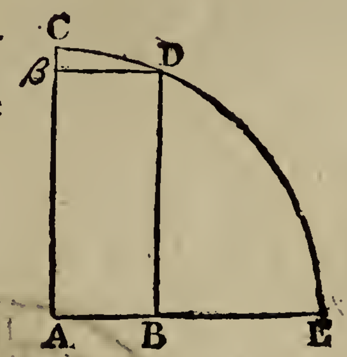
5. Si ſit $\sqrt{aa+xx}=y$, radicem ſic extraho,

$$\begin{array}{l}
aa+xx\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}\ \&c.\right.\\
\underline{aa}\\
0+xx\\
\underline{\quad xx+\frac{x^4}{4a^2}}\\
\quad 0-\frac{x^4}{4a^2}\\
\underline{\quad -\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}}\\
\qquad 0+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}\\
\underline{\qquad +\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}}\\
\qquad\quad 0-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}\\
\qquad\qquad \&c.
\end{array}$$

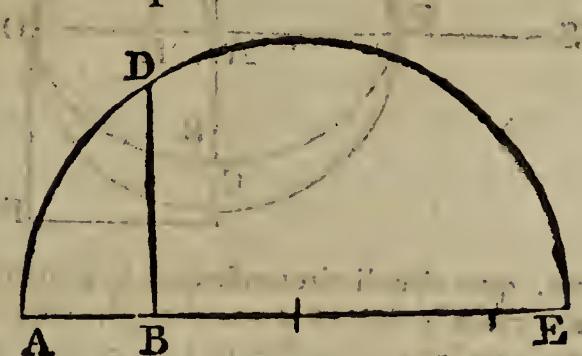


Unde,

Unde, pro æquatione $\sqrt{aa+xx}=y$, nova producitur, viz. $y=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) area quæsita ABDC erit $=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est quadratura hyperbolæ ([d]). QUADRATURA COMPOSITARUM.



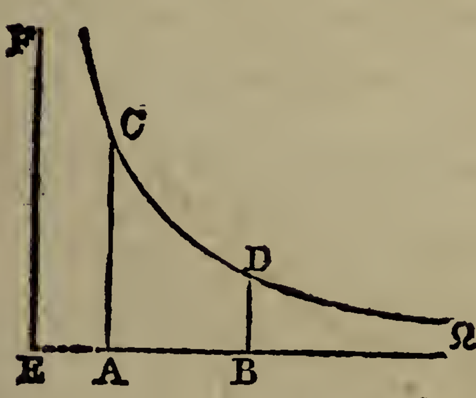
6. Eodem modo, si sit $\sqrt{aa-xx}=y$, ejus radix erit $a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Adeoque area quæsita ABDC erit æqualis $ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est Quadratura Circuli ([e]).



7. Vel si ponas $\sqrt{x-xx}=y$, erit radix æqualis infinitæ seriei $x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et area quæsita ABD æqualis erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{28}x^3-\frac{1}{72}x^4-\frac{5}{704}x^5$ &c. Et hæc est Areæ Circuli Quadratura ([f]).

8. Si $\frac{\sqrt{1+axx}}{\sqrt{1-bxx}}=y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ ([g]), extrahendo radicem utramque prodit

1+



([c]) Sit hyperbola ΩDC quæ centrum habeat E, asymptotas ad perpendiculum compositas EF, EΩ. In asymptotâ alterutrâ, puta EΩ, datum intelligatur punctum A. Sitque BD cum alterâ asymptotâ parallela. Jam è naturâ curvæ rectangulum EB × BD dabitur. Si igitur rectangulum illud datum symbolum aa designet; rectam datam EA, litera b; indefinitas AB, BD, literæ x, y; erit $by+xy=aa$, et $\frac{aa}{b+x}=y$. Et series Newtoniana infinitè producta areæ hyperbolicæ ABDC ultimò æqualis erit.

([d]) Sit hyperbola æquilatera CD, cujus centrum A, semiaxis transversus AC $=a$, abscissa AB axis secundi $=x$, ordinata BD $=y$. (Vid. fig. pag. 264.) Erit ACBD area illa hyperbolica cui series $ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{40a^3}{x^5}+$ ultimò æqualis erit.

([e]) Circuli centrum sit A, semidiameter AE $=a$. Quadrans AEDC. Abscissa semidiametri à parte centri, AB $=x$; ordinata BD $=y$. Erit ABDC area circularis, cui series $ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}$ infinitè producta ultimò æqualis erit.

([f]) Sit AE circuli diameter $=1$; ADE semicirculus; AB abscissa $=x$; BD ordinata $=y$; series $x^{\frac{1}{2}}\times\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{28}x^3$ infinitè producta areæ ADB ultimò æqualis erit.

([g]) Nempe hoc modo. Sit ellipsis CDBE cujus centrum A, axes CAB, DAE. Abscissa axis mi-

 noris

CAPUT TERTIUM.

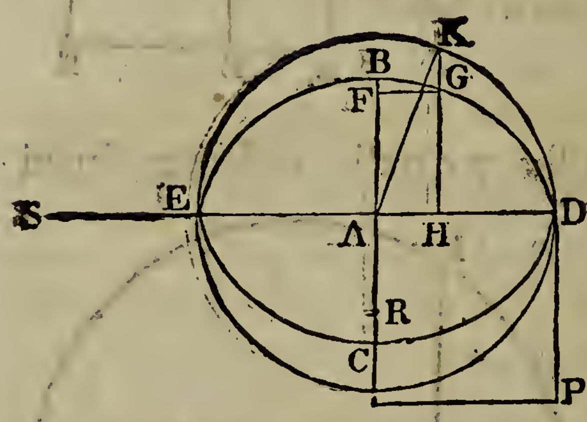
$$\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6-\frac{5}{128}a^4x^8}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6-\frac{5}{128}b^4x^8}\ \&c.$$

Et Dividendo, ſicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{lllll} 1 & +\frac{1}{2}b^3\,x^2 & +\frac{3}{8}b^2\,x^4 & +\frac{5}{16}b^3\,x^6 & +\frac{35}{128}b^4\,x^8\ \&c. \\ & +\frac{1}{2}a & +\frac{1}{4}ab & +\frac{3}{16}ab^2 & +\frac{5}{32}ab^3 \\ & & -\frac{1}{8}a^2 & -\frac{1}{16}a^2b & -\frac{3}{64}a^2b^2 \\ & & & +\frac{1}{16}a^3 & +\frac{1}{32}a^3b \\ & & & & -\frac{5}{128}a^4 \end{array}$$

Adeoque

LONGITUDO



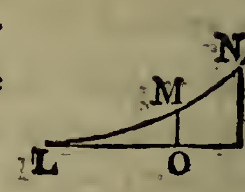
noris à parte centri, AF, deſignetur literâ x; ordinata GF literâ y; arcus DG literâ z. Sit AR ſemiparameter Ellipſeos, et ſumatur AS, ad quam ſemiaxis tranſverſus AD rationem habeat eam quam AR ad ipſum AD: et recta illa AS deſignetur literâ b: ponaturque ſemiaxis tranſverſus AD $=1$. Jam, propter angulum AFG rectum, fluxiones rectarum AF, FG ſunt ad fluxionem arcûs DG, ſicut latera trianguli cujuſdam rectilinearis rectanguli ad hypotenuſam (Newton. Introduct. ad Quad. Curv.) Erunt igitur $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{z}\dot{z}$. Et $\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}=\dot{z}$. Centro A, ſemidiametro AD, ſcribatur circulus DKE. A puncto G in axem tranſverſum AD deducatur ad perpendiculum GH, quæ circuli circumflexum in puncto K ſecet. Jungatur AK. Jam propter circulum, $AK^2-HK^2=AH^2$; hoc eſt $1-HK^2=y^2$. Sed è naturis ellipſeos circulique quibus axis DE communis, $GH^2:HK^2=AB^2:AD^2=AR:AD=AD:AS$. Hoc eſt $x^2:HK^2=1:b$. Quare $HK^2=bx^2$, et $1-bx^2=y^2$. Hinc $\dot{y}=-\frac{bx\dot{x}}{y}=-\frac{bx\dot{x}}{\sqrt{1-bx^2}}$. Ergo $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{x}\times\frac{b^2x^2}{1-bx^2}$. Et $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times 1+\frac{b^2x^2}{1-bx^2}=\frac{1+\overline{b^2-b}.x^2}{1-bx^2}\dot{x}\dot{x}$. Vel, ſi ponatur $a=b^2-b$, $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\dot{x}\dot{x}$. Et $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}\,\dot{x}=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}=\dot{z}$.

$$\text{Ergo } \dot{x}\,\frac{1+\frac{ax^2}{2}-\frac{a^2x^4}{8}+\frac{a^3x^6}{16}-\frac{5}{128}a^4x^8+}{1-\frac{bx^2}{2}-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6-\frac{5}{128}b^4x^8-}=\dot{z}.$$

Hinc, Diviſionis operâ, invenietur

$$\dot{z}=\dot{x}\times 1\begin{array}{l}+\frac{1}{2}b\\+\frac{1}{2}a\end{array}x^2\begin{array}{l}+\frac{3b^2}{2^2\times 2}\\+\frac{ab}{2^2}\\-\frac{a^2}{2^2\times 2}\end{array}x^4\begin{array}{l}+\frac{b^3\times 3\times 5}{2^3\times 2\times 3}\\+\frac{3ab^2}{2^3\times 2}\\-\frac{a^2b}{2^3\times 2}\\+\frac{3a^3}{2^3\times 2\times 3}\end{array}x^6$$

Jam ſit curva LMN, cujus ſi abſciſſa LO capiatur $=x$, ordinata MO ad perpendiculum educta ſemper æqualis ſit quantitati $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, cui ſeries utique illa $1\begin{array}{l}+\frac{1}{2}b\\+\frac{1}{2}a\end{array}x^2+$, infinitè producta, ultimò ſit æqualis.



Tum

Adeoque aream quæsitam $\begin{array}{l} x + \frac{1}{6}b\,x^3 + \frac{3}{40}b^2\,x^5 \text{ \&c.} \\ \quad\;\; + \frac{1}{6}a \quad\;\; + \frac{1}{20}ab \\ \qquad\qquad\quad - \frac{1}{40}a^2 \end{array}$ QUADRATURA COMPOSITARUM.

9. Sed observandum est, quòd operatio non rarò abbreviatur per debitam æquationis præparationem; ut in allato exemplo

Tum hæc series $x \begin{array}{l} +\frac{1}{6}b \\ +\frac{1}{6}a \end{array} x^3 + \begin{array}{l} \frac{3b^2}{2^2.2\times5} \\ +\frac{ab}{2^2\times5} \\ -\frac{a^2}{2^2\times2\times5} \end{array} x^5$

infinitè producta areæ LOM ultimò æqualis erit (per Regulam Secundam). Sed eadem series quantitati z, sive $1\times z$, ultimò æqualis erit. (Geomet. flux. Prop. II.) Nempe cùm hæc series fluens sit alterius, quæ quantitati $\dot{z}$ ostensa est æqualis, et unà cum quantitate z à nihilo generari inceperit. Rectangulum igitur $1\times z$, sive AD $\times$ arc. DG areæ, LOM æqualis erit. Et si ad rectam AD applicetur rectangulum AP $=$ areæ LOM, latus DP, ex applicatione ortum, arcui Elliptico, DG, æquale erit. Et hoc est quod dixit Newtonus, per quadraturam curvæ, cujus ea sit natura, ut ordinata sit $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}\,\dot{x}$, existente abscissâ x, dari longitudinem arcûs Elliptici. ARCUS ELLIPTICI.

Et hujus exemplo interpretanda sunt quæcunque similiter sunt dicta, qualia multà certè occurrunt, in scriptis Newtoni. Arithmeticè autem æstimatur arcus z summam seriei colligendo. Cæterùm eo sermone Newtonus uti voluit, qui maximè significaret, geometricas etiam problematum constructiones è calculis, quos tradit, facillimè deducendas. Nam si talis esset curva LMN, cujus area Geometricæ alicujus lineationis ope quadraturam subiret, Arcûs etiam Elliptici Longitudinem geometricè definire liceret. Vel si aut constructione Geometricâ, aut artificio quopiam mechanico, aream curvæ LMN appropinquare saltem potueris, arcûs Elliptici longitudinem geometricè vel mechanicè æquè appropinquare poteris.

Series simplicior paulò exsistet è computatione sequente, quæ literam b exulare coget; modò litera b non AS, ut priùs, sed semiaxem secundum AB designet. E naturâ Ellipseos, $y^2 : b^2 - x^2 = 1 : b^2$. Ergo $b^2y^2 = b^2 - x^2$, et $x^2 = b^2 - b^2y^2$. Hinc $\dot{x} = \frac{-b^2y}{x}\dot{y} = \frac{-b^2y}{\sqrt{b^2-b^2y^2}}\dot{y} = \frac{-by}{\sqrt{1-y^2}}\dot{y}$. Hinc $\dot{x}\dot{x} = \frac{b^2y^2}{1-y^2}\dot{y}\dot{y}$. Et $\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y} = \dot{y}\dot{y}\times 1 + \frac{b^2y^2}{1-y^2} = \dot{y}\dot{y}\times\frac{1-y^2+b^2y^2}{1-y^2}$. Vel, si ponatur $b^2 - 1 = -a$, $\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y} = \frac{1-ay^2}{1-y^2}\dot{y}\dot{y}$. Ergo $\dot{y}\times\sqrt{\frac{1-ay^2}{1-y^2}} = \sqrt{\dot{x}\dot{x}+\dot{y}\dot{y}} = -\dot{z}$. Unde calculo ut priùs peracto veniet series $y \begin{array}{l} +\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6}a \end{array} x^3 + \begin{array}{l} \frac{3}{2^2\times2\times5} \\ -\frac{a}{2^2\times5} \\ -\frac{a^2}{2^2\times2\times5} \end{array} y^5 \text{ \&c.} = -z$

hoc est arcui Elliptico BG. Positis autem semiaxe secundo AB $= 1$, transverso AD $= b$, arcus DG simili computatione prodibit $x \begin{array}{l} +\frac{1}{6} \\ +\frac{1}{6}a \end{array} x^3 + \begin{array}{l} \frac{3}{2^2\times2\times5} \\ +\frac{a}{2^2.\times5} \\ -\frac{a^2}{2^2\times2\times5} \end{array} x^5 +$

quantitate scilicet a, quæ in priore casu negata, est in hoc posteriore affirmatâ.

 $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices, prodibit $\frac{\sqrt{1 + \begin{smallmatrix} a \\ -b \end{smallmatrix} x^2 - abx^4}}{1+bx^2} = y$, & reliquum opus perficitur extrahendo radicem numeratoris tantùm, & dividendo per denominatorem.

10. Ex hiſce, credo, ſatis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipſius y (quibuſcunque radicibus vel denominatoribus ſit perplexus, ut hic videre eſt; $x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^5 + 2x^5 - x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx} - \sqrt[2]{2x - x^{\frac{2}{3}}}} = y$) in ſeries infinitas ſimplicium terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæſita ſuperficies cognoſcetur.

CAPUT QUARTUM.

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

SECT. I.

Numeralis Æquationum affectarum reſolutio.

1. QUIA tota difficultas in Reſolutione latet, modum, quo ego utor, in Æquatione Numerali primùm illuſtrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, reſolvenda: et ſit 2 numerus qui minùs quàm decimâ ſui parte differt à Radice quæſitâ. Tum pono $2 + p = y$, & ſubſtituo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus radix p exquirenda eſt, ut quotienti addatur: nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, ſive $p = 0{,}1$ prope veritatem eſt; itaque ſcribo $0{,}1$ in quotiente, & ſuppono $0{,}1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut priùs, ſubſtituo; unde prodit $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$.

Et cùm $11{,}23q + 0{,}061$ veritati propè accedit, ſive ferè ſit q æqualis $-0{,}0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur figuræ, quot locis primæ figuræ hujus & principalis quotientis excluſivè diſtant) ſcribo $-0{,}0054$ in inferiori parte quotientis, cùm negativa ſit.

2. Et ſupponens $-0{,}0054 + r = q$, hunc ut priùs ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſque placuerit. Verùm ſi ad bis

tot

Æquationum Resolutiones.

tot figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unâ demptâ, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,0054+r$ in hanc $6,3q^2+11,23q+0,061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem ſuam neglecto; & prodit $6,3r^2+11,16196r+0,000541708=0$ ferè, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r=\frac{-0,000541708}{11,16196}=-0,00004853$ ferè, quam ſcribo in negativâ parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativâ ſubducens habeo $2,09455147$ Quotientem quæſitam.

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
	Summa	$-1+10p-6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$ $+0,06+1,2\ +6,0$ $+1,\ +10,$ $-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$ $-0,060642\ +11,23$ $+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004854+s=r$		

3. Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſeciùs reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hîc factum fuit, levabis, ſi primos ejus terminos gradatim omiſeris.

4. Præterea notandum eſt, quòd in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0,1=p$ veritati ſatis accederet, pro $10p-1=0$, finxiſſem $6p^2+10p-1=0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente ſcripſiſſem; & ſecundam vel tertiam Quotientis figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſtâ ultimò reſultante quadratum coefficientis penultimi termini, non ſit decies majus quàm factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

5. Imo laborem plerumque minues, præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis noviſſimè reſultantis) exquiras: iſto enim modo figuras duplo plures quâlibet vice Quotienti lucraberis.

5 6. Hæc

CAPUT QUARTUM.

6. Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nescio; certè mihi videtur præ reliquis simplex, & usui accommodata. Demonstratio ejus ex ipso modo operandi patet; unde cùm opus sit, in memoriam facilè revocatur.

7. Æquationes, in quibus vel aliqui vel nulli Termini desint, eâdem fere facilitate tractantur; & Æquatio semper relinquitur, cujus Radix unà cum acquisitâ Quotiente adæquat Radicem Æquationis primò propositæ. Unde Examinatio Operis hîc æquè poterit institui ac in reliquâ Arithmeticâ, auferendo nempe Quotientem à Radice primæ Æquationis (sicut Analystis notum est) ut Æquatio ultima, vel termini ejus duo tresve ultimi, producantur inde.

8. Quicquid laboris hîc est, istud in Operatione substituendi quantitates unas pro aliis reperietur: id quod variè perficias, at sequentem modum maximè expeditum puto, præsertim ubi Numeri coefficientes constant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ substituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$.

Et cùm ista possit resolvi in hanc formam $\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y$ $+17=0$ (h). Æquatio nova sic generabitur $\overline{p-1}\times\overline{p+3}=p^2+2p-3$. et p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$. et p^3+5p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. et $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

SECT. II.

Literalis Æquationum affectarum resolutio.

1. His in numeris sic ostensis: sit Æquatio literalis $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$, resolvenda.

Primùm inquiro valorem ipsius y, cùm x sit nulla; hoc est, elicio Radicem hujus Æquationis, $y^3+a^2y-2a^3=0$, & invenio esse $+a$. Itaque scribo $+a$ in Quotiente, & supponens $+a+p=y$, substituo pro y valorem ejus, & Terminos inde resultantes ($p^3+3ap^2+4a^2p$, &c.) margini appono; ex quibus assumo $+4a^2p+a^2x$ terminos

(h) Sensus est, æquationem propositam ita generandam esse, si apotomen $y-4$ cum y multiplicaveris: factum quinario auctum cum y rursum multiplicaveris: Novum factum duodenario imminutum

minos utique ubi p & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & eos nihilo ferè æquales eſſe ſuppono, ſive $p = -\frac{1}{4}x$ ferè, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et ſcribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, ſubſtituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p; et terminos inde reſultantes iterum in margine ſcribo, ut vides in annexo ſchemate, & inde aſſumo Quantitates $+4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum; & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ ferè, ſive $q = +\frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ quotienti, ſubſtituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & ſic procedo quo uſque placuerit. ÆQUATIONUM RESOLUTIONES.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \text{ \&c.}$$

$+a + p = y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$ $+a^3 + a^2p$ $+a^2x + axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$ $-a^2x + 4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2 + axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} \left(+\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

2. Sin duplo tantùm plures quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: primo termino (q^3) æquationis noviſſimè reſultantis miſſo, & iſtâ etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) ſecundi, ubi x eſt tot dimenſionum quot in penultimo termino quotientis; in reliquos terminos ($3aq^2 + 4a^2q$, &c.) margini adſcriptos ut vides, ſubſtituo $\frac{x^2}{64a} + r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis ($\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + \frac{9}{32}x^2r - \frac{1}{2}axr + 4a^2r$) æquationis inde reſultantis, factâ diviſione, $4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$ (elicio $+\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ quotienti adnectendos.

imminutum in y rurſum multiplicaveris, factoque rurſum novo deniſeptenarium tandem adjeceris.

3. De-

CAPUT QUARTUM.

3. Denique quotiens ista ($a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam Secundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro areâ quæsitâ; quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x fit minor.

SECT. III.

Alius modus easdem Resolvendi.

1. Sin valor areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x fit major; exemplum esto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc resoluturus excerpo terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$, in quibus x & y vel seorsim, vel simul multiplicatæ, sunt & plurimarum, & æqualium ubique dimensionum; & ex iis quasi nihilo æqualibus radicem elicio. Hanc invenio esse x, & in quotiente scribo. Vel quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x substitutâ) radicem extraho; quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in quotiente scribo. Denique pono $x + p = y$; & sic procedo ut in priori exemplo, donec habeam quotientem $x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. adeoque aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}$ (1) $- \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de quâ vide exempla tertia Regulæ Secundæ. Lucis gratiâ dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modò x & a sibi invicem ibi substituantur, ut non opus esset aliud resolutionis exemplum hic adjungere.

2. Area autem ($\frac{xx}{2} - \frac{x}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}$ &c. terminatur ad curvam, quæ juxta Asymptoton aliquam in infinitum serpit; & Termini initiales ($x - \frac{1}{4}a$) valoris extracti de y, in Asymptoton istam semper terminantur; unde portionem Asymptoti facilè invenies. Idem semper notandum est, cùm area designatur terminis plus plusque divisis per x continuè, præterquam quòd vice Asymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis composita.

3. Sed

(1) Nempe hujusmodi symbolis $\boxed{\frac{a}{b.x^n}}$ curvarum hyperboliformium areas designari voluit, quarum abscissas litera x designat, ordinatas symbolum $\frac{a}{bx^n}$. Hinc plerisque nostratium usu receptum

3. Sed hunc modum missum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem curvis in orbem, ad instar Ellipsium, flexis; de altero modo per exemplum, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, suprà ostenso (scilicet quo dimensiones ipsius x in numeratoribus quotientis perpetuò augeantur) annotabo sequentia. Æquationum Resolutiones.

I. Si quando, accidit quòd valor ipsius y, cùm x nullum esse fingitur, sit quantitas surda vel penitùs ignota, licebit illam literâ aliquâ designare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$; si radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuisset surda, vel ignota, finxissem quamlibet (b) pro eâ ponendam; et resolutionem ut sequitur perfecissem. Scribens b in quotiente, suppono $b + p = y$, & istum pro y substituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. resultat, rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo sunt æquales, propterea quòd b supponitur radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, et $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ substituendum pro p, &c.

$$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0. \quad \text{Sit } cc = 3b^2 + a^2.$$

$$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^0} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{a^5b^3x^3}{c^{10}} \ \&c.$$

$b + p = y$	y^3	$+b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$
	$+axy$	$+abx + axp$
	$+aay$	$+aab + aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc} + q = p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^3$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$ &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$
	$+ccp$	$-abx + ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$

$$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}\Big)\frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6}\Big(\frac{a^4bx^2}{c^0} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^0} \ \&c.$$

Completo opere, sumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, sicut de numerali æquatione ostensum suprà, resolvo; & radicem ejus pro b substituo.

II. Si dictus valor sit nihil, hoc est, si in æquatione resolvendâ nullus sit terminus, nisi qui per x vel y sit multiplicatus, ut in hâc $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos $(-axy + x^3)$ seligo in quibus x seorsim & y etiam seorsim, si fieri potest, aliâs per x multiplicata, sit minimarum dimensionum. Et illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$

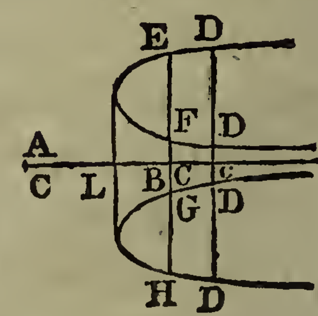
tum est, ut hoc symbolo, $ax^{\frac{m}{n}}\dot{x}$, fluxionem designante, hoc aliud $\boxed{ax^{\frac{m}{n}}\dot{x}}$ generaliter designet fluentem.

CAPUT QUARTUM.

pro y fubftituendum. In hâc $y^3-a^2y+axy-x^3=0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y-x^3$, vel ex y^3-a^2y elicere.

III. Si valor ifte fit imaginarius, ut in hâc $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$, augeo vel imminuo quantitatem x, donec dictus valor evadat realis.

Sic in annexo fchemate (k), cum AC (x) nulla eft, tum CD (y) eft imaginaria.



Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum, pofito quòd BC (x) fit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet poteft effe primus terminus quotientis, prout fuperficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC defideratur. In aliis etiam cafibus, fi quando hæfitas, te hoc modo extricabis.

Denique fi index poteftatis ipfius x vel y fit fractio, reduco ipfum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}=0$. Pofito $y^{\frac{1}{2}}=v$, & $x^{\frac{1}{3}}=z$, refultabit $v^6-z^3v+z^4=0$, cujus radix eft $v=z+z^3$, &c. five (reftituendo valores) $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}+x$, &c. & quadrando $y=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum inveftigandis dicta fufficiant (l). Imo cùm Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & fuperficie folidorum, deque Centro Gravitatis, poffint eò tandem reduci, ut quæratur quantitas fuperficiei planæ lineâ curvâ terminatæ, non opus eft quicquam de iis adjungere. In iftis autem quo ego operor modo dicam breviffimè.

CAPUT

(k) Sit curva DEHD cujus abfciffam, AC, litera x defignet; ordinatam, CD, litera y; æquatione biquadraticâ modò expofitâ abfciffa AC ordinataque CD quomodo inter fe mutuò habeant generaliter fignificante. Hæc quidem curva talis erit, ut fi per datum punctum A, unde abfciffæ initium ducant, recta ducatur cum ordinatis CD parallela, ea curvæ nullibi occurrat. Ergo quando x nulla eft, hoc eft punctis, A, C, coeuntibus, æftimatio literæ y imaginaria erit. Duci intelligatur recta cum ordinatis parallela quæ curvam contingat; axem verò contingens illa in puncto L fecet. Sumatur recta AB datæ cujufvis longitudinis, modò rectâ AL non fit minor. Si per datum punctum B ducatur recta BE, cum ordinatis parallela, quatuor illa locis cum curvâ concurret. Concurfus quatuor fint F, E, G, H. Jam fi litera x, pro indefinitâ AC, indefinitæ illius datæque AB differentiam BC defignet, et in æquationem biquadraticam pro x, illud $x+AB$ ubique fubftituatur; quo facto illa in hanc migraverit, $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2AB.x.y^2-AB^2.y^2-2x-$

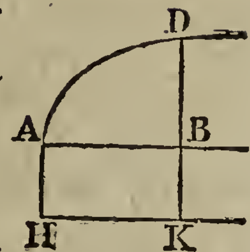
2. AB

CAPUT QUINTUM.

CURVARUM LONGITUDINIS.

Applicatio prædictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.

SIT ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH, vel BK, est unitas. Et cogita rectam DBK, uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK describere; & quòd BK (1) sit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quòd ex momento BD perpetim dato, possis, per prædictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare; sive cum AK (x) momento 1 descriptâ conferre.

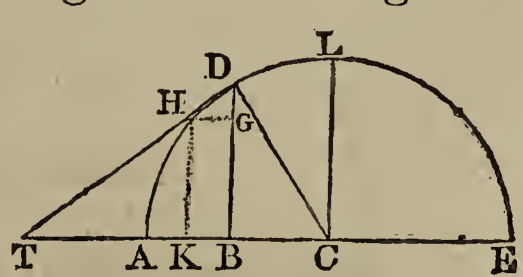


Jam quâ ratione superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas, elicitur, eâdem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior (m).

CAPUT SEXTUM.

Longitudines Curvarum invenire.

1. SIT ADLE circulus, cujus arcûs AD longitudo est indaganda. Ductâ tangente DHT, & completo indefinitè parvo rectangulo HGBK, & posito AE $=1=2$AC: erit ut BK sive GH, momentum basis AB (x), ad HD momentum arcûs AD : : BT : DT : : BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) : : 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$, est momentum arcûs AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}+\frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}+\frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Quare, per Regulam



$2AB+x^2+2ABx+AB^2+x^4+4AB.x^3+6AB^2x^2+4AB^3x+AB^4=0$; æquationis, $y^4+y^2-2y+6-2AB+AB^2+AB^4=0$, quæ ex transmutatâ fiet, posito quòd x nihilo æqualis sit; hujus inquam nulla radix impossibilis erit, sed veræ quatuor exsistent. Cocuntibus enim punctis B, C, quod fieri quidem necesse est, si indefinita $x=0$, hoc est si illius AC datæque AB differentia nulla sit, significantia literæ y quadruplex erit, cùm ex quatuor, BF, BE, BG, BH, quamlibet illa designârit. Harum autem aliam vel aliam pro membro primo seriei sumere oportet, prout aream BEDC, vel EFDC, vel BGDC, vel BHDC, æstimare velis.

(l) Quæ hîc verò breviter dixit eadem in Geometriâ Analyticâ pluribus et explanatiùs tradit. Ea quidem quæ Æquationum in series infinitas resolutionem spectant, capite ejus libri primo secundo et tertio: quæ Curvarum per series Quadraturas, Problemate 9°.

(m) Vide (g) & confer Newton. de Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor.

Secundam,

Caput Septimum.

Secundam, longitudo arcûs AD eſt $x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}+\frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c. ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5$ &c.

2. Non ſecus ponendo CB eſſe x, & radium CA eſſe 1, invenies arcum LD eſſe $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c.

3. Sed notandum eſt, quòd unitas iſta, quæ pro momento ponitur, eſt ſuperficies cùm de ſolidis, & linea cùm de ſuperficiebus, & punctum cùm de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate [n] in punctis, ſive lineis infinitè parvis, ſiquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indiviſibilium.

Ex his fiat conjectura de ſuperficiebus & quantitatibus ſolidorum; ac de centris gravitatum.

CAPUT SEPTIMUM.

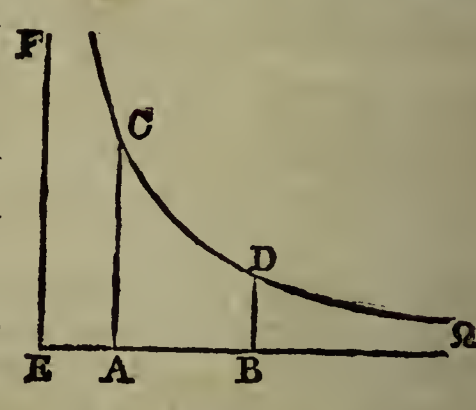
Invenire prædictorum converſum.

VERUM ſi è contrà ex areâ vel longitudine, &c. curvæ alicujus datâ longitudo baſis AB deſideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix x.

SECT. I[a].

Inventio Baſis ex Areâ datâ.

Ut ſi ex areâ ABDC hyperbolæ ($\frac{1}{1+x}=y$) datâ, cupiam baſim AB inveſtigare, areâ iſtâ z nominatâ, extraho radicem hujus z (ABCD) $=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x eſt plurium dimenſionum quàm z, in quotiente, deſideratur.



Ut ſi vellem quòd z ad quinque tantùm dimenſiones in quotiente aſcendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{1}{8}x^8$, &c. et radicem hujus tantùm $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-z=0$ extraho [o].

Analyſin

[n] Quam tamen loquendi formam ita non probavit Newtonus, ut non alium in finem, quàm ut illa ex argumentationibus Geometrarum exularet, viam ſuam Rationum Primarum Ultimarumque ex-

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+ x$	$+z+p$
	$- z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-z.p$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+ p$	$+\frac{1}{2}z^2 - q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

Basis ex area vel arcu.

Analyſin, ut vides, exhibui propter adnotanda duo ſequentia.

I. Quòd inter ſubſtituendum, iſtos terminos ſemper omitto, quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quòd poſt primum terminum, ex quâlibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures terminos dextrorſum, quàm iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantùm poſt z^3. Cùm radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula; quòd poſt primum terminum, ex quâlibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures terminos dextrorſum, quàm iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis à ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

II. Cùm video p, q, vel r, &c. in æquatione noviſſimè reſultante eſſe unius tantùm dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos terminos quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hîc vides factum.

SECT. II.

Inventio Baſis ex datâ Longitudine Curvæ.

Si ex dato arcu CD ſinus AB deſideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. ſuprà inventæ, (poſito nempe AB $= x$,

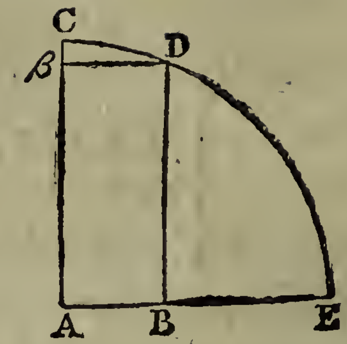
excogitaverit.

(°) Vide Geometr. Analyt. Cap. III. § 8.

CD $= z$,

Caput Octavum.

CD$=z$, & AC$=1$,) radix extracta erit $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7+\frac{1}{362880}z^9$, &c (p).



Et præterea si cosinum Aβ ex isto arcu dato cupis, fac Aβ $(=\sqrt{1-xx})=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\frac{1}{40320}z^8-\frac{1}{3628800}z^{10}$, &c (q).

CAPUT OCTAVUM.

De Serie progressionum continuandâ.

Hic obiter notetur, quòd 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogiâ observatâ poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

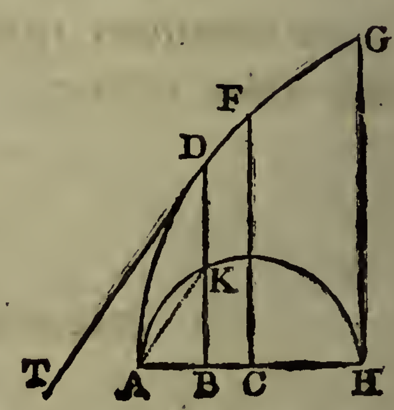
Et hanc $x=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

Et hanc $z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times 1}{2\times 3}$, $\frac{3\times 3}{4\times 5}$, $\frac{5\times 5}{6\times 7}$, $\frac{7\times 7}{8\times 9}$, &c. Et sic in reliquis (r).

CAPUT NONUM.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

1. Et hæc de curvis Geometricis sufficiant. Quinetiam curva etiamsi mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.



Exemplo sit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota quâ describitur: et quæratur superficies ABD. Jam posito AB $=x$, BD$=y$, ut suprà, & AH$=1$; primò quæro longitu-

(p) Vide Geometr. Analyt. C. III. § 9.

(q) Nempe ex æquatione priore, $x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-$, quadraticè multiplicando, efficitur $x^2=z^2-\frac{1}{3}z^4+\frac{2}{45}z^6-\frac{1}{315}z^8+\frac{2}{14175}z^{10}-$. Ergo $1-x^2=1-z^2+\frac{1}{3}z^4-\frac{2}{45}z^6+\frac{1}{315}z^8-\frac{2}{14175}z^{10}+$. Unde radicem extrahendo, veniet $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\frac{1}{40320}z^8-$

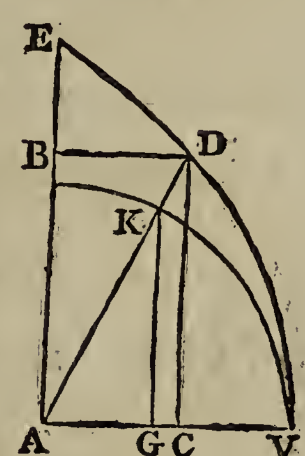
1

longitudinem ipſius BD. Nempe, ex naturâ trochoidis, eſt KD = arcui AK. Quare tota BD = BK + arc. AK. Sed eſt BK $(=\sqrt{x-xx}) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16} - x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus AK $= x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

De Curvis Mechanicis.

2. Vel breviùs ſic: cùm recta AK tangenti TD parallela ſit, erit AB ad BK ſicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc eſt $x : \sqrt{x-xx} :: 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et ſuperficies ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3156}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

3. Non diſſimili modo (poſito C centro circuli, & CB $= x$) obtinebis aream CBDF, &c.



4. Sit area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex eſt V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ductâ quâlibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG :: AB (x) : BD (y), ſive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verùm ex naturâ Quadratricis eſt BA (= DC) = arcui VK, ſive VK $= x$. Quare poſito AV $= 1$, erit GK $= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. ex ſuprà oſtenſis; & GA $= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.

Adeoque $y \left(= \frac{x \times AG}{KG}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6}$ &c. ſive, diviſione factâ, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$, &c. et (per Reg. 2.) area AVDB $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis eſt (s).

5. Nec quicquam hujuſmodi ſcio, ad quod hæc methodus, idque variis modis, ſeſe non extendit. Imo tangentes ad curvas mechanicas (ſi quando id non aliâs fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analyſis per æquationes ex finito terminorum numero conſtantes (quando id ſit poſſibile) perficit, hæc per

$\frac{1}{3628800}z^{10} +$

(r) Vide Geom. Analyt. Cap. III. § 12.

(s) Vide Geometr. Analyt. Problem ult. Exemp. ult. Cæterùm in quarto *Excerptorum ex Epiſtolis* habes Aream et Longitudinem Quadratricis Dinoſtrati.

CAPUT DECIMUM.

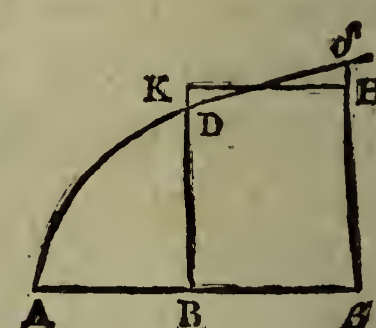
æquationes infinitas semper perficiat: ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hâc non minùs certa sunt quàm in illâ, nec æquationes minùs exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines, & rationis finitæ, nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exactè cognoscamus: sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris, nec quâvis arte Analyticâ, ita possunt exhiberi, ut alicujus quantitas, à reliquis distincta, exactè cognoscatur.

6. Denique ad Analyticam meritò pertinere censeatur, cujus beneficio curvarum areæ & longitudines, &c. (id modò fiat) exactè & Geometricè determinentur. Sed ista narrandi non est locus. Respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

CAPUT DECIMUM.

1. *Demonstratio Quadraturæ Curvarum Simplicium in Regulâ primâ.*

Præparatio pro Regulâ primâ demonstrandâ.



1. SIT itaque curvæ alicujus ADδ basis AB$=x$, perpendiculariter applicata BD $=y$, & area ABD$=z$, ut priùs. Item sit Bβ $=o$, BK$=v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale spatio B$\beta\delta$D.

Est ergo A$\beta=x+o$, & A$\delta\beta=z+ov$.

His præmissis, ex relatione inter x & z, ad arbitrium assumptâ, quæro y isto, quem sequentem vides, modo.

Pro lubitu sumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$, sive $\frac{4}{9}x^3=zz$. Tum $x+o$ (Aβ) pro x, & $z+ov$ (A$\delta\beta$) pro z substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3+3x^2o+3xo^2+o^3=$ (ex naturâ curvæ) $z^2+2zov+o^2v^2$. Et sublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $\frac{4}{9}$ in $3x^2+3xo+o^2=2zv+ov^2$. Si jam supponamus Bβ in infinitum diminui & evanescere, sive o esse nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evanescent: quare restabit $\frac{4}{9}\times 3xx=2zv$, sive $\frac{2}{3}xx$ $(=zy)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, sive $x^{\frac{1}{2}}\left(=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)=y$. Quare è contra si $x^{\frac{1}{2}}=y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$.

Demonstratio.

Demonstratio.

Regularum Demonstrationes.

2. Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; sive, ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m+n=p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, sive $c^n x^p = z^n$: tum $x+o$ pro x, & $z+ov$ (sive, quod perinde est, $x+oy$) pro z, substitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evanescerent, omissis. Jam sublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}$ $\left(= \frac{nyz^n}{n} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$ sive, dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ sive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel, restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc est, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare è contra, si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio curvarum quæ possunt quadrari.

3. Hinc in transitu notetur modus, quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & basin x, ut inde quæratur applicata y. Ut si supponas $\sqrt{aa+xx} = z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}} = y$. Et sic de reliquis (t).

SECT. II.

2. *Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.*

1. Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quòd quotiens, cùm x sit satis parva, quo magis producitur, eo magis ad veritatem accedit; ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quâvis datâ quantitate; &, in infinitum producta, sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

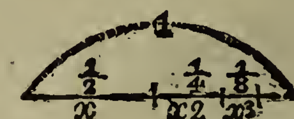
2. I. Quoniam ex ultimo termino æquationum, quarum p, q, r, &c. sunt radices, quantitas illa in quâ x est minimæ dimensi-

(t) Geometr. Analyt. Prob. VII. & Quadrat. Curv. Prop. II.

Caput Decimum.

onis (hoc eſt, plusquam dimidium iſtius ultimi termini, ſi ſupponis x ſatis parvam eſſe) in quâlibet operatione perpetuò tollitur: iſte ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quâvis datâ quantitate; & prorſus evaneſcet, ſi opus infinitè continuatur.

Nempe ſi $x=\frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x+x^2+x^3+x^4$, &c. et x^2 dimidium omnium $x^2+x^3+x^4+x^5$, &c. Itaque ſi $x \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x+x^2+x^3$, &c. et x^2 pluſquam dimidium omnium $x^2+x^3+x^4$, &c. Sic ſi $\frac{x}{b} \sqsupset \frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{bb}$, &c (u). Et ſic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decreſcunt perpetuò, vel ſi quando increſcant, tantùm opus eſt, ut x aliquoties adhuc minor ſupponatur.



II. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuò diminuatur, donec tandem evaneſcat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur, donec cum ultimo termino ſimul evaneſcat.

III. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuò decreſcit, donec tandem, cùm opus in infinitum producitur, penitùs evaneſcat.

IV. Sed valores iſtarum p, q, vel r, &c. unà cum quotiente eatenus extractâ, adæquant radices æquationis propoſitæ (ſic in reſolutione æquationis $y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0$, ſuprà oſtenſâ, percipies $y=a+p=a-\frac{1}{4}x+q=a-\frac{1}{4}x+\frac{xx}{64a}+r$, &c.) Unde ſatis liquet propoſitum, quòd quotiens, infinitè producta, eſt una ex valoribus de y (x).

3. Idem patebit ſubſtituendo quotientem pro y in æquationem propoſitam. Videbis enim terminos illos ſeſe perpetuò deſtruere, in quibus x eſt minimarum dimenſionum.

(u) Hæc ſatis patent ex theoremate illo, quod ſuprà demonſtratum dedimus, de progreſſionibus geometricis.

(x) Vide Geometr. Analyt. Cap. III. § 18 & 19.

EXCERPTA QUÆDAM

EX

EPISTOLIS NEWTONI

AD

SERIES FLUXIONESQUE PERTINENTIA.

E X C E R P T U M I.

EX EPISTOLA NEWTONI AD OLDENBURGUM PRIMA.

[Vide Commerc. Epiſtolic. N. 48.]

DE FORMULIS ALGEBRAICIS IN SERIES INFINITAS RESOLVENDIS.

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus, ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multùm abbreviantur per hoc *Theorema.* THEOREMA BINOMIALE.

$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ +$, &c.

2. Ubi $P+PQ$ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt; P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: ſive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro *aa*, *aaa*, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} (a). Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{c:\overline{a^3+b^2x}}}$ ſcribo $aa\times\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{a^2b}{\sqrt{c:\overline{a^3+b^2x}\times\overline{a^3+b^2x}}}$ ſcribo $a^2b\times\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$: In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regulâ; erit $P=a^3$, $Q=\frac{b^2x}{a}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, uſurpo

(a) Vide Arithmet. Univerſ. C. I.

A, B,

EXCERPTUM PRIMUM. A, B, C, D, &c. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$, & sic deinceps ([b]). Cæterùm usus Regulæ patebit exemplis.

3. *Exempl.* I. Est $\sqrt{c^2+x^2}$ (seu $\overline{c^2+x^2}|^{\frac{1}{2}}$) $= c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}$, &c. Nam, in hoc casu, est $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, $m=1$, $n=2$, A $(=P^{\frac{m}{n}}=\overline{cc}|^{\frac{1}{2}})$ $=c$, B $(=\frac{m}{n}AQ)=\frac{x^2}{2c}$, C $(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{x^4}{8c^3}$, & sic deinceps.

4. *Exempl.* 2. Est $\sqrt{5:c^5+c^4x-x^5}$ (i. e. $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $=c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}$ $-\frac{2c^8x^2+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}$ + &c. Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q; et tunc evadet $\sqrt{5:c^5+c^4x-x^5}$ $=-x$

DEMONSTRATIO

([b]) Hujus formulæ hanc ferè investigationem auctores tradunt.

Casus 1. Designante P unitatem, ut sit $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}=\overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}}$, finge seriem infinitam

$$1+aQ+bQ^2+cQ^3+dQ^4+eQ^5+.=\overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}}.$$

Unde hæc orietur fluxionum æquatio.

$$a\dot{Q}+2bQ\dot{Q}+3cQ^2\dot{Q}+4dQ^3\dot{Q}+5eQ^4\dot{Q}+.=\frac{m}{n}\dot{Q}\times\overline{1+Q}|^{\frac{m-n}{n}}.$$

Et ex duabus hisce, divisione nimirum, tertia fiet.

$$\frac{a+2bQ+3cQ^2+4dQ^3+5eQ^4+.}{1+aQ+bQ^2+cQ^3+dQ^4+eQ^5+.}=\frac{m}{n}\frac{\times\overline{1+Q}|^{\frac{m-n}{n}}}{\overline{1+Q}|^{\frac{m}{n}}}=\frac{m}{n.\overline{1+Q}}.$$

Ex hâc tertiâ, fractionibus per multiplicationes quibus opus est sublatis, quarta demum exsistet.

$$\begin{matrix} na+2nbQ+3ncQ^2+4ndQ^3+5neQ^4+. \\ +naQ+2nbQ^2+3ncQ^3+4ndQ^4+. \end{matrix} = m+maQ+mbQ^2+mcQ^3+mdQ^4+meQ^5+.$$

Jam verò membrorum homologorum coefficientibus æquatis, elicientur seriei principio positæ coefficientes. Nempe hoc modo.

I. $na=m$. Ergo $a=\frac{m}{n}$.

II. $2nb+na=ma$. Ergo $b=a\times\frac{m-n}{2n}$.

III. $3nc+2nb=mb$. Ergo $c=b\times\frac{m-2n}{3n}$.

IV. $4nd+3nc=mc$. Ergo $d=c\times\frac{m-3n}{4n}$.

V. $5ne+4nd=md$. Ergo $e=d\times\frac{m-4n}{5}$.

Hinc literâ A in hoc casu designante unitatem, membrum secundum seriei principio positæ, sive $aQ=\frac{m}{n}AQ$.

Membrum

$= -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8x^2 + 4c^9x + c^{10}}{25x^9} +$ &c. Prior modus eligendus est, si x valdè parvum sit; posterior, si valdè magnum. THEOREMA BINOMINALE.

5. *Exempl.* 3. Est $\frac{N}{\sqrt{3:y^3 - a^2y}}$ (hoc est, $N \times \overline{y^3 - a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N \times \frac{1}{y} + \frac{a^2}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^6}{81y^7} +$, &c. Nam $P = y^3$, $Q = \frac{-aa}{yy}$, $m = -1$, $n = 3$; $A\ (= P^{\frac{m}{n}} = y^{3 \times -\frac{1}{3}}) = y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$. $B\ (= \frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-aa}{yy}) = \frac{aa}{3y^3}$, &c.

6. *Exempl.* 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d+e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} +$, &c. Nam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 4$, $n = 3$; $A\ (= P^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{4}{3}}$, &c.

7. *Exempl.* 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadrato-cubus ipsius $d+e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^5$, seu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) desideretur: erit, juxta regulam, $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 5$, & $n = 1$; adeoque $A\ (= P^{\frac{m}{n}}) = d^5$, $B\ (= \frac{m}{n} AQ) = 5d^4e$, & sic $C = 10d^3e^2$, $D = 10d^2e^3$,

E =

Membrum tertium, sive $bQ^2 = a \times \frac{m-n}{2n} Q^2 = aQ \times \frac{m-n}{2n} Q = \frac{m-n}{2n} BQ$, designante nimirum literâ B quantitatem aQ. THEOREMATIS BINOMINALIS.

Membrum quartum seriei principio positæ, sive $cQ^3 = b \times \frac{m-2n}{3n} Q^3 = bQ^2 \times \frac{m-2n}{3n} Q = \frac{m-2n}{3n} CQ$, designante literâ C quantitatem bQ^2.

Membrum quintum seriei principio positæ, sive $dQ^4 = c \times \frac{m-3n}{4n} Q^4 = cQ^3 \times \frac{m-3n}{4n} Q = \frac{m-3n}{4n} DQ$, designante literâ D quantitatem cQ^3.

In summâ, series principio posita, videlicet, $1 + aQ + bQ^2 + cQ^3 + dQ^4 + eQ^5$, &c. huic æqualis erit $1 + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ +$, Q. E. D.

Casus 2. Jam verò literâ P quantitatem quamvis designet sive majorem sive minorem unitate. Quantitas $\overline{P + PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \times \overline{1 + Q}|^{\frac{m}{n}}$. Sed ex casu priori $\overline{1 + Q}|^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} Q + \frac{m-n}{2n} aQ^2 + \frac{m-2n}{3n} bQ^3 + \frac{m-3n}{4n} cQ^4 + \frac{m-4n}{5n} dQ^5 +$.

Ergo $\overline{P + PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q + \frac{m-n}{2n} P^{\frac{m}{n}} aQ^2 + \frac{m-2n}{3n} P^{\frac{m}{n}} bQ^3 + \frac{m-3n}{4n} P^{\frac{m}{n}} cQ^4 + \frac{m-4n}{5n} P^{\frac{m}{n}} dQ^5 +$.

Hoc est, si quantitatem $P^{\frac{m}{n}}$ literâ A designaveris, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} aQ$ literâ B, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} bQ^2$ literâ C, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} cQ^3$ literâ D, quantitatem $P^{\frac{m}{n}} dQ^4$ literâ E: $\overline{P + PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ +$. Q. E. D.

Hujus investigationis auctorem Heynesium quendam nomine Raphsonus perhibet. (History of Fluxions, Cap. 3.)

EXCERPTUM PRIMUM. $E = 5de^4$, $F = e^5$, & $G\ (= \frac{m-5n}{6n} FQ) = 0$. Hoc eft, $\overline{d+e}|^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3e^2 + 10d^2e^3 + 5de^4 + e^5$.

8. *Exempl.* 6. Quinetiam Divifio, five fimplex fit, five repetita, per eandem regulam perficitur. Ut fi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eft, $\overline{d+e}|^{-1}$ five $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in feriem fimplicium terminorum refolvendum fit: Erit, juxta regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = -1$. $n = 1$. & $A\ (= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}) = d^{-1}$ feu $\frac{1}{d}$. $B\ (= \frac{m}{n} AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d}) = -\frac{e}{dd}$. Et fic $C = \frac{ee}{d^3}$. $D = -\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc eft, $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^3} - \frac{e^3}{d^4}$, &c.

9. *Exempl.* 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eft, Unitas ter divifa per $d+e$, vel femel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6ee}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} +$, &c.

10. *Exempl.* 8. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eft, N divifum per radicem cubicam ipfius $d+e$) evadit $N \times \overline{\frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} +, \&c.}|$

11. *Exempl.* 9. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eft, N divifum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipfius $d+e$, five $\frac{N}{\sqrt{5:\overline{d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} +$, &c.

12. Per eandem regulam, Genefis poteftatum, Divifiones per poteftates aut per quantitates radicales, & Extractiones radicum altiorum in numeris, etiam commodè inftituuntur.

13. Extractiones radicum affectarum in fpeciebus imitantur earum extractiones in numeris. Sed methodus *Vietæ* & *Oughtredi* noftri huic negotio minùs idonea eft. Quapropter aliam excogitare adactus fum, *cujus fpecimina, ne repetantur, vide in tractatu de Analyfi, &c.* Cap. IV.

14. Dicam tantùm in genere, quòd radix cujufvis æquationis femel extracta, pro regulâ refolvendi confimiles æquationes affervari poffit; quòdque ex pluribus ejufmodi regulis, regulam generaliorem plerumque efformare liceat; & quòd radices omnes, five fimplices fint five affectæ, modis infinitis extrahi poffint; de quorum fimplicioribus itaque femper confulendum eft.

EXCERPTUM IIm.

Ex Epistolâ Newtoni ad Oldenburgum posteriore.

[*Commerc. Epistolic.*] N°. 55—64.

De Seriebus condendis et invertendis.

[*Quæ sequuntur scripta sunt in explicationem Epistolæ præcedentis.*]

QUOD verò attinet ad Inventionem terminorum p, q, r, (vide Analyſ. per Æquat. Infinit. cap. 4.) in extractione radicis affectæ, primum p ſic eruo (c)

B Fig. 1.

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
o	y	y^2	y^3	y

A C

2. Deſcripto angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia parallelogramma vel quadrata, quæ concipio denominata eſſe à dimenſionibus duarum indefinitarum ſpecierum, puta x & y, regulariter aſcendentium à termino A; prout vides in Fig. 1. inſcriptas. Ubi y denotat radicem extrahendam; et x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus poteſtatibus ſeries conficienda eſt. Deinde, cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma ſingulis ejus terminis correſpondentia inſignio notâ aliquâ: et regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis parallelogrammis applicatâ; quorum unum ſit humillimum in columnâ ſiniſtrâ juxta AB, & alia ad regulam dextrorſum ſita, cæteraque omnia, non contingentia regulam, ſupra eam jaceant; ſeligo terminos æquationis per parallelogramma contingentia regulam deſignatos, & inde quæro quantitatem quotienti addendam.

Fig. 2.

3. Sic ad extrahendam radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis reſpondentia ſigno notâ aliquâ $*$; ut vides in Fig. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem è locis ſignatis in ſiniſtrâ columnâ; eamque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio,

(c) Vide Geometr. Analyt. c. iii. §. 2.

EXCERPTUM SECUNDUM.

donec alium ſimiliter, vel fortè plura, è reliquis ſignatis locis cœperit attingere. Videoque loca ſic attacta eſſe x^3, x^2y^2, & y^6. E terminis itaque, $y^6-7a^2x^2y^2+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& inſuper ſi placet reductis ad $v^6-7v^2+6=0$, ponendo $y=v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout è radicibus quampiam extrahere decretum eſt.

4. Sic æquatio $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, quam reſolvebam in priori Epiſtolâ, dat $-2a^3+aay+y^3=0$, & inde $y=a$ proximè: cùm itaque a ſit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & ſubſtituo $a+p=y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; ſed ex iis, credo, lector ſe proprio marte extricabit.) Subſequentes vero termini q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus ſecundis, tertiis, cæteriſque eruuntur, quo primus p è prima, ſed curâ leviori; quia cæteri valores y ſolent prodire dividendo terminum involventem infimam poteſtatem indefinitæ quantitatis x per coefficientem radicis p, q, r, aut s.

5. Intellexti credo ex ſuperioribus, regreſſionem ab areis curvarum ad lineas rectas, fieri per hanc extractionem radicis affectæ. Sed duo alii ſunt modi quibus idem perficio.

6. Eorum unus affinis eſt computationibus, quibus colligebam approximationes ſub finem alterius Epiſtolæ, & intelligi poteſt per hoc exemplum. Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ $z=x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$, &c (d). Et partibus ejus multiplicatis in ſe, emerget $z^2=x^2+x^3+\frac{11}{12}x^4+\frac{5}{6}x^5$, &c. $z^3=x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{7}{4}x^5$, &c. $z^4=x^4+2x^5$, &c. $z^5=x^5$, &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & reſtat $z-\frac{1}{2}zz=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{24}x^4-\frac{13}{60}x^5$, &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3=x+\frac{1}{24}x^4+\frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & reſtat $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4=x-\frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5=x$ quamproximè; ſive $x=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c.

7. Eodem modo, ſeries de unâ indefinitâ quantitate, in aliam transferri poſſunt. Quemadmodum ſi poſito r radio circuli, x

(d) Vide Geometr. Analyt. cap. IX. §. 34.

ſinu

finu recto arcûs z, & $x+\frac{x^3}{6rr}+\frac{3x^5}{40r^4}+$ &c. longitudine arcûs iftius; atque hanc feriem à finu recto ad tangentem vellem transferre: quæro longitudinem tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam feriem, $x+\frac{x^3}{2rr}+\frac{3x^5}{8r^4}+$ &c. Vocetur hæc quantitas, t. Colligo poteftates ejus $t^3=x^3+\frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5=x^5+$ &c. Aufero autem t de z, & reftat $z-t=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{10}x^5-$ &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z-t+\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{5}x^5+$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reftat $z-t+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5=0$ quamproximè. Quare eft $z=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-$ &c. Sed fiquis in ufus trigonometricos me juffiffet exhibere expreffionem arcûs per tangentem; eam non hoc circuitu, fed directâ methodo quæfiviffem. INVERSIO SERIERUM.

8. Per hoc genus computi colliguntur etiam feries ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus conftantes; & radices affectarum æquationum magnâ ex parte extrahuntur. Sed ad hunc pofteriorem ufum adhibeo potiùs methodum in alterâ epiftolâ defcriptam tanquam generaliorem, & (regulis pro elifione fuperfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

9. Pro Regreffione vero ab areis ad lineas rectas, & fimilibus, poffunt hujufmodi *Theoremata* adhiberi.

10. THEOREMA I. Sit $z=ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5$, &c.

Et viciffim erit
$$y=\frac{z}{a}-\frac{b}{a^3}z^2+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3+\frac{5abc-5b^3-a^2d}{a^7}z^4+\frac{3a^2c^2-21ab^2c+6a^2bd+14b^4-a^3e}{a^9}z^5+\text{\&c.}$$

11. *Exempli gratiâ.* Proponatur æquatio ad aream hyperbolæ, $z=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c (e). Et fubftitutis in regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciffim exurgit, $y=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+$ &c.

12. THEOREMA II. Sit $z=ay+by^3+cy^5+dy^7+ey^9+$ &c.

(e) Vide Geometr. Analyt. c. IX. §. 34.

 Et

EXCERPTUM TERTIUM.

Et viciſſim erit
$$y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4} z^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5 + \frac{8abc - a^2 d - 12b^3}{a^{10}} z^7 + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5a^2c^2 - a^3 e}{a^{13}} z^9 + \&c.$$

13. *Exempli gratiâ.* Proponatur æquatio ad arcum circuli, $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \&c.$ Et ſubſtitutis in regulâ 1 pro a, $\frac{1}{6r^2}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d, &c. orietur $y = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} +$ &c (f).

EXCERPTUM III.

Ex Epiſtolâ Newtoni ad Walliſium, de radicibus æquationum fluxionalium extrahendis.

1. SUB finem epiſtolæ anni 1676 [*hæc ſunt verba* Walliſii] ſcribit [D. *Newtonus*] etiam Problema determinandi curvas per conditiones tangentium in ſuâ poteſtate eſſe, unà cum aliis difficilioribus; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe dicit duplici methodo, unâ concinniore, alterâ generaliore; & utramque literis tranſpoſitis celat: quæ in ordinem redactæ hanc ſententiam exhibent. *Una methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus. Altera tantùm in aſſumptione ſeriei*

ÆQUATIONIS INFINITÆ

(f) Duobus hiſce Newtonianis meritò tertium adjungatur Moivræi Theorema, cujus ope radices extrahantur infinitè quæ dicuntur affectæ.

Sit æquatio inter ſeries infinitas
$$\mathrm{a}z + \mathrm{b}z^2 + \mathrm{c}z^3 + \mathrm{d}z^4 + \mathrm{e}z^5 + . = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + cy^5 +$$
Ut extrahatur radix y, ponatur
$$y = \mathrm{A}z + \mathrm{B}z^2 + \mathrm{C}z^3 + \mathrm{D}z^4 + \mathrm{E}z^5 +$$
Hujus coefficientes his æquationibus definientur:
$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a}}{a}$$
$$\mathrm{B} = \frac{a^2\mathrm{b} - b\mathrm{a}^2}{a^3}$$
$$\mathrm{C} = \frac{a^4\mathrm{c} - ac\mathrm{a}^3 - 2ba^2\mathrm{ab} + 2b^2\mathrm{a}^3}{a^5}$$
$$\mathrm{D} = \frac{a^6\mathrm{d} - 2ba^4\mathrm{ca} + 2bac\mathrm{a}^4 + 6b^2a^2\mathrm{a}^2\mathrm{b} - 5b^3\mathrm{a}^4 - b\mathrm{b}^2a^4 + 3cba\mathrm{a}^4 - 3ca^3\mathrm{a}^2\mathrm{b} - da^2\mathrm{a}^4}{a^7}$$

$a^8\mathrm{e}$ —

riei pro quantitate quâlibet incognitâ ex quâ cætera commodè derivari possunt; & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad eruendos terminos assumptæ seriei. Harum methodorum secunda ex verbis jam recitatis absque ulteriore explicatione intelligi potest; priorem ab authore jam accepi ut sequitur. De Rad. Æquat. Flux. Extrahend.

2. Hæc methodus, ait, ejusdem est generis cum eâ pro extrahendo radices ex æquationibus affectis superiùs descriptâ. Pone quòd Problema resolvendum reducatur ad æquationem fluentes quantitates y & z unà cum earum fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quòd fluxio ipsius z uniformis sit. Ut hæc fluxio ex æquatione evanescat, pro eâ ponatur unitas, & manebit æquatio solas y, z & $\dot{y}$ involvens, *quam resolvendam* vocat. Proponitur inventio ipsius y in serie infinitâ convergente, quæ solam z involvet. Hoc in aliquibus æquationibus impossibile est; in aliis præparationem æquationum requirit, ubi verò directè confici possit resolutio est hujusmodi.

PROBLEMA.

3. *Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

TERMINI omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, & ipsarum y & $\dot{y}$ dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quàm ad hunc effectum requiritur; & sit kz^{λ} terminus infimæ dignitatis eorum, qui neque per y, ne-

$$\mathrm{E} = \frac{a^8\mathrm{e} - 2ba^6\mathrm{ad} + 6b^2a^4\mathrm{ca}^2 - 21b^2ac\mathrm{a}^5 - 16b^3a^2\mathrm{a}^3\mathrm{b} + 14b^4\mathrm{a}^5 + 2b^2\mathrm{b}^2a^4\mathrm{a} + 20bca^3\mathrm{a}^3\mathrm{b} + 6bda^2\mathrm{a}^5 - 2ba^6\mathrm{cb} + 4b^2a^4\mathrm{b}^2 - 4b^3a^2\mathrm{ba}^2 - 3ca^5\mathrm{ca}^2 + 3c^2a^2\mathrm{a}^5 - 3ca^5b^2\mathrm{a} - 4da^4\mathrm{a}^3\mathrm{b} - ea^3\mathrm{a}^5}{a^9}$$ Reductio Moivræana.

&c.

Vel hoc modo

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a}}{a}. \quad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{b} - b\mathrm{A}^2}{a}. \quad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{c} - 2b\mathrm{BA} - c.\mathrm{A}^3}{a}.$$

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d} - 2b.\mathrm{AC} - b\mathrm{B}^2 - 3c\mathrm{A}^2\mathrm{B} - d.\mathrm{A}^4}{a}.$$

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{e} - 2b.\mathrm{AD} - 2b\mathrm{BC} - 3c\mathrm{A}^2\mathrm{C} - 3c\mathrm{B}^2\mathrm{A} - 4d\mathrm{A}^3\mathrm{B} - e\mathrm{A}^5}{a}.$$

Harum investigationem Maclaurinus tradit Algebræ suæ Part II. Cap. X.

que

EXCERPTUM TERTIUM.

que per ejus fluxionem $\dot{y}$, neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $lz^{\mu}y\dot{y}^{\beta}$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex singulis seorsim numerum $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ sic, ut tot habeas ejusmodi numeros quot sunt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit dignitas primi termini seriei. Pro ejus coefficiente ponatur a, & in æquatione quæ *resolvenda* dicitur, scribe az^{ν} pro y, & $\nu az^{\nu-1}$ pro $\dot{y}$; ac termini omnes resultantes in quibus z ejusdem est dignitatis ac in termino kz^{λ}, sub propiis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debitè reducta dabit coefficientem a. Sic habes az^{ν} terminum primum seriei.

Operatio secunda.

4. Pro reliquis omnibus hujus seriei terminis nondum inventis pone p, & habebis æquationem $y=az^{\nu}+p$, & inde etiam æquationem $\dot{y}=\nu az^{\nu-1}+\dot{p}$. In resolvenda, pro y & $\dot{y}$ scribe hos eorum valores, & habebis resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y: & ex hâc resolvendâ primum extrahes terminum seriei p eodem modo atque terminum primum seriei totius, $y=az^{\nu}+p$, ex resolvendâ primâ extraxisti.

Operatio tertia et sequentes.

5. Dein tertiam resolvendam eâdem ratione invenias atque secundam invenisti, & ex eâ terminum tertium seriei totius extrahes. Et similiter resolvendam quartam invenies, & ex eâ quartum seriei terminum, & sic in infinitum. Series autem sic inventa erit radix æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

6. Ex æquatione $y^2\dot{z}^2-z^2\dot{z}\dot{y}-d^2z\dot{z}+dz\dot{z}^2=0$, extrahenda sit radix y. Pone $\dot{z}=1$, & æquatio evadet $y^2-z^2\dot{y}-dd+dz=0$, quæ est resolvenda. Jam verò terminus infimus, in quo nec y, neque $\dot{y}$ reperitur, est dd, qui ipsi kz^{λ} æquatus dat $\lambda=0$. Terminis reliquis y^2, $-z^2\dot{y}$ pone $lz^{\mu}y^{\alpha}\dot{y}^{\beta}$ æqualem successivè, & inde in primo casu habebis $\mu=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$; in secundo $\mu=2$, $\alpha=0$, & $\beta=1$.

Et

Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ fit in primo caſu o, in ſecundo -1. Unde ν eſt o, & az^{ν} & $\nu az^{\nu-1}$ ſunt a & o; quarum ultimæ duæ a & o in reſolvendâ pro y & $\dot{y}$ ſcriptæ, producunt $aa+oz^2-dd+dz$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu o, poſiti æquales nihilo dant $a=d$. Unde primus ſeriei terminus az^{ν} evadit d. DE RAD. ÆQUAT. FLUX. EXTRAHEND.

Operatio ſecunda.

7. Pro terminis reliquis pone p, & habebis æquationem $y=d+p$, & inde $\dot{y}=\dot{p}$; qui valores in reſolvendâ pro y & $\dot{y}$ ſubſtituti dant reſolvendam novam $2d\dot{p}+p\dot{p}-zzp+dz=0$, ubi p & $\dot{p}$ vices ſubeunt ipſarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur eſt dz, qui cum termino kz^{λ} collatus dat $\lambda=1$. Terminis reliquis $2d\dot{p}$, $p\dot{p}$ & $-zzp$ pone $lz^{\mu}p^{\alpha}\dot{p}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè, & inde in primo caſu habebis $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in ſecundo $\mu=0$, $\alpha=2$, & $\beta=0$; & in tertio $\mu=2$, $\alpha=0$, & $\beta=1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit primo caſu 1, in ſecundo $\frac{1}{2}$, in tertio o. Unde ν eſt 1, & az^{ν} & $\nu az^{\nu-1}$ ſunt az & a. Termini duo ultimi az & a in reſolvendâ pro p & $\dot{p}$ reſpectivè ſcripti, producunt $2daz+a^2z^2-az^2+dz$. Et termini $2daz$ & dz, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 1, poſiti æquales nihilo, dant $a=-\frac{1}{2}$. Unde az, terminus primus ſeriei, p fit $-\frac{1}{2}z$.

Operatio tertia.

8. Pro terminis reliquis nondum inventis pone q, & habebis æquationem $p=-\frac{1}{2}z+q$, & inde $\dot{p}=-\frac{1}{2}+\dot{q}$: qui valores pro p & $\dot{p}$ in reſolvendâ noviſſimâ ſubſtituti producunt reſolvendam novam $2d\dot{q}-zq+q\dot{q}+\frac{3}{4}zz-zzq=0$. Ubi q & $\dot{q}$ vices ſupplent ipſorum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur eſt $\frac{3}{4}zz$, qui cum kz^{λ} collatus dat $\lambda=2$. Terminis reliquis $2d\dot{q}$, $-zq$, $+q\dot{q}$, $-zzq$ pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè; & inde in primo caſu habebis $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in ſecundo, $\mu=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$; in tertio, $\mu=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$: in quarto, $\mu=2$, $\alpha=0$, $\beta=1$: & inde $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit in primo caſu 2, in ſecundo, tertio, & quarto, 1.

Excerptum Tertium.

Et hinc v eſt 2, vel az^v & vaz^{v-1} ſunt az^2 & $2az$: qui valores in reſolvendâ pro $\dot{q}$ & q ſubſtituti dant $2daz^2 - az^3 + aaz^4 + \frac{3}{4}zz - 2az^3$; & termini $2dazz + \frac{3}{4}zz$, in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 2, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde az^v terminus primus ſeriei q evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

Operatio quarta.

9. Pro reliquis ſeriei terminis nondum inventis pone r, & habebis æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde reſolvendam novam $2d\dot{r} + \frac{9z^3}{8d} - zr + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zzr}{4d} + rr - zz\dot{r} = 0$; & ex eâ per methodum ſuperiorem habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$ terminum primum ſeriei r. Et ſic pergitur in infinitum.

10. Eſt igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd} -$ &c. Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures (g).

11. Et eâdem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones ſecundas, tertias, quartas, ($\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$,) aliaſque involventium, extrahi poſſe (h).

12. His utitur radicum extractionibus ubi aliæ methodi nil proſunt. Nam in epiſtolâ prædictâ anni 1676 docet, quòd in ſolutione problematum de tangentibus inverſorum, caſus aliqui dantur in quibus hæc methodus generalis non requiritur: & particulariter, ſi in triangulo rectangulo quod ab ordinatâ, tangente, & interjacente parte abſciſſæ conſtituitur, relatio duorum quorumlibet è lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur; problema abſque methodo hâcce generali ſolvi poterit.

13. Methodi autem hæ omnes, tam particulares quàm generales, collectim

(g) Harum operationum rationem Maclaurinus optimè explicavit Algebræ ſuæ Part II. Cap. X.

(h) Aliam etiam viam reſolvendi æquationes, quæ fluxionibus ſunt implicitæ, Newtonus in Geometria Analyticâ docet capite ejus Libri 4. Sect. 2. quæ cùm non minùs generalis ſit quàm illa quæ in hoc excerpto tradita eſt, & computationum facilitate, meo equidem judicio, longè illi antecellat, miror profectò eam ab omnibus ferè relictam, cùm hæc, ſubtilior ſanè ſed uſu difficilior, diligentiſſimè exculta ſit.

(i) I.

collectim fumptæ, folutionem exhibent fecundæ partis problematis, quod *Newtonus* fub initio iftius epiftolæ his verbis propofuit. *Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice versâ.* Nam tota fluxionum methodus in hujus directâ & inverfâ folutione confiftit. ARCUS EX SINU.

EXCERPTUM IV.

Ex epiftolâ Newtoni ad Oldenburgum primâ.

De Problematis per Series Infinitas Refolvendis.

QUOMODO ex æquationibus, fic ad infinitas feries reductis, Areæ & Longitudines curvarum, Contenta & Superficies folidorum, vel quorumlibet fegmentorum figurarum quarumvis, eorumque centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam curvæ omnes mechanicæ ad ejufmodi æquationes infinitarum ferierum reduci poffint, indeque problemata circa illas refolvi, perinde ac fi Geometricæ effent; nimis longum foret defcribere: fufficiat fpecimina quædam talium problematum recenfuiffe: inque iis, brevitatis gratiâ, literas A, B, C, D, &c. pro terminis feriei, ficut fub initio, nonnunquam ufurpabo.

1. *Si ex dato finu recto, vel finu verfo, arcus defideretur:* fit radius r, & finus rectus x: eritque arcus $= x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ &c. hoc eft, $= x + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr}\text{A} + \frac{3 \times 3xx}{4 \times 5rr}\text{B} + \frac{5 \times 5xx}{6 \times 7rr}\text{C} + \frac{7 \times 7xx}{8 \times 9rr}\text{D} +$ &c.

Vel, fit d diameter, ac x finus verfus; & erit arcus æqualis $d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. hoc eft, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3x^2}{40d^2} + \frac{5x^3}{112d^3} +$ &c (i).

2. Si viciffim, *ex dato arcu defideretur finus:* fit radius r, & arcus

(i) 1. PUNCTO A manente (vid. fig. p. 299.) circumduci puta rectam AB datæ longitudinis, quæ termino fuo mobili B circuli $\text{B}B\text{C}$ circumflexum fcribat. Sit AB fitus quivis rectæ revolventis, et à puncto B in fitum ejus primum AB deducatur ad perpendiculum recta BE: et per idem punctum B ducatur BF quæ circulum in B contingat, rectæque AB productæ in F occurrat. Fluxio arcûs BB ad fluxionem rectæ BE rationem habet eam quam BF ad BE (Introduct. ad Quadrat. Curv. § 4.) five eam quam AB ad AE. Hinc fi rectam datam AB litera r defignet, arcum BB litera z, finum ejus rectum BE litera x, erit $\dot{z} : \dot{x} = r : \text{AE}$. Hoc eft ARCU

EXCERPTUM QUARTUM.

arcus z: eritque finus rectus $= z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ &c. hoc eft, $= z - \frac{zz}{2 \times 3rr}\,A - \frac{zz}{4 \times 5rr}\,B - \frac{zz}{6 \times 7rr}\,C -$ &c. Et finus verfus

EX SINU.

$\dot{z} : \dot{x} = r : \sqrt{r^2 - x^2}$. Quare $\dot{z} = \frac{\dot{x}r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Hoc eft, fi fractio $\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ convertatur in feriem infinitam (quod perficietur, fi primùm extrahatur radix quadratica quantitatis $r^2 - x^2$, tum quantitas r radice illâ dividatur)

$$\dot{z} = \dot{x} \times 1 + \frac{x^2}{2r^2} + \frac{3x^4}{8r^4} + \frac{5x^6}{16r^6} + \frac{35x^8}{128x^8} +$$

$$\text{Ergo} \quad z = x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +$$

SIN. EX ARC.

Et invertendo, ope Theorematis 2. Excerpti II.

$$x = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} +$$

2. *Cor.* Fluxio arcûs circularis ad finûs fluxionem rationem habet quam radius ad finum complementi.

ARC. EX SIN. VERS.

3. (k) FLUXIO arcûs BB ad fluxionem rectæ BE rationem habet quam BF ad FE (Introduct. Quad. Curv. §4.) hoc eft, quam AB ad BE. Si igitur litera d circuli diametrum BC defignet, litera z arcum BB, finum ejus verfum BE litera y, erit $\dot{z} : \dot{y} = \frac{1}{2}d : BE = d : 2BE = d : 2\sqrt{dy - y^2}$. Quare $\dot{z} = \frac{d\dot{y}}{2\sqrt{dy - y^2}}$.

Vel fi fractio $\frac{d}{2\sqrt{dy - y^2}}$ convertatur in feriem infinitam, $\dot{z} = \dot{y} \times \frac{1}{2}d^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3y^{\frac{3}{2}}}{16d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5y^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{5}{2}}} + \frac{35y^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{7}{2}}} +$. Ergo $z = d^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3y^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5y^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \frac{35y^{\frac{9}{2}}}{1152d^{\frac{7}{2}}} +$, Quæ eft formula generalis arcûs è dato finu verfo.

SIN. VERS. EX ARC.

4. Et hanc feriem invertendo ope Theorematis 2. Excerpti II.

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}z - \frac{1}{6d^{\frac{5}{2}}}z^3 + \frac{1}{120d^{\frac{9}{2}}}z^5 - \frac{1}{5040d^{\frac{13}{2}}}z^7 +$$

Unde, quadraticè multiplicando, conficitur

$$y = \frac{1}{d}z^2 - \frac{1}{3d^3}z^4 + \frac{2}{45d^5}z^6 - \frac{1}{315d^7}z^8 +$$

Vel pro literâ d fymbolo $2r$ fubftituto

$$y = \frac{1}{2r}z^2 - \frac{1}{24r^3}z^4 + \frac{1}{720r^5}z^6 - \frac{1}{40320r^7}z^8 +$$

Quæ eft formula generalis finûs verfi ex arcu dato. Unde ftatim elicitur finus complementi

$$r - y = r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} - \frac{z^6}{720r^5} + \frac{z^8}{40320r^7} + .$$

5. *Cor.* Fluxio arcûs cujufpiam circularis ad fluxionem finûs complementi, five finûs fui verfi, rationem habet quam radius ad finum.

SERIES GREGORIANÆ.

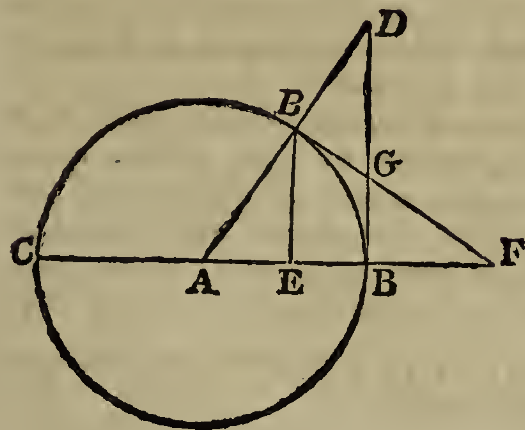
6. HAUD diffimilis eft inventio ferierum, quibus arcûs longitudinem ex tangente datâ, et tangentis viciffim ex arcu, Jacobus Gregorius omnium primus æftimare docuit.

7. Ducatur enim per punctum B recta BD quæ circulum BBC in loco B contingat, rectæque BF circulum utique in B contingenti in G occurrat. Cùm igitur recta AB, circa punctum A volubilis, curvæ BB rectæque BD in locis B, D, occurrat, recta vero BG curvam in B contingat, rectæque BD in G occurrat, fluxio rectæ BD erit ad fluxionem curvæ BB ut rectangulum AD × DG ad rectangulum AB × BG. (Introduct. ad Quad. Curv. § 9.) Sed propter angulos DBG, DBA, rectos, et angulum BDG triangulis duobus ADB, GDB, communem, triangula illa erunt inter fe fimilia, et latera eorum angulos æquales ambientia eafdem inter fe proportiones habebunt. Quare AD eft ad AB, vel ad AB,

ut

versus $= \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ &c. hoc est, $= \frac{zz}{1 \times 2r} - \frac{zz}{3 \times 4rr}$ A $-$ $\frac{zz}{5 \times 6rr}$ B $-$ $\frac{zz}{7 \times 8rr}$ C $-$ &c (k). Sinus ex Arcu.

3. *Si*



ut GD ad GB. Rectangula igitur AD $\times$ DG, $AB \times BG$ inter se similia sunt. Figuræ autem similes sunt inter se sicut quadrata è lateribus homologis. Erit igitur rectangulum AD $\times$ DG ad rectangulum $AB \times BG$ sicut quadratum ex AD ad quadratum ex AB. Quare fluxio rectæ BD erit ad fluxionem arcûs BB ut quadratum ex AD ad quadratum ex AB. Hoc est, si litera t rectam BD designet, $\dot{t} : \dot{z} = t^2 + r^2 : r^2$. Ergo $\dot{z} = \frac{r^2}{r^2 + t^2} \dot{t}$. Hoc est, fractione $\frac{r^2}{r^2 + t^2}$ in seriem infinitam per divisionis operam resolutâ, Series Gregorianæ.

$$\dot{z} = \dot{t} - \frac{t^2\dot{t}}{r^2} + \frac{t^4\dot{t}}{r^4} - \frac{t^6\dot{t}}{r^6} + \frac{t^8\dot{t}}{r^8} - \frac{t^{10}\dot{t}}{r^{10}} +$$

Ergo $z = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11r^{10}} +$, Arc. ex Tang.

Et hanc seriem invertendo ope Theorematis 2. Excerp. II.

$$t = z + \frac{1}{3r^2} z^3 + \frac{2}{15r^4} z^5 + \frac{17}{315r^6} z^7 + \frac{62}{2835r^8} z^9 +$$ Tang. ex Arc.

(vide Commerc. Epist. N°. XX.)

8. *Cor.* Fluxio tangentis ad fluxionem arcûs rationem habet secantis ad radium duplicatam.

9. Formula quâ Gregorius secantem definivit ex arcu, ex illâ Newtoni quæ ex arcu sinum complementi repræsentat, facilè deducenda est. Cùm enim horum trium, secantis, radii et sinûs complementi continua sit analogia, ad secantem æstimandam id nimirum opus erit, quadratum è radio dividere complementi sinu. Jam verò inventus est sinus complementi arcûs $z = r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} - \frac{z^6}{720r^5} + \frac{z^8}{40320r^7} -$. (§. 4 hujus) Quare secans, sive $\frac{r^2}{r - \frac{z^2}{2r} + \frac{z^4}{24r^3} +}$, $= r + \frac{z^2}{2r} + \frac{5}{24r^3} z^4 +$ Sec. ex Arc. $\frac{61}{720r^5} z^6 + \frac{277}{8064r^7} z^8 + \frac{50521}{3628800r^9} z^{10} +$; et hæc est formula generalis Gregoriana secantis ex arcu. (Vide Commercium Epist. N°. XX.)

10. Atque hæ quidem series vulgò notæ sunt, et quotidiano ferè Geometrarum usu frequentatæ. Sunt autem aliæ quædam minùs pervagatæ, ab eodem illo Gregorio profectæ, subtilissimæ indaginis; quarum utique compendio Secantem et Tangentem arcûs cujusque, uti loquuntur, Logarithmicam, sive logarithmum potiùs rationis quam secans quæque vel tangens ad radium habeat, vir acutissimus generaliter definivit ex arcu. Ad harum serierum inventionem Theoremate Geometrico uno atque altero via nobis munienda est.

THEOREMA I.

11. *Fluxio secantis est ad fluxionem arcûs ut rectangulum sub secante et tangente ad quadratum ex circuli radio.*

Recta AE, circa punctum A volubili, circumflexum circuli scribente, ducatur recta BD, quæ circulum in B contingat, rectæque volubili, situm quemvis novum AB obtinenti, in D occurrat. Dico fluxionem rectæ AD esse ad fluxionem arcûs BB ut rectangulum AD $\times$ DB ad quadratum ex AB. Fluxio rectæ AD est ad fluxionem rectæ DB ut DB ad DA (Introduct. ad Quad. Curv. § 7.) sive ut rectangulum DB $\times$ DA ad quadratum ex DA. Fluxio autem rectæ DB est ad fluxionem arcûs BB, ut quadratum ex DA ad quadratum ex AB. (§. 8. hujus.) Erit igitur ex æquo fluxio rectæ AD ad fluxionem arcûs BB ut rectangulum AD $\times$ DB ad quadratum ex AB. Q. E. D.

Excerptum Quartum.

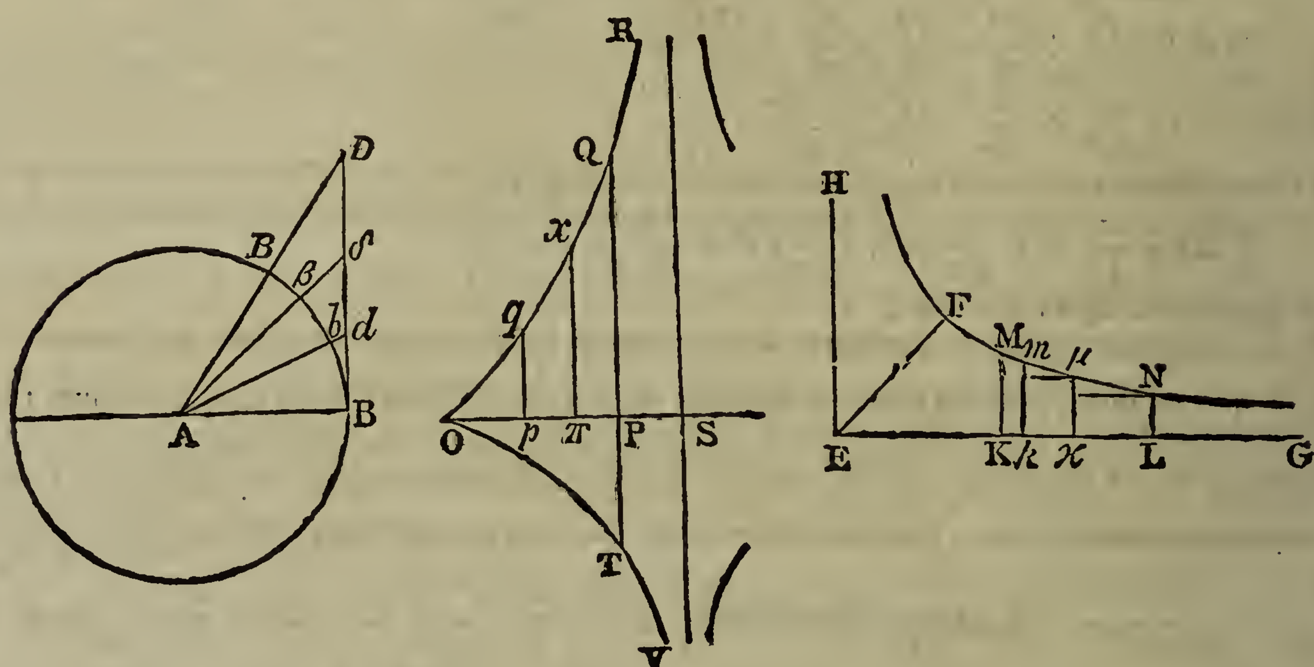
3. *Si arcus capiendus sit in ratione datâ ad alium arcum:* esto diameter

THEOREMA II.

De Seriebus

12. *Sit* B*B arcus circuli, cujus centrum* A *radius* AB. *Sit hyperbola æquilatera* FMN, *cujus centrum* E, *semiaxis* EF, *asymptotæ rectæ* EG, EH *ad perpendiculum compositæ. Harum in alterutrâ, puta* EG, *capiatur* EK *radio circuli, sive rectæ* AB *æqualis; et* EL *æqualis rectæ* AD *arcûs* B*β secanti: et à punctis* K, L *educantur ad perpendiculum rectæ* KM, LN, *hyperbolam usque; cui occurrant illæ in punctis* M, N. *Sit etiam curva* OQR, *cujus ea sit natura, ut si in axe ejus,* OS, *capiatur* OP *arcui cuipiam circuli, æqualis, recta* PQ, *à puncto* P *ad perpendiculum educta curvam usque, æqualis sit ejusdem arcûs tangenti. His positis, si* OP *capiatur in axe curvæ æqualis arcui illi* B*B, cujus secanti,* AD, *recta* EL *accepta est æqualis in asymptotâ hyperbolæ, area hyperbolica* KLMN *ad aream* OPQ *datam rationem geret: nempe eam, quam dimidium quadrati ex* EF, *semiaxe hyperbolæ, habet ad quadratum ex circuli radio* AB.

In figurâ harum trium mediâ omissæ sunt rectæ per puncta Q, x, q, O ducendæ, ut rectangula QP × Pπ, $x\pi \times \pi p$, $qp \times po$ perficerentur.



Dividatur enim arcus B*B* in partes quotlibet, sive æquales sive inæquales B*b*, *bβ*, *βB*. Junctæ A*b*, Aβ tangenti BD in punctis *d*, δ occurrant. Capiantur in hyperbolæ asymptotâ EG rectæ E*k*, Eκ secantibus A*d*, Aδ, et in curvæ OR axe OS capiantur o*p*, oπ arcubus B*b*, Bβ æquales. Ita rectarum KL, OP in partes numero æquales divisio fiet; quarum illæ K*k*, *k*κ, κL, secantium AB, A*d*, Aδ, AD differentiis, hæ o*p*, *p*π, πP, arcubus B*b*, *bβ*, *βB*, ordine sumendis, æquales erunt. A divisionum punctis, *k*, κ; *p*, π, educantur ad perpendiculum curvas usque, illic quidem *km*, κμ, hic vero *pq*, π*x*: compleanturque rectangula K*m*, *k*μ, κN; o*q*, *p*x, πQ. Rectangulum κN ad rectangulum πQ rationem habet compositam è rationibus rectæ NL ad PQ rectæque κL ad πP; sive è rationibus rectæ NL ad rectam BD, rectæque κL ad arcum *B*β. Rectanguli quoque μ*k* ad rectangulum *xp* composita est ratio è rationibus rectæ μκ ad rectam π*x* rectæque κ*k* ad π*p*: hoc est, cùm recta π*x*, ex curvæ OR naturâ, tangenti Bδ sit æqualis, è rationibus rectæ μκ ad tangentem Bδ, rectæque κ*k* ad arcum *βb*. Ratio denique rectanguli *m*K ad rectangulum o*q* composita est è rationibus rectæ *mk* ad tangentim B*d*, rectæque K*k* ad arcum *b*B. Jam verò si numerus arcuum B*b*, *bβ*, *βB* infinitè augeatur, magnitudinibus singulorum infinitè decrescentibus, unde partium quoque rectæ KL videlicet ipsarum K*k*, *k*κ, κL, necnon partium rectæ OP, videlicet ipsarum o*p*, *p*π, πP numerus pariter infinitè crescet, magnitudinibus singularum infinitè imminutis, hoc inquam si fiat, ratio ultima evanescentis rectæ Lκ ad arcum evanescentem *B*β, ea erit quæ est rectanguli AD × DB ad quadratum ex AB: (per Theor. I.) nempe cùm illa Lκ secantium quidem, AD, Aδ, sit differentia, hæc *B*β arcuum verò; et differentiæ quantitatum evanescentes fluxionum proportiones ultimò inter se asciscant. (Geomet. Flux. Prop. I.) Quæ igitur è rationibus rectæ LN ad rectam BD rectæque Lκ ad arcum *B*β composita est ratio, hæc inquam, rectâ Lκ arcuque Bβ evanescentibus, fit illi quidem ultimò æqualis, quæ componitur e rationibus rectæ LN ad rectam BD rectangulique AD × DB ad quadratum ex AB. Vel è rationibus rectanguli LN × EL, ad EL × BD vel AD × BD, ejusdemque

AD

diameter $= d$, chorda arcûs dati $= x$, & arcus quæſitus ad arcum illum — Arcus nz ex Arcu z.

AD × BD ad quadratum ex AB. Ex hiſce verò rectanguli LN × EL ad quadratum ex AB compoſita eſt ratio. (El. Lib. VI. Def. 5.) Quæ igitur è rationibus rectæ LN ad rectam BD, rectæque Lϰ ad arcum $B\beta$, ultimò ſcilicet evaneſcente arcu illo, compoſita eſt ratio, quæ ex priùs oſtenſis rectangulorum evaneſcentium Nϰ, πQ, ultima inter ipſa ratio eſt, hæc eadem rectanguli LN × EL ad quadratum ex AB eſt ratio. Sed è naturâ hyperbolæ æquilateræ rectangulum LN × EL, et dimidium quadrati ex EF inter ſe ſunt æqualia. Rectanguli igitur LN × EL et dimidii quadrati ex EF ad quadratum ex AB eadem eſt ratio (Elem. V. 7.) Rectangulorum igitur evaneſcentium Nϰ, Qπ, ea quidem inter ipſa ultima eſt ratio, quam dimidium quadrati ex EF habet ad quadratum ex AB. Eodemque prorſùs modo evaneſcentium μk, xp necnon mK, qo eadem efficietur ratio ultima communis; nimirum data illa, quæ eſt dimidii quadrati ex EF, ſemiaxe hyperbolæ, ad quadratum ex AB circuli radio. Quare et arearum KMNL, OPQ eadem inter ipſas ratio erit (De Rat. Prim. et Ult. Lem. 4.) Q. E. D. — Gregorianis.

13. *Cor.* In rectâ QP ſumatur PT ad quam PQ rationem habeat quam quadratum ex AB ad dimidium quadrati ex EF, et duci intelligatur curva OTV, quam punctum T perpetuò tangat. Si OP arcui illi $B\mathcal{B}$ ſit æqualis, cujus ſecanti AD recta EL accepta eſt æqualis, area OPT areæ hyperbolicæ MKLN æqualis erit. Etenim cùm duæ ſint curvæ, OQR, OTV, axe communi, OS, quarum ordinatæ, binas utique conferendo ab iiſdem axis punctis exeuntes, datam inter ſe rationem habent, areæ etiam ipſæ, OPQ, OPT, inter ſe datam ordinatarum rationem ſervant (De Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor. H. 1.) Area igitur OPT erit ad aream OPQ ut PT ad PQ; ſive ut dimidium quadrati ex EF ad quadratum ex AB (ex Conſtruct.) ſive denique ut area KLNM ad aream OPQ. Arearum igitur KLNM, OPT ad aream OPQ eadem eſt ratio. Areæ igitur illæ KLNM, OPT ſunt inter ſe æquales (El. 5. 9.) Q. E. D.

14. Area KLNM Logarithmus eſt rationis rectæ EL ad rectam EK, ſive ſecantis AD ad radium AB, pro modulo $\frac{1}{2}$EF^2. Cùm igitur æquales inter ſe ſint areæ illæ KLNM, OPT; ſi poſterioris menſura ad formulam aliquam generalem, ex arcu $\mathcal{B}$B tanquam radice procreatam, revocari poſſit, per eandem formulam logarithmus quidem ille pro modulo ſuo generaliter definietur ex arcu. Talem verò areæ OPT formulam hæc ferè computatio dabit, in promptu ſanè poſita et leviſſimi laboris.

Literâ z deſignante arcum $B\mathcal{B}$, vel illi æqualem rectam OP, literâ t tangentem BD vel illi æqualem rectam PQ, literâ r circuli radium AB, literâ denique B deſignante dimidium quadrati ex EF; cùm ex curvæ OTV naturâ PT ſit ad PQ ut dimidium quadrati ex EF ad quadratum ex AB, hoc eſt cùm PT ſit ad t ut B ad r^2: hinc ſanè efficitur PT $= \frac{B}{r^2}t$. Et cùm ſemper inter ſe æquales ſint arcus $B\mathcal{B}$ rectaque OP, fluxio quoque hujus illius fluxioni ſemper æqualis erit. (Geometr. Flux. Prop. II.) Hoc eſt $\dot{OP} = \dot{z}$. Rectangulum igitur PT × $\dot{OP}$, ſive fluxio areæ OPT, $= \frac{B}{r^2}t\dot{z}$. Vel pro t ſubſtituendo ſeriem illam, $z + \frac{1}{3r^2}z^3 + \frac{2}{15r^4}z^5 +$, cujus ſumma, ſi infinitè illa producatur, rectæ t ultimò ſit æqualis, (§. 7. hujus) fluxio areæ OPT $= \frac{B}{r^2} \times z\dot{z} + \frac{1}{3r^2}z^3\dot{z} + \frac{2}{15r^4}z^5\dot{z} + \frac{17}{315r^6}z^7\dot{z} + \frac{62}{2835r^8}z^9\dot{z} +$,

Ergo area OPT $=$ B $\times \frac{1}{2r^2}z^2 + \frac{1}{12r^4}z^4 + \frac{1}{45r^6}z^6 + \frac{17}{2520r^8}z^8 + \frac{31}{14175r^{10}}z^{10} +$. Atque hæc eſt formula generalis logarithmi rationis ejus quam ſecans arcûs cujuſpiam ad radium habet pro modulo utique B. Quòd ſi ipſius radii logarithmus pro eodem modulo deſignetur literâ R, hæc erit Secantis Logarithmicæ formula generalis ex arcû, R $+ \frac{B}{2r^2}z^2 + \frac{B}{12r^4}z^4 + \frac{B}{45r^6}z^6 + \frac{17B}{2520r^8}z^8 + \frac{31B}{14175r^{10}}z^{10} +$. (Vide Commerc. Epiſtol. N° XX.) — Sec. Log. ex Arc.

15. Hinc etiam formulam generalem ſinûs complementi logarithmici ex arcu effingere in promptu eſt. Nempe cùm quadratum è radio æquale ſit rectangulo ſub ſecante & ſinu complementi, erit ſinus complementi logarithmicus dupli logarithmi radii & ſecantis logarithmicæ differentia; cujus hæc erit formula generalis ex arcu; R $- \frac{B}{2r^2}z^2 - \frac{B}{12r^4}z^4 - \frac{B}{45r^6}z^6$. — Cosin. Log. ex Arc.

T H E-

Excerptum Quartum.

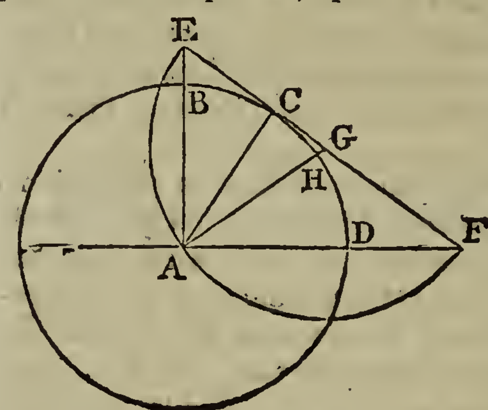
illum datum ut n ad 1; eritque arcûs quæſiti chorda $= nx + $
$1 - nn$.

THEOREMA III.

De Seriebus

16. *Tangentis arcûs cujuſpiam circularis et tangentis ejuſdem arcûs complementi ſumma quidem dimidiatæ ſecanti, differentia verò dimidiata tangenti, complementi arcûs dupli eſt æqualis.*

Circuli cujus centrum A, radius AB, ſit arcus quiſpiam BC. A centro A educatur AD ad perpendiculum ſupra AB, quæ circulo in D occurrat. Per C ducatur recta quæ circulum in C contingat; et utrinque producta rectis AB, AD productis in punctis E, F occurrat. Recta EF media dividatur in puncto G, et jungatur AG.



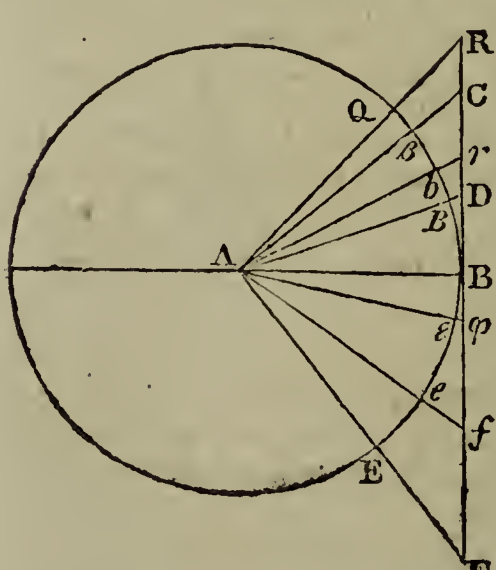
Propter angulum ad A rectum arcus BD totius circuitûs quadrans erit. Ergo arcus CD complementum erit arcûs CB, et recta CF tangens complementi arcûs BC, cùm recta CE ipſius quidem BC tangens ſit. Erit igitur GE vel GF, tangentis arcûs BC et tangentis complementi ejuſdem ſumma dimidiata; erit autem GC dimidiata earundem differentia. Dico rectam GE quidem, vel GF, ſecanti, rectam verò GC tangenti complementi dupli arcûs BC æqualem eſſe. Recta AG circulo in H occurrat. Triangulo autem EAF circumſcribatur circulus. Propter angulum ad A rectum (talis enim factus eſt) recta EF circuli, triangulo EAF circumſcripti, diameter erit. Quare punctum G, cùm medium ſit rectæ EF, circuli illius centrum erit. Tres igitur GE, GA, GF inter ſe æquales. Propter æquales verò GA, GF, anguli GAF, GFA inter ſe æquales ſunt. Sed propter angulos ad A, C rectos, anguli etiam CAE, CFA, vel GFA, inter ſe ſunt æquales (El. VI. 8.) Angulus igitur GAF angulo CAE æqualis; ſive angulus HAD angulo CAB. Arcus igitur HD, BC inter ſe æquales. Duo igitur BC, HD, ſimul ſumpti, duplo arcûs BC æquales ſunt. Tres verò BC, HD, HC quadrantem abſolvunt. Ergo HC complementum eſt dupli arcûs BC. Eſt autem recta GA, cui GF, GE oſtenſæ ſunt æquales, eſt, inquam, GA ſecans arcûs HC, recta verò GC ejuſdem tangens. Ergo recta GE vel GF ſecanti, recta CG verò tangenti complementi dupli arcûs BC eſt æqualis. Q. E. D.

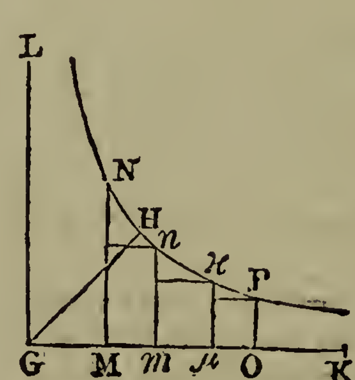
17. *Cor.* Rectangulum ſub tangente arcûs cujuſpiam, et ſecante complementi arcûs dupli, dimidio quadrati ex ſecante eſt æquale.

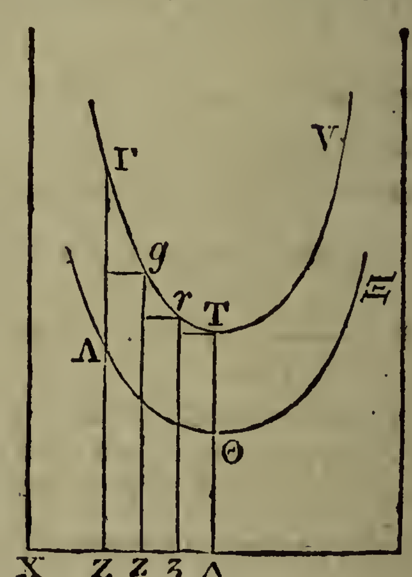
Rectangulum enim ſub EC, GA æquale eſt rectangulo ſub EC, EG; quod dimidium eſt rectanguli ſub EC, EF, cui æquale eſt quadratum ex ſecante EA (El. VI. 8.) Rectangulum igitur ſub EC, GA hoc eſt ſub tangente arcûs BC et ſecante complementi dupli arcûs BC, dimidio quadrati ex ſecante EA æquale eſt. Q. E. D.

THEOREMA IV.

18. *Circuli, cujus centrum* A, *radius* AB, *ſit arcus quilibet* B*B*. *Rectæ* BD, *circulum in* B *contingenti, juncta* A*B* *in* D *occurrat, ut ſit* BD *tangens arcûs* B*B*. *Sit arcus* BE *complementum dupli arcûs* B*B*, *junc-*







taque

$\frac{1-nn}{2\times 3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times 5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times 7dd}xxC + \frac{49-nn}{8\times 9dd}xxD + \frac{81-nn}{10\times 11dd}xxE +$ &c. ARCUS xz EX ARCU z.

Ubi

taque AE *rectæ* DB *in* F *occurrat, ut ſit recta* AF *ſecans complementi dupli arcûs* BB. *Sit hyperbola æquilatera poſitione data,* NHP, *cujus centrum* G, *ſemiaxis recta* GH *datæ cujuſvis longitudinis, aſymptotæ rectæ* GK, GL *poſitione datæ, et ad perpendiculum inter ſe compoſitæ. Harum in alterutrâ, puta in* GK *capiatur* GO *circuli radio* AB *æqualis, et* GM *æqualis rectæ* BD *arcûs* BB *tangenti; et è punctis* O, M *educantur ad perpendiculum* OP, MN *hyperbolam uſque; cui illæ in punctis* P, N *occurrant. Sit etiam curva* ΓTV, *cujus ea ſit natura, ut ſi in rectâ poſitione datâ,* XΔ, *à dato in eâ puncto* X *initio ſumpto, capiatur* XZ *arcui cuilibet circuli æqualis, recta* ZΓ, *à puncto* Z *ad perpendiculum educta curvam uſque, ſecanti complementi dupli arcûs æqualis ſit. His poſitis, ſi in axe curvæ capiatur* XΔ *æqualis dimidio quadrantis,* XZ *verò æqualis arcui illi* BB, *cujus tangenti,* BD, *accepta eſt* GM *in aſymptotâ hyperbolæ æqualis, eductis ad perpendiculum* ΔT, ZΓ, *area hyperbolica* POMN *ad aream* ΔTΓZ *datam rationem habebit: nimirum duplicatam ejus quam ſemiaxis hyperbolæ* GH *habet ad circuli radium* AB. GREGORIANIS.

19. CAPIATUR enim arcus BQ æqualis dimidio quadrantis; diviſo autem arcu BQ, differentiâ utique arcûs BB et dimidii quadrantis, in partes quotlibet ſive æquales ſive inæquales, Bb, $b\beta$, βQ junctæ Ab, Aβ, AQ productæque tangenti BD in punctis r, C, R occurrant. Sumantur arcus Be, Bϵ duplorum arcuum Bb, Bβ complementa; junctæque Ae, Aϵ et productæ rectæ BF in punctis f, φ, occurrant. In aſymptotâ hyperbolæ GK, ſumantur Gm, Gμ tangentibus Br, BC; in axe verò curvæ ΓTV, ſumantur Xz, Xζ arcubus Bb, Bβ æquales. Ita rectarum OM, ΔZ in partes numero æquales diviſio fiet, quarum illæ Oμ, μm, mM tangentium differentiis RC, Cr, rD; hæ $\Delta\zeta$, ζz, zZ arcubus Qβ, βb, bB æquales erunt. A diviſionum punctis, μ, m; ζ, z, educantur ad perpendiculum curvas uſque, illic quidem $\mu\varkappa$, mn, hîc verò $\zeta\gamma$, zg, compleanturque rectangula Pμ, $\varkappa m$, nM; Tζ, γz, gZ. Rectangulum Pμ ad rectangulum Tζ rationem habet compoſitam è rationibus rectæ PO ad rectam ΔT, rectæque Oμ ad rectam $\Delta\zeta$: vel, cùm recta ΔT, ex naturâ curvæ ΓTV, circuli radio AB ſit æqualis, è rationibus rectæ PO ad rectam AB rectæque RC ad arcum Qβ. Rectangulum quoque $m\varkappa$ ad rectangulum γz rationem habet compoſitam è rationibus rectæ $\varkappa\mu$ ad rectam $\gamma\zeta$ rectæque μm ad rectam ζz; vel è rationibus rectæ $\varkappa\mu$ ad rectam Aφ rectæque Cr ad arcum βb. Recta enim $\gamma\zeta$, ex naturâ curvæ STV, rectæ Aφ eſt æqualis; nempe cùm Aφ ſecans ſit arcus Bϵ qui complementum eſt dupli arcûs Bβ, cui abſciſſa Xζ ponitur æqualis. Ratio denique rectanguli nM ad rectangulum gZ compoſita eſt è rationibus rectæ nm ad rectam Af, rectæque rD ad arcum bB.

Jam verò ſi arcurum Qβ, βb, bB numerus infinitè augeatur, magnitudinibus ſingulorum infinitè decreſcentibus, unde partium quoque rectæ OM, videlicet ipſarum Oμ, μm, mM; necnon partium rectæ ΔZ, videlicet ipſarum $\Delta\zeta$, ζz, zZ numerus pariter infinitè creſcet, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus; hoc inquam ſi fiat, ratio ultima evaneſcentis RC ad evaneſcentem Qβ ea erit, quæ eſt quadrati ex AR ad quadratum ex AQ vel AB. (§ 8. hujus.) Quæ igitur è rationibus rectæ PO ad rectam AB rectæque RC ad arcum Qβ compoſita eſt ratio, ultimò ſcilicet, arcu Qβ rectâque RC evaneſcente, ea illi erit æqualis, quæ componitur è rationibus rectæ PO ad rectam AB et quadrati ex AR ad quadratum ex AB; ſive è rationibus rectæ PO ad rectam AB numerique binarii ad unitatem. Nam propter angulum ABR rectum, et ſemirectum RAB, quadratum ex AR duplum eſt quadrati ex AB. Quæ igitur è rationibus rectæ OP ad rectam AB, rectæque RC ad arcum Qβ compoſita eſt ratio, ultimò ſcilicet arcu Qβ evaneſcente, quæ ex priùs oſtenſis rectanguli evaneſcentis Pμ, ad evaneſcens Tζ ultima eſt ratio, ea illi erit æqualis, quæ eſt duplæ rectæ PO ad rectam AB; ſive dupli rectanguli PO $\times$ AB ad quadratum ex AB; ſive denique (propter GO, AB inter ſe æquales) dupli rectanguli PO $\times$ OG ad quadratum ex AB. Sed, ex hyperbolæ æquilateræ naturâ, duplum rectanguli PO $\times$ OG quadrato ex GH eſt æquale. Rectanguli igitur evaneſcentis Pμ ad evaneſcens Tζ ratio ultima rectæ GH ad circuli radium AB duplicata erit.

Rurſum, ratio quæ componitur è rationibus rectæ $\varkappa\mu$ ad rectam Aφ rectæque Cr ad arcum βb, ultimò ſcilicet arcu βb evaneſcente, ſive rectanguli evaneſcentis $\varkappa m$ ad evaneſcens γz ratio ultima; hæc, inquam, illi erit æqualis, quæ componitur è rationibus rectæ $\varkappa\mu$ ad rectam Aφ, et quadrati ex AC ad quadratum ex Aβ (§ 8. hujus), vel è rationibus rectanguli $\varkappa\mu \times \mu$G vel $\varkappa\mu \times$ BC ad A$\varphi \times$ BC et quadrati ex AC ad quadratum ex AB. Sed cùm Aφ ſecans ſit arcûs Bϵ, qui complementum eſt dupli arcûs Bβ, cujus tangens quidem eſt BC, AC verò ſecans, propter hæc rectangulum A$\varphi \times$ BC dimidio quadrati ex AC æquale eſt. (Cor. Theor. 3.) Quare rectanguli evaneſcentis $\varkappa m$ ad evaneſcens γz ratio ultima æqualis eſt compoſitæ è rationibus rectanguli $\varkappa\mu \times$ BC ad dimidium quadrati ex AC, et quadrati ex AC ad quadratum ex AB; ſive compoſitæ è rationibus

dupli

EXCERPTUM QUARTUM. Ubi nota, quòd cùm n eft numerus impar, feries definet effe infinita,

DE SERIEBUS. dupli rectanguli $\kappa\mu \times$ BG, vel dupli $\kappa\mu \times \mu$G, ad quadratum ex AC, et quadrati ex AC ad quadratum ex AB. Sed ex hifce compofita eft ratio dupli rectanguli $\kappa\mu \times \mu$G ad quadratum ex AB. Et è naturâ hyperbolæ æquilateræ, duplum rectanguli $\kappa\mu \times \mu$G quadrato ex GH eft æquale. Ratio igitur ultima rectanguli evanefcentis $\kappa\mu$ ad evanefcens γz ea eft quam quadratum ex GH habet ad quadratum ex AB, five rectæ GH ad circuli radium AB duplicata. Ac fimilibus prorfus argumentis rectangulorum evanefcentium nM, gz eadem ratio ultima efficietur. Quare et arearum POMN, TΔZΓ eadem inter ipfas ratio erit. (De Rat. Prim. et Ult. Prop. IV.) Q. E. D.

20. *Cor.* In rectâ ZΓ capiatur ZA ad quam illa ZΓ rationem habeat duplicatam ejus quam AB ad GH; et duci intelligatur linea curva AΘΞ, quam punctum A perpetuò tangat, cui recta ΔT in puncto Θ occurrat. Area ΘΔZA hyperbolicæ POMN æqualis erit. (Hoc verò ad exemplum Corollarii Theor. 2. ex Corollario H. 1. Prop. IV. Tractatûs Newtoni De Rat. Prim. et Ult. demonftrandum eft.)

21. Cùm igitur rationis ejus quam GO habet ad GM, hoc eft, quam AB radius circuli QBE habet ad BD tangentem arcûs BB, area POMN pro modulo $\frac{1}{2}$GH^2 fit logarithmus, ad logarithmum illum generaliter definiendum opus erit aream ΘΔZA generali formulâ expofuiffe. Id verò hæc ferè computatio præftabit.

22. Defignet litera r circuli radium AB, feu illi æqualem rectam GO: litera q quadrantem circuitûs circularis, cujus femiffis, recta ΔX, fymbolo $\frac{1}{2}q$ defignanda erit. Defignet litera z arcum BB, five rectam XZ arcui illi æqualem; litera t arcûs BB tangentem BD, vel illi æqualem rectam GM; litera f rectam AF fecantem complementi dupli arcûs BB, five æqualem illi rectam ZΓ. Defignet denique litera B dimidium quadrati ex GH. Jam cùm ZΓ fit ad ZA ut quadratum ex AB ad quadratum ex GH, hoc eft, $f : \text{ZA} = r^2 : 2\text{B}$, hinc fcilicet efficietur $\text{ZA} = \frac{2\text{B}f}{r^2}$. Recta verò $\Delta z = \Delta\text{X} - z\text{X} = \frac{1}{2}q - z$. Quare fluxio rectæ $\Delta z = -\dot{z}$: et fluxio areæ $\Theta\Delta\text{ZA} = \frac{2\text{B}f}{r^2} \times -\dot{z}$. Arcum BE defignet litera y. Et cùm arcus BE is fit, quo duplus BB abeft à quadrante, erit $y = q - 2z$. Ergo $\dot{y} = -2\dot{z}$, et $\frac{\dot{y}}{2} = -\dot{z}$. Subftituendo igitur hoc fymbolum $\frac{\dot{y}}{2}$ pro illo $-\dot{z}$, efficietur fluxio areæ $\Theta\Delta\text{ZA} = \frac{\text{B}f}{r^2}\dot{y}$. Sed cùm f fecans fit arcûs y, hujus feriei $r + \frac{y^2}{2r} + \frac{5}{24r^3}y^4 + \frac{61}{720r^5}y^6 +$, fi infinitè ea producatur, fumma rectæ f ultimò fit æqualis. (§ 9. hujus.) Hæc igitur feries fi in fymbolo fluxionis areæ ΘΔZA pro literâ f fubftituatur, efficitur fluxio illa

$$= \text{B} \times \overline{\frac{\dot{y}}{r} + \frac{y^2\dot{y}}{2r^3} + \frac{5y^4\dot{y}}{24r^5} + \frac{61y^6\dot{y}}{720r^7} + \frac{277y^8\dot{y}}{8064r^9} + \frac{50521y^{10}\dot{y}}{3628800r^{11}} +}. \text{ Ergo area ipfa } \Theta\Delta\text{ZA} =$$

$$\text{B} \times \overline{\frac{y}{r} + \frac{y^3}{6r^3} + \frac{y^5}{24r^5} + \frac{61y^7}{5040r^7} + \frac{277y^9}{72576r^9} + \frac{50521y^{11}}{39916800r^{11}} +}.$$ Atque hæc eft formula generalis logarithmi rationis ejus quam tangens arcûs cujufpiam ad radium habet, pro modulo B (vide Commerc. Epiftol. N° XX.) Quòd fi ipfius radii logarithmus, pro eodem modulo, defignetur literâ R, hæc erit Tangentis Logarithmicæ formula generalis

TANG. LOG. EX ARC. $\text{R} \mp \text{B} \times \overline{\frac{y}{r} + \frac{y^3}{6r^3} + \frac{y^5}{24r^5} + \frac{61y^7}{5040r^7} +}$, fignorum, +, −, hoc vel illo ufurpato, prout arcus z dimidio quadrante minor majorve fuerit.

23. JAM fi ex datâ Tangente Logarithmicâ Arcum definire cupias, defignet litera T datam tangentem logarithmicam arcûs cujufdam, quem litera z defignat. Defignet autem litera τ logarithmorum R, T differentiam, five rationis ejus logarithmum, quam tangens arcûs z ad circuli radium habet. Tum literâ y arcum eum defignante quo duplus z abeft à quadrante, efficitur ex iis quæ jam oftenfa funt.

$$\tau = \frac{\text{B}y}{r} + \frac{\text{B}y^3}{6r^3} + \frac{\text{B}y^5}{24r^5} + \frac{61\text{B}y^7}{5040r^7} + \frac{277\text{B}y^9}{72576r^9} + .$$

24. Et hanc feriem invertendo ope Theorematis 2. Excerpti II. veniet y, five $q - 2z$, $= \frac{r}{\text{B}}\tau - \frac{r}{6\text{B}^3}\tau^3$

+

finita, & evadet eadem quæ prodit per Vulgarem Algebram ad multi- ARCUS nz EX ARCU z.

$$+\frac{r}{24B^5}\tau^5-\frac{61r}{5040B^7}\tau^7+\frac{277r}{72576B^9}\tau^9-.$$ Unde efficietur $z=\frac{1}{2}q-\frac{r}{2B}\tau+\frac{r}{12B^3}\tau^3-\frac{r}{48B^5}\tau^5+$ ARC. EX. TANG. LOG.
$$\frac{61r}{10080B^7}\tau^7-\frac{277r}{145152B^9}\tau^9+.$$

25. SI arcus ex secante logarithmicâ definiendus sit, designante literâ z arcum, designet litera Σ datam secantem logarithmicam; litera autem σ logarithmorum Σ, R differentiam designet; sive ejus rationis logarithmum, quam secans arcûs z ad radium habet. Tum ex iis quæ jam suprà ex secundo Theoremate ostensa sunt, hæc efficietur æquatio

$$\sigma=\frac{B}{2r^2}z^2+\frac{B}{12r^4}z^4+\frac{B}{45r^6}z^6+\frac{17B}{2520r^8}z^8+,$$

Hanc autem, ope Theorematis 2. Excerpti II. invertendo, hæc alia veniet;

$$z^2=\frac{2r^2}{B}\sigma-\frac{2r^2}{3B^2}\sigma^2+\frac{4r^2}{45B^3}\sigma^3+\frac{2r^2}{315B^5}\sigma^4+,$$

Ex hâc denique, partis utriusque radicem quadraticam extrahendo, conficietur

$$z=\frac{\surd 2.r}{B^{\frac{1}{2}}}\sigma^{\frac{1}{2}}-\frac{r}{3.\surd 2.B^{\frac{3}{2}}}\sigma^{\frac{3}{2}}+\frac{r}{60.\surd 2.B^{\frac{5}{2}}}\sigma^{\frac{5}{2}}+\frac{r}{2520.\surd.2.B^{\frac{7}{2}}}\sigma^{\frac{7}{2}},$$ ARC. EX. SEC. LOG.

quâ quidem formulâ, è logarithmo rationis ejus quam secans ad radium habeat, arcus generaliter definietur.

26. ALIAM vero arcûs formulam, è logarithmo rationis quam secans ejus ad secantem dimidii quadrantis habeat, Gregorius concinnavit. Hujus inventio nescio an ex alio fonte promptiùs arcessenda sit, quàm ex tertii Theorematis Corollario.

Literis R, B, Σ, σ, z, y eadem quæ suprà designantibus, secans logarithmica dimidii quadrantis pro modulo B designetur literâ s. Secantis autem dimidii quadrantis ad secantem arcûs z rationis logarithmus, hoc est logarithmorum s, Σ differentia, literâ l designetur: literâ denique D numeri binarii logarithmus pro modulo illo B.

Itaque cùm secans logarithmica arcûs y per hanc formulam exponatur,

$$R+\frac{B}{2r^2}y^2+\frac{B}{12r^4}y^4+\frac{B}{45r^6}y^6+\frac{17B}{2520}y^8+,$$ (§ 14. hujus) hâc aliâ verò tangens logarithmica arcûs z (§ 22. hujus)

$$R-\frac{By}{r}-\frac{By^3}{6r^3}-\frac{By^5}{24r^5}-\frac{61By^7}{5040r^7}-,$$

ex harum quidem summâ conflabitur logarithmus rectanguli sub secante arcûs y et tangente arcûs z. Huic igitur logarithmo hujus seriei,

$$2R-\frac{By}{r}+\frac{B}{2r^2}y^2-\frac{B}{6r^3}y^3+\frac{B}{12r^4}y^4-\frac{B}{24r^5}y^5+\frac{B}{45r^6}y^6-\frac{61B}{5040r^3}y^7+,$$

si infinitè ea producatur, summa ultimò fit æqualis.

Rectangulum autem sub secante arcûs y et tangente arcûs z dimidio quadrati ex secante arcûs z æquale est (per Cor. Theor. 3.) Dimidii igitur quadrati hujus logarithmo series novissima æqualis est. Additoque illi binarii logarithmo, integri quidem quadrati logarithmus veniet, hoc est duplum ipsius secantis logarithmicæ arcûs z. Unde hæc efficitur æquatio.

$$2\Sigma=D+2R-\frac{By}{r}+\frac{B}{2r^2}y^2-\frac{B}{6r^3}y^3+\frac{B}{12r^4}y^4-,$$

Et binarii divisione,

$$\Sigma=\frac{1}{2}D+R-\frac{By}{2r}+\frac{B}{4r^2}y^2-\frac{B}{12r^3}y^3+\frac{B}{24r^4}y^4-\frac{B}{48r^5}y^5+\frac{B}{90r^6}y^6-\frac{61B}{10080r^7}y^7+,$$

Atqui quantitas $\frac{1}{2}D+R$ est secans logarithmica dimidii quadrantis. Cùm enim ille R radii sit logarithmus, erit 2R logarithmus quadrati è radio. Ergo cùm D logarithmus sit binarii, horum summa, 2R + D, dupli quidem quadrati è radio logarithmus erit. Sed quadratum ex secante dimidii quadrantis duplum est quadrati è radio (per Elem. I. 47.) Quadrati igitur ex dimidii quadrantis

Excerptum Quartum.

multiplicandum datum angulum per istum numerum n (l).

4. Si

drantis secante ille $2R + D$ logarithmus erit. Quare illius semissis, nimirum $R + \frac{1}{2}D$, dimidii quadrantis ipsa secans erit logarithmica, sive logarithmo s æqualis. Ex æquatione igitur novissimâ, demptis hinc inde æqualibus, s, $R + \frac{1}{2}D$, efficietur

$$-l = -\frac{By}{2r} + \frac{B}{4r^2}y^2 - \frac{B}{12r^3}y^3 + \frac{B}{24r^4}y^4 - \frac{B}{48r^5}y^5 + \frac{B}{90r^6}y^6 -,$$

$$\text{Ergo } l = \frac{By}{2r} - \frac{B}{4r^2}y^2 + \frac{B}{12r^3}y^3 - \frac{B}{24r^4}y^4 + \frac{B}{48r^5}y^5 - \frac{B}{90r^6}y^6 +,$$

Hujus autem inversio, ope Theorematis 1. Excerpt. II. perficienda, hanc aliam excitabit;

$$y, \text{ sive } q - 2z, = \frac{2r}{B}l - \frac{2r}{B^2}l^2 + \frac{8r}{3B^3}l^3 - \frac{14r}{3B^4}l^4 + \frac{28r}{3B^5}l^5 -,$$

$$\text{Ergo } 2z = q - \frac{2r}{B}l + \frac{2r}{B^2}l^2 -,$$

Ex hâc verò, per binarii divisionem, exsistet tandem generalis arcûs formula

Arc. ex Sec. Log.

$$z = \tfrac{1}{2}q - \frac{r}{B}l + \frac{r}{B^2}l^2 - \frac{4r}{3B^3}l^3 + \frac{7r}{3B^4}l^4 - \frac{14r}{3B^5}l^5 +,$$

ex ejus nimirum rationis conflata logarithmo, quam secans arcûs z ad secantem dimidii quadrantis habet.

Arcus nz ex Arcu z.

(l) Cum x chorda sit arcûs dati, arcus datus erit

$$x + \frac{x^3}{6d^2} + \frac{3x^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} +$$

(per § 1. hujus Excerpti) nam arcus circularis per eandem formulam ex chordâ cum diametro definitur, atque ex sinu recto cum radio.

Quare arcus exquirendus $= nx + \frac{nx^3}{6d^2} + \frac{3nx^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} +$

Substituatur hæc series pro z in formulam chordæ ex arcu dato, & proveniet formula chordæ arcûs exquirendi è datâ x. Nempe hoc modo. Designet z arcum exquirendum; chorda igitur arcûs exquirendi $= z - \frac{z^3}{6d^2} + \frac{z^5}{120d^4} - \frac{z^7}{5040d^6} +$ (§ 2. hujus Excerpti)

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Sed} & z & = & nx + \frac{nx^3}{6d^2} + \frac{3nx^5}{40d^4} + \frac{5nx^7}{112d^6} + \\
\text{Ergo} & -\frac{z^3}{6d^2} & = & -\frac{n^3x^3}{6d^2} - \frac{n^2x^5}{12d^4} - \frac{37n^3x^7}{720d^6} - \\
\text{et} & +\frac{z^5}{120d^4} & = & + \frac{n^5x^5}{120d^4} + \frac{5n^5x^7}{720d^6} \\
\text{et} & -\frac{z^7}{5040d^6} & = & - \frac{n^7x^7}{5040d^6}
\end{array}$$

Quare hujus seriei, infinitè quidem productæ, summa chordæ arcûs exquirendi ultimò æqualis erit. Atque hæc series, si coefficientium potestatis cujusque summæ scitè colligantur, formam induet Newtonianam.

ALITER

2. Sit x chorda arcûs dati, y chorda arcûs exquirendi;

Erit arcus datus $= x + \frac{x^3}{6d^2} + \frac{3x^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} +$

Arcus autem exquirendus $= y + \frac{y^3}{6d^2} + \frac{3y^5}{40d^4} + \frac{5y^7}{112d^6} +$

Hinc rursum arcus datus $= \frac{y}{n} + \frac{y^3}{6nd^2} + \frac{3y^5}{40nd^4} + \frac{5y^7}{112nd^6} +$

$$\text{Ergo } x + \frac{x^3}{6d^2} + \frac{3x^5}{40d^4} + \frac{5x^7}{112d^6} + = \frac{y}{n} + \frac{y^3}{6nd^2} + \frac{3y^5}{40nd^4} + \frac{5y^7}{112nd^6} +$$

Et radice y infinitè affectâ per formulam generalem Moivræanam extractâ

$y =$

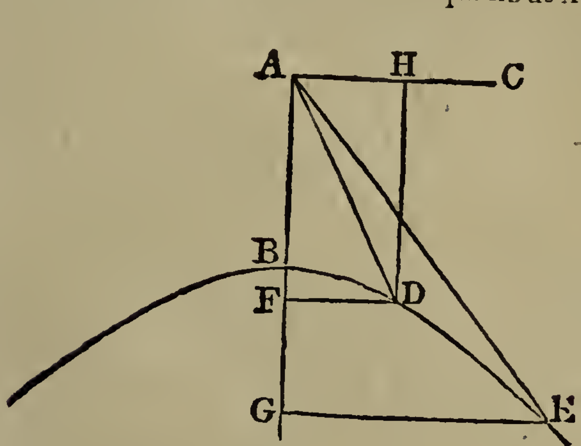
4. Si in axe alterutro AB, ellipſeos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG, occurrens Problema Kepleri.

$$y = nx + \frac{n-n^3}{6d^2}x^3 + \frac{9n-10n^3+n^5}{120d^4}x^5 + \frac{225n-259n^3+35n^5-n^7}{5040d^6}x^7 + .$$

Eâdem vero formulâ ſinus rectus arcûs exquirendi exponetur, ſi litera x dati arcûs ſinum rectum ſignificet; litera d circuli radium.

3. Illud verò minimè prætereundum eſt; per eandem formulam, ſignis tantummodo mutatis, Æquilateræ etiam Hyperbolæ, non arcum quidem, ſed ſectorem definiri, qui ad datum ejuſdem hyperbolæ ſectorem datam rationem habeat. Nempe hoc modo.

Centro A vertice B ſemiaxibus æqualibus AB, AC ſcriptam puta hyperbolam æquilateram BDE; cujus ſint BAD, BAE ſectores; quorum ille BAE ad alterum BAD rationem datam habeat quam n ad 1. A punctis D, E in axem AB deductis ad perpendiculum DF, EG; ſi recta DF, ſinus arcûs hyperbolici DB, cui ſectorum alter ADB inſiſtit, deſignetur literâ x, literâ r ſemiaxem AB deſignante, recta quidem EG, ſinus arcûs EB, cui inſiſtit ſector alter AEB,



hâc formula exponetur, $nx + \frac{nn-1}{2\times3.r^2}xxA + \frac{nn-9}{4\times5.r^2}xxB + \frac{nn-25}{6\times7.r^2}xxC + \frac{nn-49}{8\times9.r^2}xxD + \frac{nn-81}{10\times11.r^2}xxE +,$ Sect. Hyp. nz ex Sect. z.

4. Hoc autem naturali quâdam nititur Hyperbolæ Æquilateræ cum Circulo cognatione, quam accuratiùs explicare haud abs re erit; præſertim cùm rem neque injucundam ſcitu neque inutilem, minimè verò difficilem, nimio calculorum apparatu apud optimos quidem ſcriptores non tam illuſtratam, quàm obrutam planè atque merſam cernimus.

5. A puncto D in axem ſecundum AC deducatur ad perpendiculum DH. Quadratum ex DH duobus ex AH et ex AC ſimul ſumptis eſt æquale (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XLI.) et recta AH $=$ DF $= x$. Quare DH $= \sqrt{r^2+x^2}$, et area hyperbolica DHAE $= rx + \frac{x^3}{6r} - \frac{x^5}{40r^3} + \frac{x^7}{112r^5} - \frac{5x^9}{1152r^7} +$ (Analyſ. per Æquat. Infinit. Cap. III. §. 5.)

Sed triangulum DHA $= \frac{1}{2}x\sqrt{r^2+x^2} = \frac{1}{2}rx + \frac{x^3}{4r} - \frac{x^5}{16r^3} + \frac{x^7}{32r^5} - \frac{5x^9}{256r^7} +$ (Analyſ. per Æquat. Infinit. Cap. III. §. 5.)

Quare ſector BAD $=$ areæ DHAE $-$ triang. DHA $= \frac{1}{2}rx - \frac{x^3}{12r} + \frac{3x^5}{80r^3} - \frac{5x^7}{224r^5} + \frac{35x^9}{2304r^7} +,$

Hoc eſt, ſector BAD $= \frac{1}{2}r \times x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} + \frac{35x^9}{1152r^7}.$

Atque hæc erit formula generalis ſectoris Hyperbolici ex ſinu recto ejus arcûs hyperbolæ quem ſector baſin habet: quæ à formulâ ſectoris Circularis haud aliâ re quàm ſignis diſcrepat.

6. Cum enim arcûs circularis formula ex ſinu recto talis ſit, qualis à Newtono eſt expoſita (§. 1. hujus Excerpti) et ſector circularis æqualis ſit rectangulo ſub dimidio radii et arcu, idcirco ſectoris circularis formula ex ſinu recto hæc erit; $\frac{1}{2}r \times x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ membris omnibus affirmatis; cùm in formulâ ſectoris hyperbolici alterna negata ſint; ſingulorum verò utriuſque formulæ membrorum inde ab initio eadem eſt conſtitutio.

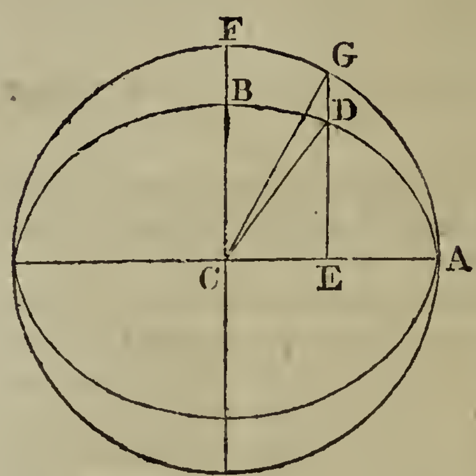
7. Neque verò proprium eſt illud Hyperbolæ Æquilateræ Circulique, quòd figuræ utriuſque ſectores formulis exponantur ad omnia præter ſigna, +, −, ſimilibus, ſed ad omnes quidem Hyperbolas omneſque Ellipſes pertinet.

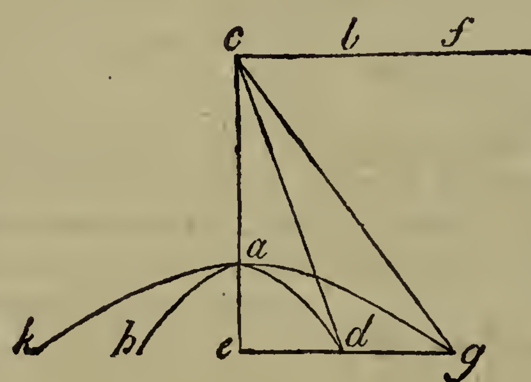
 8. Centro

Excerptum Quartum.

occurrens ellipsi in G, motu angulari feratur; & ex datâ areâ sectoris elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ à puncto G ad axem AB normaliter demittitur: esto $BC = q$, $DC = r$, $EB = t$, ac duplum

Mensurarum Ellipseos





8. Centro enim C, semiaxibus CA, CB, scriptam puta ellipsin ADB, cujus sit sector ACD. Centro verò c, semiaxibus ca, cb inæqualibus, scriptam puta hyperbolam dab, cujus sector sit acd. A puncto D ellipseos in axem ejus CA deducatur DE ad perpendiculum; et à puncto d hyperbolæ in axem ca, qui hyperbolæ transversus sit, deducatur ad perpendiculum de; ut sit DE sinus arcûs elliptici AD, quem sector ellipseos ACD basin habet; de similiter sinus arcûs hyperbolici ad, quem sector hyperbolæ cad basin habet. Centro C ellipseos, radio CA ellipseos semiaxe, scribatur circulus, cui recta DE in G occurrat, et jungatur CG. Centro c semiaxibus æqualibus ca, cf, scribatur hyperbola æquilatera gak, cui recta ed ad g occurrat, et jungatur cg.

9. Propter circulum et ellipsin axe AC communi, recta GE, erit ad DE ut FC ad BC, vel ut CA ad BC. Atque hæc constans erit rectarum GE, DE inter ipsas ratio, in omni situ puncti D. Areis igitur GAE, DAE inter ipsas eadem intercedet (De Rat. Prim. et ult. Prop. IV. Cor. H. 1.) Verùm eadem triangulis CGE, DCE (per El. 6. 1.) Igitur eadem sectoribus etiam CGA, CDA (El. 5. 12.) Hoc est sector circularis CGA ad sectorem ellipseos CDA rationem habet eam quam CA ad CB. Quare sector ellipseos $CDA = \frac{CB}{CA} \times CGA$.

Similiter cùm sit hyperbola æquilatera gak, aliaque dab, semiaxe transverso ca communi, erit ge ad de ut semiaxis transversus ille communis, ca, ad cb semiaxem secundum hyperbolæ dab. Hæc vero rectarum ge, de, in omni situ puncti d, constans erit inter ipsas ratio. Areis igitur age, ade eadem intercedet. Eadem verò triangulis cge, cde. Quare eadem sectoribus cga, cda. Hoc est hyperbolæ æquilateræ sector cga, erit ad sectorem cda alterius hyperbolæ, ut ca ad cb. Quare sector $cda = \frac{cb}{ca} \times cga$.

Si igitur semiaxes ellipseos, CA, CB; vel hyperbolæ dab, ca, cb; literæ r, a designent, arcûs verò circularis, GA, sinum GE, vel arcûs hyperbolici, ga, sinum ge, si litera x designet, cùm circuli hyperbolæque æquilateræ sectores CGA, cga formulis exponantur quas suprà posuimus, erit sector ellipticus $CDA = \frac{1}{2}a \times \overline{x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +}$,

Sector verò hyperbolicus $cda = \frac{1}{2}a \times \overline{x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} +}$,

Quòd si litera χ designet DE sinum arcûs elliptici DA, vel de sinum arcûs hyperbolici da, cùm sit $GE : DE = CA : CB$, et $ge : de = ca : cb$; hoc est, cùm sit $x : \chi = r : a$, erit $x = \frac{r\chi}{a}$. Hoc igitur symbolo, $\frac{r\chi}{a}$, in formulas modò expositas pro literâ x substituto, venient formulæ sectorum, elliptici hyperbolicique, ex sinu cujusque recto, ad omnia præter signa similes.

Sect. Ell. ex Sinu.

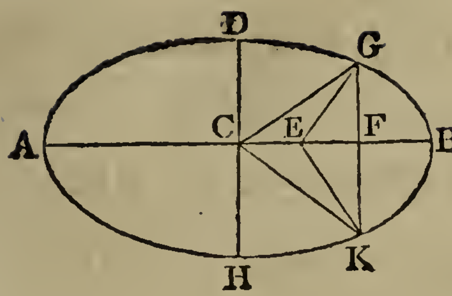
Nimirum elliptici sectoris hæc; $CDA = \frac{1}{2}r \times \overline{\chi + \frac{\chi^3}{6a^2} + \frac{3\chi^5}{40a^4} + \frac{5\chi^7}{112a^6} +}$,

Sect. Hyp. ex Sinu.

Hæc verò hyperbolici $cda = \frac{1}{2}r \times \overline{\chi - \frac{\chi^3}{6a^2} + \frac{3\chi^5}{40a^4} - \frac{5\chi^7}{112a^4} +}$,

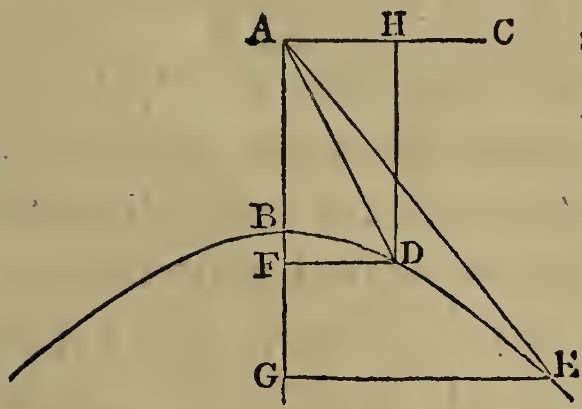
quæ, si ponantur r, a, æquales, in priores illas circuli hyperbolæque æquilateræ abibunt.

10. Cæterum in hyperbola æquilaterâ, ut ad illam revertamur, si sector BAE ad sectorem BAD eam rationem habeat quam n ad 1, si rectæ DF, EG arcuum DB, EB, quibus sectores insistunt, sinus literis



duplum areæ BEG $= z$; et erit GF $= \frac{1}{t} z -$ PROBLEMA KEPLERI.
$\frac{q}{6r^2t^4} z^3 + \frac{10q^2 - 9qt}{120r^4t^7} z^5 - \frac{280q^3 + 504q^2t - 225qt^2}{5040r^6t^{10}} z^7 + \&c.$
Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt ([m]).

5. In literis x, y, deſignentur; cùm ſectorum hyperbolæ æquilateræ ea ſit ex ſinubus rectis formula, quam ſuprà ſcripſimus, erit ſector hyperbolicus BAD $= \frac{1}{2} r \times \overline{x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} - \frac{5x^7}{112r^6} +}$, HYPERBOLÆQUE HARMONIA.



Sector hyperbolicus BAE $= \frac{1}{2} r \times \overline{y - \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} - \frac{5y^7}{112r^6} +}$,

Unde rurſum ſector BAD $= \frac{1}{2} r \times \overline{\frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} - \frac{5y^7}{112nr^6} +}$,

Ergo $\frac{1}{2} r \times \overline{x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} -}, = \frac{1}{2} r \times \overline{\frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} -}$,

Ac propterea $x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} -, = \frac{y}{n} - \frac{y^3}{6nr^2} + \frac{3y^5}{40nr^4} -$,

Ad inveniendam igitur rectam EG, literâ y deſignatam, nacti ſumus æquationem, ejus omnia præter ſigna ſimilem, quâ è dato ſinu arcûs circularis z ſinum arcûs nz eruendum eſſe pridem oſtendimus. Etenim in æquatione illâ circulari ſigna in utrâque parte poſitiva erunt omnia, in hâc hyperbolicâ alternè negativa ſunt utrinque. Hujus igitur, ſicut prioris, radice y infinitè affectâ per formulam generalem Moivræanam extractâ, veniet formula literæ y prioris omnia ſimilis, niſi quòd ſigna membrorum alternorum contraria habeant. Id quod coefficientium Theorematis Moivræanam compoſitionis modum attentiùs conſideranti cuivis credo manifeſtum erit. Ergo y, ſive EG $= nx + \frac{nn - 1}{2 \times 3 \cdot r^2} xxA + \frac{nn - 9}{4 \times 5 \cdot r^2} xxB +$. In majorem rei evidentiam calculos qui volet ſubducat.

11. Cæterùm ſi n ſit numerus impar, hæc formula, ſicut prior illa, infinita eſſe deſinet; et ſinitas quidem æquationes promet, ad ſectorum hyperbolicorum, hoc eſt ad logarithmorum cum numeris imparibus multiplicationes, vel diviſiones, earum omnia æquationum præter ſigna ſimiles, quibus ſimiles arcuum circularium vel angulorum multiplicationes diviſioneſque continentur. Nimirum hoc ipſum eſt, quo omnis ferè nititur mirabilis illa Angulorum Rationumque Menſurarum Harmonia, cujus contemplatione magnus ille olim Coteſius tantopere delectatus eſt. Nec immeritò ſcilicet: cùm tantam illa ſummo viro attuliſſet inventorum atque famæ frugem: utpote cujus ope tot tantaque tam eleganter perfecerat. Quorum tamen ſummam EDVARDUS WARING ὁ πάνυ, in eo contineri ſcribit " quòd æquationis $x^n \pm 1 = 0$ radices invenit, ex quibus detexit fluentem fluxionis $\frac{\dot{x}}{x^{2n} \pm ax^n + 1}$ *." At verò ea eſt Coteſii laus, non quòd *æquatiunculam* illam explicaverit quidem, ſed quòd modo illo ſuo peculiari hoc effecerit; tam ſimplici, tam ſubtili, tam perſpicuo: quòd illam viâ geometricâ explicando, calculorum laborem multùm minuerit; tot tantaque problemata ad menſuras aut angulorum aut rationum revocaverit: unde factum eſt, ut ex analyſi facillimâ compoſitiones problematum elegantiſſimæ quaſi ſponte enaſcerentur; compoſitionum demonſtrationes, in eo quidem genere quod ſit cum brevitate firmiſſimum, ultrò ſe offerrent. Has quidem ſtatuo magni Coteſii laudes, quas vereor ut ſatis ample Waringius, apud æquos judices, celebraſſe exiſtimandus erit.

([m]) Recta GF producta ellipſi iterum, ab alterâ parte axis, in K occurrat et jungantur CG, CK, EK. Itaque ſi litera x rectam GF deſignet, ſectori elliptico GCB hujus ſeriei, ſi infinitè ea producatur, PROBLEMA KEPLERI.
ſumma ultimò æqualis erit; $\frac{1}{2} q \times \overline{x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6} +}$, (not. [l] § 9.)

Sector igitur GCK $=$ 2GCB $= qx + \frac{qx^3}{6r^2} + \frac{3qx^5}{40r^4} + \frac{5qx^7}{112r^6} +$,

Sed recta CE $= q - t$. Quare duplum trianguli GEC, ſive duo triangula GEC, KEC ſimul ſumpta $= qx$

* Vid. Meditat. Analyt. Præfat.

ARC. ELLIP. E SINU.

5. In eâdem ellipſi, ſi ſtatuatur CD $= r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & CF $= x$: erit arcus ellipticus

$$(^n)\ DG = x + \frac{1}{6c^2}x^3 + \begin{array}{c}\frac{1}{10rc^3}\\ -\frac{1}{40c^4}\\ \\ \\ \\ \end{array} x^5 + \begin{array}{c}\frac{1}{14r^2c^4}\\ -\frac{1}{28rc^5}\\ +\frac{1}{112c^6}\\ \\ \\ \end{array} x^7 + \begin{array}{c}\frac{1}{18r^3c^5}\\ -\frac{1}{24r^2c^6}\\ +\frac{1}{48rc^7}\\ -\frac{5}{1152c^8}\\ \\ \end{array} x^9 + \begin{array}{c}\frac{1}{22r^4c^6}\\ -\frac{1}{22r^3c^7}\\ +\frac{3}{88r^2c^8}\\ -\frac{5}{352rc^9}\\ +\frac{7}{2816c^{10}}\end{array} x^{11} + \&c.$$

Hîc numerales coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in muſicâ progreſſione: et numerales coefficientes omnium inferiorum in unaquâque columnâ prodeunt multiplicando continuò numeralem coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{n-3}{4}$, $\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$, $\frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$, $\frac{\frac{9}{6}n-9}{10}$, &c. Ubi n ſignificat

PROBLEMA KEPLERI.

$= qx - tx$. Sed area elliptica BGEK differentia eſt ſectoris elliptici GCK, duorumque triangulorum GCE, KCE. Quare area elliptica BGEK, ſive 2GEB, ſive z, $= tx + \frac{qx^3}{6r^2} + \frac{3qx^5}{40r^4} + \frac{5qx^7}{112r^6} +$, Et hanc feriem invertendo, ope Theorematis 2. Excerpti II. veniet formula rectæ GF Newtoniana, $x = \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 + \frac{10q^2 - 9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3 - 504q^2t + 225qt^2}{5040r^6t^{10}}z^7 +$,

2. In coefficiente membri quarti ſigna nominum ſingulorum calculis ſuadentibus emendavi, cùm coefficientem illam Newtonus ipſe in Commercio Epiſtolico, & Joneſius hoc modo exhibuiſſent. $-\frac{280q^3 + 504q^2t - 225qt^2}{5040r^6t^{10}}$. Vitioſè certè. Nam per Theorema ſecundum Newtoni ad regreſſiones coefficiens ille $= +\frac{504q^2t - 225t^2q - 280q^3}{5040r^6t^{10}} = -\frac{280q^3 + 225t^2q - 504q^2t}{5040r^6t^{10}}$.

3. Credibile eſt errorem ex eo natum, quòd Newtonus formulam ſuam, primâ ſcriptione, hoc modo diſpoſuiſſet

$$x = \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 + \begin{array}{c}\frac{q^2}{12r^4t^7}\\ -\frac{3q}{40r^4t^6}\\ \\ \end{array} z^5 - \begin{array}{c}\frac{q^3}{18r^6t^{10}}\\ +\frac{q^2}{10r^6t^9}\\ -\frac{5q}{112r^6t^8}\end{array} z^7 +,$$

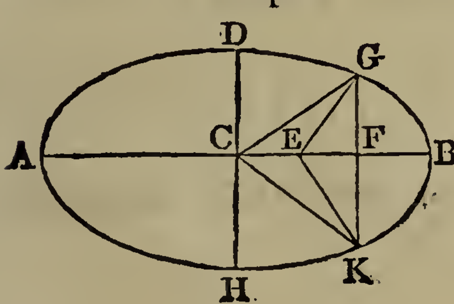
Poſtea verò cùm alia diſpoſitio magis ei placuiſſet, ut coefficientis cujuſque nomina ad denominatorem revocarentur communem, et numeratoribus ſignis $+$, $-$, algebraicè conjunctis, in unius fractionis ſpeciem coaleſcerent; hæc, inquam, formulæ ſuæ diſpoſitio cùm Newtono potior viſa eſſet, integris quidem coefficientibus ea, credo, ſigna præfixit, quæ in primâ illâ diſpoſitione ſummi ordinis nominibus à ſe præfixa inveniſſet: nominum verò inferiorum ſigna, poſitiva pro negativis, negativa pro poſitivis mutare, quoties nomen ſummum negativum eſſet, quod fieri omninò debuit, neglexit. Sed quocunque tandem modo natus fuerit error, error certè eſt. Atque mecum hâc in re ſenſiſſe video virum harum rerum peritiſſimum Carolum Huttonum, qui in opere ſuo de Menſionibus Anglicò ſermone Anno 1770 edito, huic formulæ, cujus etiam inveſtigationem tradidit, ſimilem emendationem adhibuit, (Treatiſe of Menſuration, Part 3. Sect. 3. Problem VIII. Cor. 9.)

ARC. ELLIP.

(^{n}) RECTA GF deſignetur literâ y. Tum è natura ellipſeos erit $CD^2 : CB^2 = GF^2 : AF \times FB$; hoc eſt $r : c = y^2 : rc - x^2$. Ergo $y^2 = \frac{r}{c}\,\overline{rc - x^2}$. Ergo $\dot{y} = -\frac{rx\dot{x}}{c \times y} = -\frac{rx\dot{x}}{} \times \sqrt{\frac{c}{r^2c - rx^2}}$.

Quare

nificat numerum dimensionum ipsius c in denominatore istius supremi termini. E. *g.* ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n=6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipsius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc est, in 1; & prodit $\frac{1}{22}$, numeralis coefficiens termini proximè inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{2}n-3}{4}$, sive in $\frac{n-3}{4}$, hoc est, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in istâ columnâ. Atque ista $\frac{3}{88}\times\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{352}\times\frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum usque columnis præstari potest: adeoque valor ipsius DG per hanc regulam pro lubitu produci. Arcus Ellipticus



6. Adhæc, si BF dicatur x, sitque r latus rectum ellipseos, & $e=\frac{r}{\text{AB}}$; erit arcus ellipticus (°) BG = Ex Sinu.

Quare $\dot{y}\dot{y}=\frac{r^2x^2\dot{x}\dot{x}}{c^2}\times\frac{c}{r^2c-rx^2}=\frac{rx^2\dot{x}\dot{x}}{rc^2-cx^2}$. Et $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times\overline{1+\frac{rx^2}{rc^2-cx^2}}$.

Hoc est, si fractio $\frac{rx^2}{rc^2-cx^2}$, divisionis operâ, convertatur in seriem infinitam,

$$\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times\overline{1+\frac{x^2}{c^2}+\frac{x^4}{rc^3}+\frac{x^6}{r^2c^4}+\frac{x^8}{r^3c^5}+\frac{x^{10}}{r^4c^6}+}.$$

Ergo $\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}$, sive fluxio arcûs elliptici DG, $=\dot{x}\times\sqrt{1+\frac{x^2}{c^2}+\frac{x^4}{rc^3}+\frac{x^6}{r^2c^4}+\frac{x^8}{r^3c^5}+\frac{x^{10}}{r^4c^6}+}$.

Vel, si ope formulæ nostræ generalis, (Logistic. Infinit.) radix quadratica seriei infinitæ extrahatur, fluxio arcûs elliptici DG =

$$=\dot{x}\times 1+\frac{1}{2.c^2}x^2+\begin{array}{l}\frac{1}{2.r.c^3}\\-\frac{1}{2^2.1\times2.c^4}\end{array}x^4\begin{array}{l}+\frac{1}{2.r^2.c^4}\\-\frac{2}{2^2\times1\times2.r.c^5}\\+\frac{2}{2^3\times1\times2\times3.c^6}\end{array}x^6\begin{array}{l}+\frac{1}{2.r^3.c^5}\\-\frac{3}{2^2\times1\times2.r^2.c^6}\\+\frac{3\times3}{2^3\times1\times2\times3.r.c^7}\\-\frac{3\times5}{2^4\times1\times2\times3\times4.c^8}\end{array}x^8+$$

Et fluenti hujus seriei arcus ipse DG æqualis erit. Hujus autem seriei fluens est ipsa quidem series Newtoniana.

(°) Designetur enim recta GF, ut priùs, literâ y. Arc. Ellip.
E naturâ ellipseos $\text{CD}^2:\text{CB}^2=\text{GF}^2:\text{AF}\times\text{FB}$, hoc est, $r:\text{AB}=y^2:\text{AB}x-xx$.
Ergo $y^2=\overline{\text{AB}x-xx}\times\frac{r}{\text{AB}}=rx-ex^2$. Ergo $2y\dot{y}=\dot{x}\times\overline{r-2ex}$. Et $\dot{y}=\dot{x}\times\frac{r-2ex}{2\sqrt{rx-ex^2}}$.
Ergo $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{x}\times\frac{r^2-4rex+4e^2x^2}{4x\times\overline{r-ex}}$. Et $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=\dot{x}\dot{x}\times\overline{1+\frac{r^2-4rex+4e^2x^2}{4x\times\overline{r-ex}}}=\frac{\dot{x}\dot{x}}{4x}\times$
$\frac{r^2\begin{array}{l}+4r\\-4re\end{array}x\begin{array}{l}+4e^2\\-4e\end{array}x^2}{r-ex}$. Et, si fractio divisionis operâ convertatur in seriem infinitam, $\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}=$

$\dot{x}\dot{x}$

Ex Sinu Verso.

$$\text{BG} = \sqrt{rx} \text{ in } \overline{1 + \frac{\begin{matrix}2\\ -\frac{3}{2}e\end{matrix}}{3r}x + \frac{\begin{matrix}-2\\ +3e\\ -\frac{5}{8}e^2\end{matrix}}{5r^2}x^2 + \frac{\begin{matrix}+4\\ -9e\\ +\frac{23}{4}e^2\\ -\frac{7}{16}e^3\end{matrix}}{7r^3}x^3 + \frac{\begin{matrix}-10\\ +30e\\ -\frac{123}{4}e^2\\ +\frac{91}{8}e^3\\ -\frac{45}{128}e^4\end{matrix}}{9r^4}x^4, + \&c.}$$

7. Quare, ſi ambitus totius ellipſeos deſideretur; biſeca CB in F, & quære arcum DG, per prius Theorema, & arcum BG per poſterius.

8. Si, vice verſâ, ex dato arcu elliptico DG, quæratur ſinus ejus CF; tum dicto CD $= r$, $\frac{\text{CB}^2}{\text{CD}} = c$, & arcu illo DG $= z$; erit

(P) CF

Ex Sin. Vers.

$\frac{\dot{x}\dot{x}}{4x} \times r + \overline{4-3e}.x + \frac{e^2x^2}{r} + \frac{e^3x^3}{r^2} + \frac{e^4x^4}{r^3} +$. Ergo $\sqrt{\dot{y}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}}$, ſive fluxio arcûs elliptici BG $=$
$\frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} \times \sqrt{r + \overline{4-3e}.x + \frac{e^2.x^2}{r} + \frac{e^3x^3}{r^2} + \frac{e^4x^4}{r^3} +}$

Vel, ſi ope formulæ noſtræ generalis (Logiſtic. Infin.) radix quadratica ſeriei infinitæ extrahatur, extractaque dividatur quantitate $x^{\frac{1}{2}}$,

$$\text{Fluxio arcûs BG} = \frac{\dot{x}}{2} \times r^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{\begin{matrix}2\\ -\frac{3e}{2}\end{matrix}}{r^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\begin{matrix}+\frac{e^2}{2}\\ -\frac{16-24e+9e^2}{2^2+1\times2}\end{matrix}}{r^{\frac{3}{2}}}x^{\frac{3}{2}} +$$

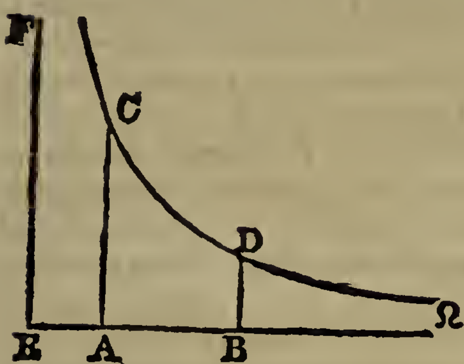
$$+ \frac{\begin{matrix}+\frac{e^3}{2}\\ -\frac{8e^2-6e^3}{2^2\times1\times2}\\ +\frac{\overline{4-3e}|^3\times3}{2^3\times1\times2\times3}\end{matrix}}{r^{\frac{5}{2}}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{\begin{matrix}+\frac{e^4}{2}\\ -\frac{8e^3-5e^4}{2^2\times1\times2}\\ +\frac{3\times\overline{16e^2-24e^3+9e^4}\times3}{2^3\times1\times2\times3}\\ -\frac{\overline{4-3e}|^4\times3\times5}{2^4\times1\times2\times3\times4}\end{matrix}}{r^{\frac{7}{2}}}x^{\frac{7}{2}}$$

$$\text{Hinc arcus BG} = r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\begin{matrix}2\\ -\frac{3e}{2}\end{matrix}}{3r^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\begin{matrix}+\frac{e^2}{2}\\ -\frac{16-24e+9e^2}{2^2\times1\times2}\end{matrix}}{5r^{\frac{3}{2}}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{\begin{matrix}+\frac{e^3}{2}\\ -\frac{8e^2-6e^3}{2^2\times1\times2}\\ +\frac{\overline{4-3e}|^3\times3}{2^3\times1\times2\times3}\end{matrix}}{7r^{\frac{5}{2}}}x^{\frac{7}{2}} +$$

$=\surd$

$$(\mathrm{P})\ \text{CF} = z - \frac{1}{6c^2}z^3 - \begin{array}{l}\frac{1}{10rc^3}\\ +\frac{13}{120c^4}\end{array} z^5 - \begin{array}{l}\frac{1}{14r^2c^4}\\ +\frac{17}{420rc^5}\\ -\frac{493}{5040c^6}\end{array} z^7 - \&c.$$ SIN. ELLIP. EX ARC.

Quæ autem de Ellipfi dicta funt, omnia facilè accommodantur



ad Hyperbolam; mutatis tantùm fignis ipforum c & e ubi funt imparium dimenfionum (q).

7. Præterea, fi fit CD Hyperbola, cujus afymptoti EB, EF rectum angulum BEF conftituant; & ad EB erigantur utcunque perpendicula

$$= \sqrt{rx} \times 1 + \frac{\left\{\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{3e}{2}\end{array}\right.}{3r} x + \frac{\left\{\begin{array}{l} +\frac{e^2}{2} \\ -\frac{16-24e+9e^2}{2^2\times 1\times 2}\end{array}\right.}{5r^2} x^2 + \frac{\left\{\begin{array}{l} +\frac{e^3}{2} \\ -\frac{8e^2-6e^3}{2^2\times 1\times 2} \\ +\frac{\overline{4-3e}|^3\times 3}{2^3\times 1\times 2\times 3}\end{array}\right.}{7r^3} x^3 +$$ ARC. ELLIPT. EX SIN. VERS.

Unde, coefficientis cujufque membris fecundum poteftates literæ e difpofitis, veniet feries Newtoniana.

(p) FORMULAM arcûs DG priùs inventam (§. 5. hujus Excerpti) fi ope Theorematis 2. Excerpt. II. invertas, obtinebis formulam finûs CF ex arcu illo, qualis à Newtono hîc defcripta eft.

(q) ET ad Parabolam, membris iis omnibus deletis, quæ, in formulâ arcûs ex finu verfo, litera e ingreffa eft; vel iis, quorum denominatores litera r, in aliis illis arcûs ex finu recto, finûfve ex arcu formulis. Ut hæc fcilicet fit formula Arcûs Parabolici ex finu recto

$$x + \frac{1}{6c^2}x^3 - \frac{1}{40c^4}x^5 + \frac{1}{112c^6}x^7 - \frac{5}{1152c^8}x^9 + \frac{7}{2816c^{10}}x^{11} -,$$ ARC. PARAB. EX SIN.

Sinûs autem ex arcu

$$z - \frac{1}{6c^2}z^3 + \frac{13}{120c^4}z^5 - \frac{493}{5040c^6}z^7 +,$$ SIN. PARAB. EX ARC.

Defignante nimirum literâ x finum rectum; z, arcum; c femiparametrum parabolæ.

Arcûs etiam Parabolici ex finu verfo ut hæc fit formula

$$r^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3r^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5r^{\frac{3}{2}}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7r^{\frac{5}{2}}}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{9r^{\frac{7}{2}}}x^{\frac{9}{2}} +,$$ ARC. PAR. EX SIN. VERS.

Defignante x finum verfum; r, parametrum parabolæ.

2. HARUM verò tranfmutationum in eo pofita eft ratio, quòd Algebræ, proprio fermone curvarum proprietates edifferenti, Hyperbolam tanquam Ellipfin negativo axe, et viciffim, confiderare receptum eft; Parabolam verò vel tanquam Ellipfin quidem illam, vel tanquam Hyperbolam, axe infinito. Hoc autem quale fit clariùs dicam.

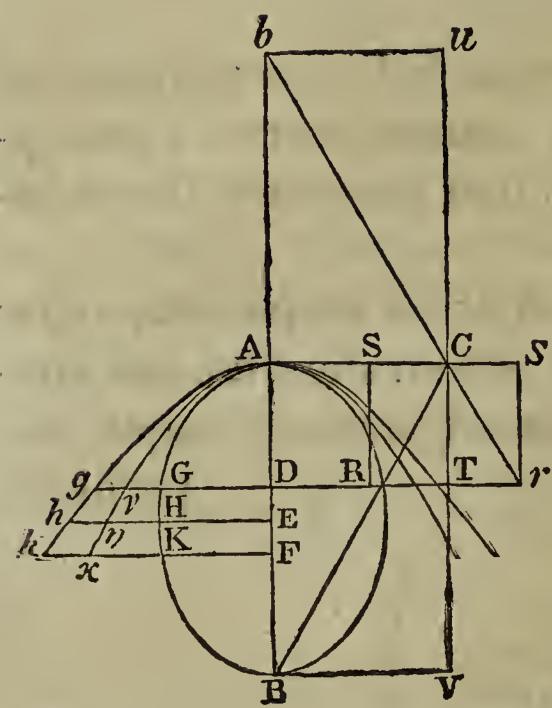
3. SINT duæ rectæ AB, AC magnitudine, et pofitione datæ et ad perpendiculum inter fe compofitæ. Harum in alterutrâ, puta in AB, capiantur pro arbitrio inter puncta extrema A, B, alia aliquot D, E, F. A quibus eductæ ad perpendiculum, DG, EH, FK, ejus capiantur quæque longitudinis, ut rectangula fegmentis rectæ datæ comprehenfa, rectangula dico AD × DB, AE × EB, AF × FB, ad quadrata ex eductis, DG, EH, FK, ordine fumendis, datam illam rationem habeant, quam recta AB ad rectam AC. Linea curva quæ per eductarum DG, EH, FK, aliarumque omnium, quæ, à punctis QUA MENTE ALGEBRA

Basis Spatii

pendicula AC, BD occurrentia hyperbolæ in C & D: & EA dicatur a; AC, b; & area CADB, z;

Erit

Negativos Loquitur



tis in rectâ AB, pro arbitrio sumendis, simili lege educi poterunt, extrema transeat, Ellipsis erit; cujus axis AB, parameter AC. Juncta enim BC rectæ GD, si opus sit, productæ, in R occurrat; actisque RS, CT cum rectâ AB parallelis, actâque rectâ BV cum AC parallelâ, rectangula AR, AT, AV compleantur. Jam propter DR, AC parallelas, erit BD ad DR ut BA ad AC. Unde BD × DA ad DR × DA, hoc est ad DS, ut AB ad AC. (Elem. VI. I.) Est autem rectangulum BD×DA ad quadratum ex DG ut AB ad AC. (Id enim posuimus.) Rectanguli igitur BD × DA ad rectangulum DS et ad quadratum ex DG eadem est ratio. Quadratum igitur ex DG rectangulo DS æquale erit. Rectangulum verò DS deficit ab illo DC, quod datâ AC abscissâque AD comprehensum est, alio illo ST, ejus nimirum quod datis AB, AC comprehensum est, AV, specie posituque simili. Punctum igitur G ad ellipsin erit, cujus axis recta AB, parameter illa AC. Similibus argumentis efficietur puncta H, K ad eandem ellipsin esse, & extremum cujusvis itidem rectæ, quæ, à puncto inter extrema illa A, B pro arbitrio sumpto, ad priorum legem educta fuerit. Linea igitur curva quæ per omnium illo modo eductarum extrema transeat, haud alia erit atque illa quam modò diximus Ellipsin.

4. Sed retrorsùm ducatur recta AB, sumaturque Ab datæ AB æqualis. Jam punctis D, E, F, non inter extrema b, A sed infra A pro arbitrio sumptis, interceptæ illæ AD, AE, AF, contrario quidem modo atque priùs ad AB se habuerunt, positura scilicet ratione nunc ad Ab habent; ut quæ alterius partes fuerint, eæ hujus sint additamenta. Eductæ verò ad perpendiculum Dg, Eh, Fk, si capiantur ejus quæque longitudinis, ut rectangulum datâ bA cum additamento. additamentoque comprehensum ad quadratum ex eductâ datam illam rationem habeat, quam recta Ab ad rectam AC; hoc est, si rectangula bD × DA, bE × EA, bF × FA, ad quadrata ex eductis Dg, Eh, Fk, ordine sumendis, datam illam rationem habeant; linea curva, quæ per eductarum Dg, Eh, Fk, aliarumque omnium, quæ, à punctis infra A, pro arbitrio sumendis, simili lege educi poterunt, extrema transeat, hæc inquam curva, non jam ut priùs Ellipsis, sed Hyperbola quidem erit; parametro eâdem AC atque ellipsis habuit, et axe transverso Ab ellipseos axi AB æquali.

Juncta enim bC rectæ gD si opus sit productæ in r occurrat; aganturque rs, bu cum illis AD, AC parallelæ; quæ rectangula Ar, Au perficiant. Itaque propter parallelas Dr, AC, erit bD ad Dr ut bA ad AC. Atque idcirco bD × DA ad Dr × DA, hoc est ad DS, ut bA ad AC. Est autem rectangulum bD × DA ad quadratum ex Dg ut bA ad AC (Id enim posuimus.) Rectanguli igitur bD × DA ad rectangulum DS eadem atque ad quadratum ex Dg est ratio. Quadratum igitur ex Dg rectangulo DS est æquale. Rectangulum verò DS exuperat illud DC, quod datâ AC abscissâque AD comprehensum est, alio illo TS, ejus nimirum, quod datis Ab, AC comprehensum est, Au, specie posituque simili. Punctum igitur g ad hyperbolam erit, cujus axis transversus Ab parameter AC. Similibusque argumentis de punctis h, k, omniumque adeo rectarum extremis, quæ à punctis infra A, pro arbitrio sumendis, ad priorum legem eductæ fuerint, efficietur ea omnia ad hyperbolam esse, lateribus quibus diximus, AC, Ab, recto transversoque. Linea igitur curva per eductarum extrema transiens, quæ modò Ellipsis erat nunc sit Hyperbola, parametro eâdem quam ellipsis habuit, axeque æquali quidem sed situ contrario. Et ex everso axis situ figuræ immutatæ ratio pendet. Cùm enim in priori casu recta BC, in hoc verò bC, ab eductâ quâlibet, verbi gratiâ, à DG, vel Dg, partem quandam, DR, vel Dr, abscindat, quæ cum datâ abscissâ AD rectangulum claudit quadrato ex eductâ æquale, harum verò altera BC, à puncto B egressa, eductam DG medio quasi itinere objectam transeat, priusquam punctum C attingat, altera autem bC ultra locum C progrediens eductæ gD in occursum eat; horum consequens erit, duarum DR, Dr illam quidem rectâ AC minorem, hanc verò majorem esse: ac propterea quadrata ex eductis DG, Dg, à rectangulo DC, illud defectu, hoc excessu aberunt. Quod sanè cùm primarium sit et præcipuum Ellipseos et Hyperbolæ

Erit AB $= \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab^2} + \frac{z^3}{6a^2b^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \&c.$ Ubi coeffici- HYPERB. EX AREA, SIVE
entes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus arithmeticæ

perbolæ discrimen, ex situ axis, sicut modò diximus, everso videtur omnis figuræ fieri transmutatio. Algebra igitur, quæ contrarios linearum ductus signorum diversitate indicare solet, haud ineptè Hyperbolam tanquam Ellipsin, et vicissim, considerat, negato axe. Atque his quidem congruenter, positâ æquatione ad Ellipsin $y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$, designante nimirum literâ p parametrum, d axem, y ordinatam, x abscissam ab axe, si in æquatione illâ pro d scribatur $-d$, veniet æquatio ad Hyperbolam: $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$. E contrario, positâ æquatione ad Hyperbolam $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$, si in illâ pro d scribatur $-d$, veniet æquatio ad Ellipsin. CURVARUM AXES.

5. CÆTERUM manentibus ellipsi et hyperbolâ modò scriptis, axibus quidem æqualibus AB, Ab, parametro verò AC communi, eâdem parametro AC, vertice autem A, axeque rectâ AB inde ab A in infinitum protensâ, scriptam puta Parabolam Aνx, cui ordinatæ DG, EH, FK in punctis ν, n, x occurrant. Hæc Parabola Ellipsin in vertice communi A contingens, eam intra se totam continebit. Quadratum enim ex Dν rectangulo DC æquale est, propter parabolam. Quadratum autem ex DG rectangulo DS, propter ellipsin. Sed rectangulum DS rectangulo DC minus est. Quare quadratum ex DG minus erit quadrato ex Dν. Recta igitur DG minor quàm illa Dν; ac propterea, cùm punctum ν sit ad parabolam, (cujus in axe punctum D) punctum G intra parabolam erit. Eodemque modo ostendatur de alio quolibet ellipseos puncto, præter verticem communem A, intra parabolam illud esse. Quòd si manente parametro AC, axis ellipseos AB sensim augeatur, ambitus ellipseos paulatim dilatando, ductu quidem parabolæ interiorem se continebit; cum tamen, quo major axis fuerit, eo magis accedet; et, crescente infinitè axe, propiùs quidem quàm pro datâ aliquâ distantiâ. Congruunt igitur ultimò, et parabola figura ultima est ellipseos. Nam propter parallelas AC, DR, erit AC ad DR, vel AS, ut BA ad BD. Sed rectangulum DC est ad rectangulum DS ut AC ad AS. Quare BA erit ad BD ut rectangulum DC ad rectangulum DS, hoc est, ut quadratum ex Dν ad quadratum ex DG. Crescente autem axe AB, et manente abscissâ AD, rectæ BD ad majorem BA proportio perpetim fit major, usquedum illâ AB infinitè auctâ ipsam æqualium rationem, propiùs quàm pro datâ aliquâ differentiâ, assecuta fuerit. Crescente igitur axe ellipseos AB proportio quadrati ex DG ad quadratum è Dν continuò major fit, et æqualium rationem ultimò assequitur. Ipsæ igitur rectæ DG, Dν fiunt ultimò æquales, et punctum G ellipseos illud ν parabolæ sensim accedendo, ultimò attigerit. Simili modo aliud omne Ellipseos punctum, axe ejus in infinitum crescente, Parabolam ultimò deveniet.

6. Similibus prorsus argumentis efficere licet, Hyperbolam Parabolâ, cujus eadem parameter, quamque in vertice communi A contingit, exteriorem esse: eam tamen, axe transverso Ab infinitè aucto, propiùs accedere quàm pro datâ aliquâ distantiâ. Hisce verò illud etiam congruit, quòd si, reliquis manentibus, axis, literâ d designatus, infinitè usque increscere fingatur, æquatio ad ellipsin vel hyperbolam $y^2 = px \mp \frac{p}{d}x^2$, evanescente membro $\mp \frac{p}{d}x^2$, et ad nihilum ultimò redacto, in æquationem ad parabolam, $y^2 = px$, ultimò abierit.

7. HAUD igitur nihil est quod dicunt Algebraici, cùm Parabolam pro Ellipsi vel Hyperbolâ haberi velint infinito axe. Nimirum, ut totius disputationis summam paucis complectar, trium illarum Sectionum Conicarum multa ita sunt communia, ut quicquid discriminis intersit, aut ex variâ axis magnitudine, aut ex situ ejus contrario natum sit. Si igitur hujusmodi aliquid, notis sibi consuetis, de utrâque curvarum, Ellipsi vel Hyperbolâ, Algebra enunciaverit, illud ad alteram statim accommodatur, signo tantummodò axis, qui hyperbolæ transversus esse debet, quod quidem positurae signum est non quantitatis, in contrarium mutato. Ad Parabolam verò idem accommodetur, si pro formulâ generali sumatur ea in quam ultimò illa abierit, axe ellipseos, vel hyperbolæ, modò hujus sit transversus, infinitè aucto. Hoc equidem principium, ut ad concinnandas formulas Algebraicas libens eo utar, utpote qui omnibus modis effugiendum putem computandi tædium, demonstrationibus tamen componendis minùs aptum judico. Quibus ut sua sive elegantia sive evidentia constet, ex eo potiùs deducendæ sunt, quod figura quæque proprium habeat, quàm ex similitudinibus quæ diversis intercedat. Quarum licèt jucundissima et philosopho dignissima

Numerus e Logarithmo.

arithmeticæ progreſſionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in ſe continuò. Et hinc ex logarithmo dato poteſt numerus ei competens invenire.

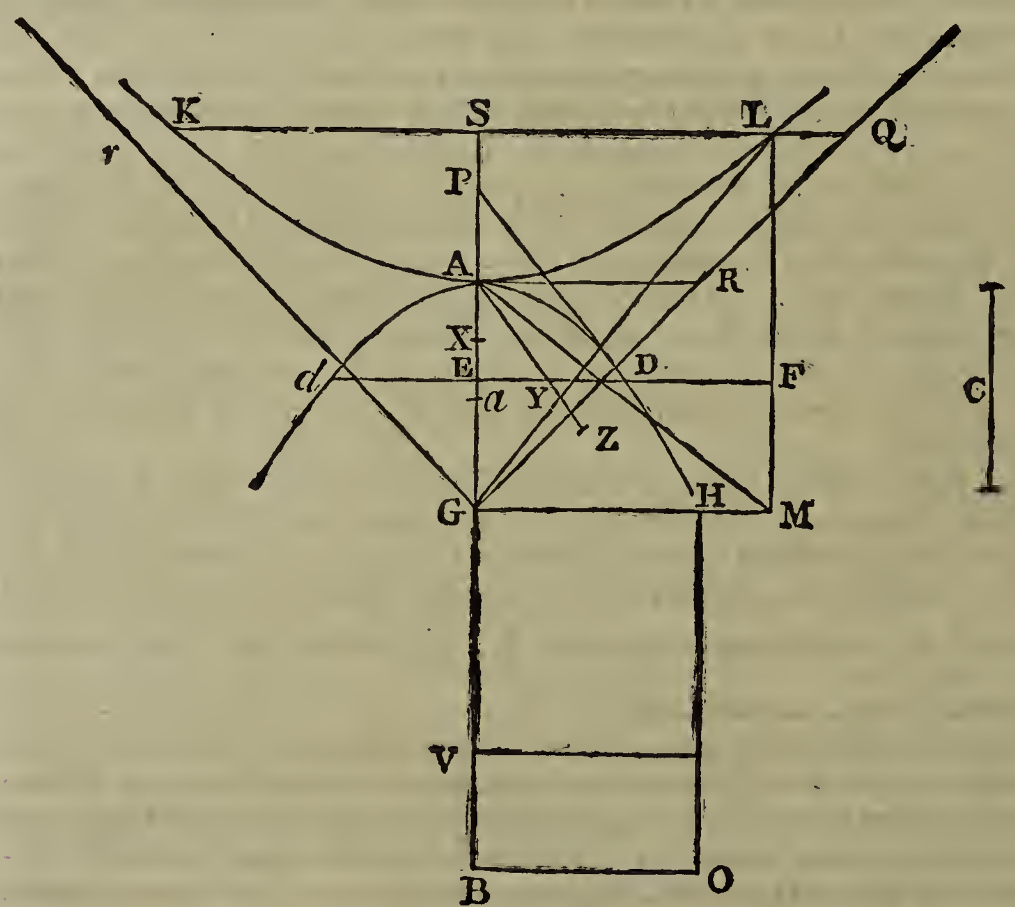
8. Eſto

digniſſima ſit contemplatio, utpote ex quâ id maximè percipiendum ſit, quod quo magis quis perceperit, eo quidem acutior exiſtimandus erit et ingenio pollentior, ſcilicet quàm ſit unum illud omne quod verum eſt; eos tamen, quibus nimium illæ captari atque credi ſolent, ſæpiſſimè fallunt. Nec mirum ſanè. Cùm haud in aliâ re magis cernatur mentis humanæ imbecilitas, quàm in eo quòd rerum ſimilitudines, quæ nullæ ſunt, ſæpiſſimè ſomniamus, quæ verè ſunt eas ægrè cernimus.

8. Sed ut ad noſtra revertamur; ſiquis, nullâ formulæ arcûs elliptici ratione habitâ, Parabolici longitudinem è naturâ ipſius parabolæ definire velit, is, ex eo quòd quadratum ordinatæ rectangulo comprehenſo abſciſſâ ab axe et parametro æquale ſit, ſubductis fluxionum calculis, in hanc æquationem incidet; deſignante nimirum literâ z arcum, y ordinatam, ſive ſinum arcûs rectum, p parametrum parabolæ: $\dot{z} = \frac{\dot{y}}{p}\sqrt{p^2+4yy}$. Vel in hanc, $\dot{z} = \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}}\sqrt{p+4x}$: deſignante x abſciſſam ab axe. Hiſce verò formulis, per radicum extractiones, in ſeries infinitas reſolutis, fluentium æſtimationem per Regulam 3^m. Analyſ. per æquationes infinitas ineundo, formulas aſſequetur quas ſuprà expoſuimus.

Cognatio Arcus Parab.

9. Cæterum ex hâc æquatione, $\dot{z} = \frac{\dot{y}}{p}\sqrt{p^2+4yy}$, manifeſta fit cognatio illa, quam Arcubus Parabolicis cum Areis quibuſdam Hyperbolicis intercedere, omnium credo primus Walliſius intellexit; quæ quidem talis eſt, ut Arcûs cujuſlibet Parabolici dimenſio ad quadraturam Hyperbolæ, et viciſſim, revocari poſſit.



Sit parabola cujus axis recta infinita AB poſitione data, vertex, A, parameter data C. Sumatur in parabolâ punctum quodvis D. A puncto D in axem deducatur ad perpendiculum recta DE, et in ED, extrorſùm productâ, capiatur DF æqualis ordinatæ DE; ut ſit EF duplo illius DE æqualis. In axe AB capiatur AG datæ C æqualis; eductâque ad perpendiculum rectâ GH, in eâ capiatur GH datæ etiam C æqualis. Semiaxe tranſverſo GA, ſecundo GH, ſcribatur hyperbola æquilatera KAL. Per F ducatur FL, cum hyperbolæ axe tranſverſo, GA, parallela; quæ hyperbolæ in L occurrat, axi ejus ſecundo in M. Ad ipſum ſemiaxem ſecundum, GH, applicetur rectangulum GO ſpatio hyperbolico AGML æquale. Dimidium lateris GB arcui AD æquale erit; vel, productâ DE uſque dum parabolæ rurſum in d occurrat, latus GB arcui DAd.

Cùm enim area AGML rectangulo GO ſit æqualis, erunt etiam areæ illius et rectanguli fluxiones ſemper inter ſe æquales. (Geometr. Flux. Prop. 11.) Rectangula igitur LM × $\dot{\text{GM}}$, GH × $\dot{\text{GB}}$ inter ſe æqualia. Fluxio igitur rectæ GB eſt ad fluxionem rectæ GM ut LM ad GH. Ducatur recta DP, quæ parabolam in D contingat, axi verò ejus in P occurrat. Erunt EA, AP inter ſe æquales. (Hamilton,

8. Esto VDE *Quadratrix*, cujus vertex est V, existente A centro & AE semi-diametro circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: demissoque Arcus et Area.

milton. Conic. Lib. I. Prop. XLVII.) Quare EA semissis est rectæ EP, et EA ad EP ut ED ad EF. Jam verò cùm ED sit ad EA, ut GH ad ED (propter parabolam) et EA ad EP ut ED ad EF, erit ex æquo ED ad EP ut GH ad EF, vel GM: et quadratum ex ED ad quadratum ex EP ut quadratum ex GH ad quadratum ex GM. Invertendo et componendo, quadrata ex EP et ex ED simul sumpta ad quadratum ex ED, ut quadrata ex GM et ex GH simul sumpta ad quadratum ex GH. At verò quadratis ex EP et ex ED simul sumptis quadratum ex DP est æquale (propter angulum ad E trianguli PED rectum). Et quadratis ex GM et ex GH simul sumptis quadratum ex ML est æquale (propter hyperbolam æquilateram.) (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXII.) Quare quadratum ex DP erit ad quadratum ex DE, ut quadratum ex ML ad quadratum ex GH: quare et recta DP ad rectam DE ut recta ML ad rectam GH. Sed ut recta DP ad rectam DE ita est fluxio arcûs AD ad fluxionem rectæ DE. (Introduct. Quadrat. Curv. § 4.) Et ostensum est, fluxionem rectæ GB esse ad fluxionem rectæ GM ut recta ML ad rectam GH. Erit igitur fluxio arcûs AD ad fluxionem rectæ ED ut fluxio rectæ GB ad fluxionem rectæ GM. Permutando, fluxio arcûs AD ad fluxionem rectæ GB ut fluxio rectæ ED ad fluxionem rectæ GM. Rectæ autem ED ad rectam GM ratio data est, illa utique quam unitas ad binarium habet. (ex construct.) Fluxionis igitur arcûs AD ad fluxionem rectæ GB eadem data ratio, unitatis ad binarium, erit. Et cùm hæc constans sit fluxionum ratio, fluentium etiam, curvæ AD rectæque GB, cùm simul illæ à nihilo generari inceperint, eadem inter ipsas ratio erit. (Geom. Flux. Prop. IV.) Arcus igitur AD rectæ GB semissis; et arcus DA*d* rectæ GB æqualis erit. Q. E. D. Cum Area Hyperb.

10. Ex hisce statim enascitur problematis, de longitudine Arcûs Parabolici inveniendâ, compositio elegantissima Cotesii. Ea verò est hæc.

MENSURA ARCUS PARABOLICI COTESIANA.

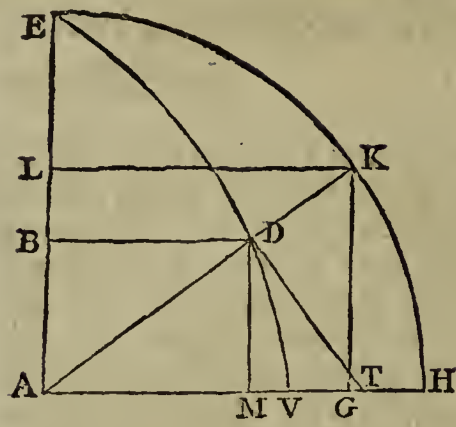
Inveniatur umbilicus parabolæ *d*AD qui sit X. A puncto A ducatur in ordinatam ED, recta AY, quæ ordinatam illam mediam dividat. Et rectæ AY addatur YZ, quæ æqualis sit ejus rationis, pro modulo, AX, logarithmo, quam trianguli AYE latera duo AY, AE, simul sumpta, ad tertium EY habent. Recta AZ arcui AD æqualis erit. (Harmon. Mensurar. Pars I. Scholion. Generale.) Hujus demonstrationem, quam nullam quidem ipse Cotesius attulit, Theorema nostrum facillimam suppeditat.

Jungantur enim GL, AM. Ad rectam GH applicetur rectangulum HV triangulo GML æquale. Sint GR, G*r* hyperbolæ KAL asymptotæ; per puncta A, L ducantur rectæ AR, LQ cum semiaxe secundo GH parallelæ; asymptotarum alteri, in punctis R, Q occurrentes. Harum illa AR hyperbolam in A continget; hæc LQ, in alio ei puncto præter L occurret. Sit occursus ille alter K. Eadem verò LQ axi transverso GA in S occurrat. Recta denique AG in puncto *a* media sit divisa. Itaque cùm DP sit ad DE ut ML ad GH (id enim in demonstrando theoremate novissimo ostendimus,) rectangula GH × DP, DE × ML erunt inter se æqualia. Rectangulum verò DE × ML triangulo GML est æquale, cùm utrumque dimidium sit rectanguli GL. Rectangulum igitur GH × DP triangulo GML est æquale. Sed eidem triangulo rectangulum HV est æquale. (Ita factum enim.) Rectangula igitur GH × DP, et HV, sive GH × GV, sunt inter se æqualia. Rectæ igitur DP, GV inter se æquales. Cùm verò rectæ EP, ED in punctis, A, Y, similiter sint divisæ, media namque earum utraque dividitur, rectæ AY, PD parallelæ erunt, et triangula EPD, EAY inter se similia. Quare AY erit ad PD ut EA ad EP; hoc est, AY semissi rectæ PD, ac propterea semissi rectæ GV, æqualis erit.

Rursùm cùm rectangulum GO spatio hyperbolico AGML sit æquale (ita enim factum est) et rectangulum HV triangulo GML (nam id quoque factum) erit rectangulum VO æquale sectori hyperbolico AGL; hoc est, logarithmo rationis rectæ AR ad LQ pro modulo $\frac{1}{2}$ GH^2, sive GH × G*a*. Harum verò trium KQ, AR, LQ continua est proportionum similitudo. (Hamilton. Conic. Lib. I. Prop. XXXVII.) Rationis igitur illius quam KQ habet ad AR, idem erit, atque ejus quam AR habet ad LQ, logarithmus. Rectangulum igitur VO logarithmus est rationis quam KQ habet ad AR pro modulo GH × G*a*. Recta verò AR semiaxi secundo GH est æqualis. (Hamilton. Lib. I. Prop. XXXVIII.) rectaque KQ duabus ML, MG simul sumptis est æqualis. Nam, propter hyperbolam æquilateram, triangulum rectangulum QSG est isosceles; illi utique RAG simile. Sunt igitur QS, SG, ac proinde QS,

QUADRATRICIS.

demissoque ad AE perpendiculo quovis DB, & actâ quadratricis tangente DT occurrente axi ejus AV in T: dic $AV=a$, & $AB=x$; eritque $DB=a-\frac{x^2}{3a}-\frac{x^4}{45a^3}-\frac{2x^6}{945a^5}-$ &c. Et $VT=\frac{x^2}{3a}+\frac{x^4}{15a^3}+\frac{2x^6}{189a^5}+$ &c. Et Area $AVDB=ax-\frac{x^3}{9a}-\frac{x^5}{225a^3}-\frac{2x^7}{6615a^5}-$ &c. Et Arcus $VD=x+\frac{2x^3}{27a^2}+\frac{14x^5}{2025a^4}+\frac{604x^7}{893025a^6}+$ &c (r). Unde viciffim, ex dato BD, vel VT, aut areâ AVDB, arcuve VD, per refolutionem affectarum æquationum erui poteft x, feu AB.



9. Efto denique AEB *Sphæroides*, revolutione ellipfeos AEB circa axem AB genita, & fecta planis quatuor, AB per axem tranfeunte, DG

ARC PARAB. COTES.

QS, ML, inter fe æquales.: et propter rectam LK ad axem tranfverfum ordinatim applicatam, KS, LS, ac proinde KS, GM inter fe æquales funt. E duabus igitur, KS, SQ, compofita illa KQ, duabus ML, MG fimul fumptis, æqualis erit. Rectangulum igitur VO illius utique rationis eft logarithmus, pro modulo HG × Ga, quam duæ ML, MG fimul fumptæ ad GH habent; vel rationis ejus quam ad GA habent duæ MA, MG fimul fumptæ. (Sunt enim AG, GH inter fe æquales, factæ enim; et propter hyperbolam æquilateram, æquales etiam ML, MA.) Sed recta VB eft ad rectam Ga ut rectangulum VO, vel GH × VB, ad rectangulum GH × Ga. Quare cùm rectangulum VO logarithmus fit rationis quam duæ MA, MG fimul fumptæ habent ad AG, pro modulo rectangulo GH × Ga, erit recta VB ejufdem rationis logarithmus pro modulo rectâ Ga.

Porrò, cùm ED fit ad EP ut GH ad GM, id enim in demonftrando theoremate noviffimo oftendimus, erit etiam ED ad EP, ut AG ad GM. Ac proinde EY ad EA ut AG ad GM. Anguli vero YEA, AGM inter fe æquales funt; rectus enim uterque. Triangula igitur YEA, AGM inter fe fimilia; ac propterea duæ AY, AE fimul fumptæ erunt ad YE, ut duæ illæ AM, MG fimul fumptæ ad AG. Idem igitur utriufque rationis logarithmus erit. Rationis autem illius quam duæ AY, AE fimul fumptæ habent ad EY, recta YZ logarithmus eft pro modulo rectâ AX. Ita factum enim. Quare et illius quam duæ MA, MG fimul fumptæ ad AG habent, erit eadem YZ pro modulo utique fuo AX logarithmus. Ejufdem vero rationis recta VB logarithmus pro modulo rectâ Ga. Id enim oftenfum. Sed datæ alicujus rationis, pro modulis diverfis, logarithmi funt inter fe ficut moduli. Recta igitur VB ad rectam YZ erit ut Ga ad AX. Sed AX femiffis eft ipfius Ga. Nempe cùm parametri parabolæ hæc Ga femiffis, illa AX pars quarta fit. Recta igitur YZ rectæ VB femiffis. Sed oftenfa eft AY femiffis rectæ GV. Recta igitur AZ, è duabus AY, YZ compofita, rectæ GB, è duabus GV, VB, compofitæ, femiffis erit. Sed arcus parabolicus AD ejufdem GB eft femiffis. Recta igitur AZ arcui AD æqualis erit. Q. E. D.

Hujus problematis, de arcu parabolico dimetiendo, alia eft compofitio Hugenii; (De Horolog. Ofcillatorio. Pars. 3. inter additamenta. Prop. 9.) quæ tamen Cotefianæ multùm elegantiâ et fimplicitate cedit.

ARC. ET AREA

(r) PONATUR $AE=1.AV=a.AB=x$. E naturâ Quadratricis erit EA : AV = arc. KH : x. Quare arc. $KH=\frac{x}{a}$.

Quare etiam GK (five finus arcûs HK) $=\frac{x}{a}-\frac{x^3}{6a^3}+\frac{x^5}{120a^5}-\frac{x^7}{5040a^7}+$,

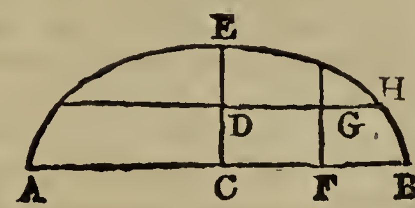
$$GK^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^4}{3a^4}+\frac{2x^6}{45a^6}-\frac{x^8}{315a^8}+,$$

$$AG=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{3a^4}-\frac{2x^6}{45a^6}+\frac{x^8}{315a^8}+}=1-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^4}{24a^4}-\frac{x^6}{720a^6}+.$$

Propter

DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem, & FG parallelo CE: sitque recta $CB=a$, $CE=c$, $CF=x$, & $FG=y$. Et sphæroideos segmentum CDGF dictis quatuor planis comprehensum, erit (f) Segmentum Sphæroid.

$$+2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 - \&c.$$
$$- \frac{cx^3}{3a^2} - \frac{x^3}{18ca^2} - \frac{x^3}{40c^3a^2} - \frac{5x^3}{336c^5a^2} - \&c.$$
$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \&c.$$
$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \&c.$$
$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - \&c.$$
$$- \&c.$$



Ubi

Propter triangula AKG, ADM similia, $KG : GA = DM : MA = AB : BD$. Quadratricis

$$\text{Ergo } BD = \frac{AB \times GA}{GK} = \frac{x - \frac{x^3}{2a^2} + \frac{x^5}{24a^4} - \frac{x^7}{720a^6} +,}{\frac{x}{a} - \frac{x^3}{6a^3} + \frac{x^5}{120a^5} - \frac{x^7}{5040a^7} +,} = a - \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}.$$

$$\text{Hinc area } ABDV = ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} -,$$

$$\text{Præterea } \dot{DB} = \frac{2x\dot{x}}{3a} + \frac{4x^3\dot{x}}{45a^3} + \frac{12x^5\dot{x}}{945a^5} +,$$

$$\text{Sed } \dot{AB} : \dot{DB} = DM : MT. \text{ Ergo } MT = \frac{\dot{DB} \times DM}{\dot{AB}} = \frac{\dot{DB} \times x}{\dot{x}}. \text{ Ergo } MT = \frac{2x^2}{3a} + \frac{4x^4}{45a^3} + \frac{12x^6}{945a^5} +.$$

$$\text{Et } MV = a - DB = \frac{x^2}{3a} + \frac{x^4}{45a^3} + \frac{2x^6}{945a^5} +. \text{ Hinc } VT = \frac{x^2}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} +.$$

$$\text{Quadratum ex } \dot{DB} = \dot{x}\dot{x} \times \overline{\frac{2x}{3a} + \frac{4x^3}{45a^3} + \frac{12x^5}{945a^5} +}\Big|^2 = \dot{x}\dot{x} \times \frac{4x^2}{9a^2} + \frac{16x^4}{135a^4} +.$$

$$\text{Quare } \dot{DB}^2 + \dot{AB}^2 = \dot{x}\dot{x} \times \overline{1 + \frac{4x^2}{9a^2} + \frac{16x^4}{135a^4} +}$$

$$\text{Et } \sqrt{\dot{DB}^2 + \dot{AB}^2} = \dot{x} \times \overline{1 + \frac{2x^2}{9a^2} + \frac{14x^4}{405a^4} +}$$

$$\text{Hujus fluens} = VD = x + \frac{2x^3}{27a^2} + \frac{14x^5}{2025a^4} +.$$

(f) Figura Sphæroides centro C, circumactu ellipseos cujus semiaxes CB, CE, circa axem AB, generata, secari intelligatur quatuor planis. Quorum tribus positione datis, sit quartum mobile. Ex tribus positione datis, duo per centrum transeant; atque horum alterum quidem per axem AB, quod superficiem sphæroideos secando ellipsin effecerit generanti similem et æqualem. Alterum verò è duobus per centrum, illud ipsum sit, super quo axis AB ad perpendiculum est erectus; quod superficiem secando circulum effecerit, illum ipsum utique quem planetæ spheroideos, circa axem AB versatilis, Astronomi Æquinoctialem vocarent. Cum hoc verò reliquum ex planis tribus positione datis parallelum sit; ut, superficiem secando, illud etiam circulum efficiat, minorem scilicet, cum æquinoctiali parallelum. Quartum denique ex iis quibus sphæroidem secari intelligimus, quod mobile posuimus, eâ quidem lege sit mobile, ut cum illo, quod per axem AB ductum est, semper parallelum maneat. Ex quo fiet, ut quocunque loco id consistat, superficiem sphæroideos secando, ellipsin effecerit, magnitudine quidem in aliis à centro figuræ sphæroideos distantiis aliam, specie verò generantis semper similem. Hisce positis, magnitudinem segmenti Segment. Sphæroid.

figuræ

Segmentum Sphæroid.

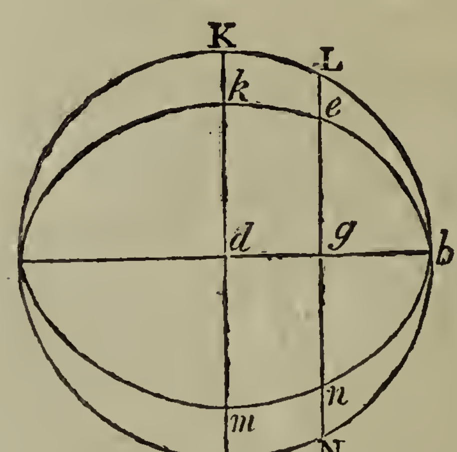
Ubi numerales coefficientes supremorum terminorum ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur multiplicando primum

Segmentum

figuræ ſphæroideos, quatuor illis planis intercepti, generaliter definire oportet, pro omni ſitu plani mobilis.

Hunc igitur in finem puta figuram ſphæroidem jam quintùm ſecari, plano quidem per axem AB, quod ſuper illo per axem AB priùs ducto ad perpendiculum erectum ſit. Hoc igitur planum, ſicut omnia quæ per axem AB ducantur, ſuperficiem ſphæroideos ſecando, ellipſin effecerit, generanti ſimilem et æqualem, quam ellipſis quidem AEB lineationis Newtonianæ repreſentat. Idem verò planum circulum æquinoctialem ſecundum rectam CD ſecet; circulum minorem cum æquinoctiali parallelum, ſecundam rectam FG; planum denique mobile ſecundum DG. Itaque rectæ CF, DG, quas duo plana parallela tertium ſecando effecerint, inter ſe parallelæ erunt. (Elem. XI. 16.) Simili ratione duæ CD, FG erunt inter ſe parallelæ. Figura igitur CFGD parallelogramma erit. Angulus autem FCD eſt rectus (per Elem. XI. Def. 3.) Nempe cùm recta CD ſit in plano circuli æquinoctialis, ſuper quo axis AB ad perpendiculum erectus eſt. Quare rectangula eſt figura parallelogramma CFGD. Rectanguli autem CFGD latera CF, DG magnitudine data ſunt, propter rectas CD, FG poſitione datas, quibus illæ CF, DG ad perpendiculum ſunt interpoſitæ. Reliqua verò rectanguli latera, CD, FG, magnitudine mutabilia ſunt, nimirum cùm CD, et illi æqualis FG, ſit plani mobilis à ſphæroideos centro mutabilis diſtantia.

Rectæ CD, DG ellipſin AEB productæ in punctis E, H, ſecent. Recta CE ſemiaxis erit ellipſeos AEB, cujus ſemiaxis alter eſt CB, quem recta CE, in centro ſcilicet, ad perpendiculum inſiſtit. Exponatur recta *dh* rectæ DH æqualis. Huic ad perpendiculum apponatur *dk*, ad quam *dh* rationem habeat quam CB ad CE. Et ſemiaxibus *dh*, *dk* ſcribatur ellipſis; quæ illi utique ſimilis et æqualis erit, quam planum mobile, ſi ad diſtantiam CD à centro ſphæroideos id conſtiterit, ſuperficiem ſecando, effecerit. Et ſi in *dh* capiatur *dg* rectæ DG æqualis, et à puncto *g* educatur ad perpendiculum recta *gl*, quæ ellipſin *hkm* in *l* ſecet; tum ſi producantur *kd*, *lg*, uſquedum ellipſin utraque rurſum ſecet, hæc in *n*, illa in *m*, area *kmnl* æqualis erit ellipſeos, quam planum mobile ſuperficiem ſphæroideos ſecando effecerit, ſegmento; illi inquam hujus ellipſeos ſegmento, quod duobus planis parallelis, æquinoctialis circuli alteriuſque minoris, interceptum eſt, iſta area *kmnl* æqualis erit. Quare fluxio ſolidi, cujus magnitudo exquirenda eſt, exponetur per ſolidum quoddam, cujus altitudo erit linea recta, ſive data, ſive mutabilis, per quam fluxio rectæ CD exponitur, baſes autem parallelæ, area mutabilis *kmnl*, alteraque huic ipſi ſimilis et æqualis: cujus quidem ſolidi hoc erit ſymbolum algebraicum, $Z \times \dot{y}$; deſignante literâ Z aream mutabilem *kmnl*, literâ *y* rectam mutabilem CD. Ad fluentis igitur æſtimationem illud opus eſt, ut litera Z in ſeries infinitas reſolvatur à radice *y* procreatas.



Hunc in finem deſignentur rectæ datæ CB, CE, CF, literis *a*, *c*, *x*. Centro *d* radio *dh* ſcribatur circulus, qui rectis *mk*, *ln*, in utramque partem productis, in punctis K, M, L, N occurrat. Propter ellipſin AEB, quadratum ex DH erit ad differentiam quadratorum ex CE, CD, ut quadratum ex CB ad quadratum ex CE. Hoc eſt $DH^2 : c^2 - y^2 = a^2 : c^2$. Quare DH, vel *dh*, $= \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$. Hinc ſi formula Areæ Circularis, quæ à Newtono in Analyſi per Æquationes Infinitas tradita eſt, (Cap. III. §. 6.) cum binario multiplicetur, tum in formulam multiplicatione illâ factam ſi pro *a* ſubſtituatur $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$, veniet formula generalis Areæ Circularis KLMN pro radio mutabili DH, vel *dh*. Nempe

$$KLMN = \frac{2a}{c}\sqrt{c^2 - y^2} \cdot x - \frac{c}{3a\sqrt{c^2 - y^2}} x^3 - \frac{c^3}{20 \cdot a^3 \cdot \overline{c^2 - y^2}|^{\frac{3}{2}}} x^5 - \frac{c^5}{56a^5 \cdot \overline{c^2 - y^2}|^{\frac{5}{2}}} x^7 -,$$

Area verò Circularis KLMN ad Aream Ellipticam *klnm* rationem habet eam, quam *dh* ad *dk*, ſive eam quam CE ad CB (per Rat. Prim. et Ult. Prop. IV. Cor. II. 1.) nempe cùm hæc conſtans ſit rectarum LG, *lg* inter ipſas ratio, in omni magnitudine abſciſſæ *dg*. Quare $KLMN : Z = a : c$. Ergo

Z =

mum coefficientem 2 continuò per terminos hujus progreſſionis $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum SPHÆROID.

$$Z = \frac{c}{a}\,\text{KLMN} = 2\sqrt{c^2-y^2}\,x - \frac{c^2}{3a^2.\sqrt{c^2-y^2}}x^3 - \frac{c^4}{20.a^4.\overline{c^2-y^2}\rceil^{\frac{3}{2}}}x^5 - \frac{c^6}{56a^6.\overline{c^2-y^2}\rceil^{\frac{5}{2}}}x^7 -,$$ SPHÆROID.

Itaque, ſi pro poteſtatibus hujus binomii, c^2-y^2, quæ indicibus $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -$, deſignantur, ſubrogentur ſeries, in quas poteſtates illæ, per formulam generalem à Newtono in Excerpto Primo traditam, ſunt reſolvendæ; reſolvetur quidem Z in ſeries infinitas à radice y procreatas, vel potiùs à geminâ radice x et y. Etenim licet x datam poſuimus, quo calculi ſcilicet redderentur leviores, reverâ tamen x æquè atque y indefinita cenſenda eſt, cùm utraque pro arbitrio ſumenda ſit. Majoris autem evidentiæ gratiâ calculos ſubduco.

$$\sqrt{c^2-y^2} = c - \frac{y^2}{2c} - \frac{y^4}{8c^3} - \frac{y^6}{16c^5} - \frac{5y^8}{128c^7} -,$$

$$\overline{c^2-y^2}\rceil^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{c} + \frac{y^2}{2c^3} + \frac{3y^4}{8c^5} + \frac{5y^6}{16c^7} + \frac{35y^8}{128c^9} +,$$

$$\overline{c^2-y^2}\rceil^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{c^3} + \frac{3y^2}{2c^5} + \frac{15y^4}{8c^7} + \frac{35y^6}{16c^9} + \frac{315y^8}{128c^{11}}$$

$$\overline{c^2-y^2}\rceil^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{c^5} + \frac{5y^2}{2c^7} + \frac{35y^4}{8c^9} + \frac{105y^6}{16c^{11}} + \frac{1155y^8}{128c^{13}}$$

$$\overline{c^2-y^2}\rceil^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{c^7} + \frac{7y^2}{2c^9} +,$$

Hinc $2\sqrt{c^2-y^2}.\,x = 2cx - \frac{y^2}{c}x - \frac{y^4}{4c^3}x - \frac{y^6}{8c^5}x - \frac{5y^8}{64c^7}x$

$$\frac{c^2}{3a^2\sqrt{c^2-y^2}}x^3 = \frac{c}{3a^2}x^3 + \frac{y^2}{6a^2c}x^3 + \frac{y^4}{8a^2c^3}x^3 + \frac{5y^6}{48c^5a^2}x^3 + \frac{35y^8}{384a^2c^7}x^3 +,$$

$$\frac{c^4}{20a^4.\overline{c^2-y^2}\rceil^{\frac{3}{2}}}x^5 = \frac{c}{20.a^4}x^5 + \frac{3y^2}{40a^4c}x^5 + \frac{3y^4}{32.a^4c^3}x^5 + \frac{7y^6}{64a^4c^5}x^5 + \frac{63y^8}{512a^4c^7}x^5 +,$$

$$\frac{c^6}{56a^6.\overline{c^2-y^2}\rceil^{\frac{5}{2}}}x^7 = \frac{c}{56a^6}x^7 + \frac{5y^2}{112a^6c}x^7 + \frac{5y^4}{64a^6c^3}x^7 + \frac{15y^6}{128c^5a^6}x^7 + \frac{165y^8}{1024a^6c^7}x^7 +,$$

$$\frac{5c^8}{576a^8.\overline{c^2-y^2}\rceil^{\frac{7}{2}}}x^9 = \frac{5c}{576a^8}x^9 + \frac{35y^2}{1152a^8c}x^9 +,$$

Horum ordini ſummo inferiorum omnium ordinum ſummas auferendo, conficietur

$$\begin{aligned}
Z = 2cx &- \frac{x}{c}y^2 - \frac{x}{4c^3}y^4 - \frac{x}{8c^5}y^6 - \frac{5x}{64c^7}y^8 - \frac{7x}{128c^9}y^{10} -,\\
-\frac{cx^3}{3a^2} &- \frac{x^3}{6a^2c}y^2 - \frac{x^3}{8a^2c^3}y^4 - \frac{5x^3}{48c^5a^2}y^6 - \frac{35x^3}{384a^2c^7}y^8 -,\\
-\frac{cx^5}{20.a^4} &- \frac{3x^5}{40a^4c}y^2 - \frac{3x^5}{32a^4c^3}y^4 - \frac{7x^5}{64a^4c^5}y^6 -,\\
-\frac{cx^7}{56a^6} &- \frac{5x^7}{112a^6c}y^2 - \frac{5x^7}{64a^6c^3}y^4 -,\\
-\frac{5cx^9}{576a^8} &- \frac{35x^9}{1152a^8c}y^2 -,\\
-\frac{7c.x^{11}}{1408a^{10}} &-,
\end{aligned}$$

Nimirum ordo quiſque eo uſque produci debet, ut in membro cujuſque extremo indices literarum x, et y, ſimul ſumpti, eundem numerum conficiant. Sicut hîc factum eſt. Etenim in membro extremo ordinis ſummi, index literæ x eſt 1, literæ y, 10; qui numeri ſimul ſumpti 11 conficiunt. In membro itidem extremo ordinis proximè inferioris, index literæ x eſt 3, literæ y, 8; atque hi numeri ſimul ſumpti rurſum 11 conficiunt. In membro tertii ordinis extremo index literæ x eſt 5, literæ y, 6; et hi numeri ſimul ſumpti 11 reddunt. Sic in ordinibus etiam inferioribus, mem-

Excerptum Quartum. terminorum in unâquâque columnâ defcendentium in infinitum producuntur multiplicando continuò coefficientem fupremi termini in primâ columnâ per eandem progreffionem, in fecundâ autem per terminos hujus $\frac{1\times 1}{2\times 3}$, $\frac{3\times 3}{4\times 5}$, $\frac{5\times 5}{6\times 7}$, $\frac{7\times 7}{8\times 9}$, &c. in tertiâ per terminos hujus $\frac{3\times 1}{2\times 3}$, $\frac{5\times 3}{4\times 5}$, $\frac{7\times 5}{6\times 7}$, $\frac{9\times 7}{8\times 9}$, &c. in quartâ per terminos hujus $\frac{5\times 1}{2\times 3}$, $\frac{7\times 3}{4\times 5}$, $\frac{9\times 5}{6\times 7}$, &c. in quintâ per terminos hujus $\frac{7\times 1}{2\times 3}$, $\frac{9\times 3}{4\times 5}$, $\frac{11\times 5}{6\times 7}$, &c. Et fic in infinitum.

10. Et eodem modo fegmenta aliorum folidorum defignari, & valores eorum aliquando commodè per feries quafdem numerales in infinitum produci poffunt.

11. Ex his videre eft, quantum fines analyfeos per hujufmodi infinitas æquationes ampliantur: quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pæne dixerim problemata (fi numeralia *Diophanti* & fimilia excipias) fefe extendit.

12. Non tamen omninò univerfalis evadit, nifi per ulteriores quafdam methodos eliciendi feries infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad feries infinitas, per divifionem vel

membrorum cujufque extremorum indices fimul fumpti, 7 et 4, 9 et 2, 11 & 0, numerum eundem 11 reddunt. Hoc autem idcirco diligentiùs expofuimus, quia in formulis hujufmodi condendis, quæ ex feriebus infinitis, numero infinitis, è duplici radice procreatis conflandæ funt, idem femper tenendum eft; nempe ut feries omnes fimiliter producantur. Similiter autem produci intelligo, quarum in extremis membris indices radicum duarum, fimul fumpti, eundem numerum, vel eandem fortè quantitatem fractam conficiunt.

Itaque quantitate Z in feries infinitas, quas modò expofuimus, refolutâ, multiplicentur feries illæ omnes in fluxionem $\dot{y}$.

Ita veniet

$$\begin{array}{llllllll}
Z\dot{y} = 2cx & & -x & & -\frac{x}{4} & & -\frac{x^8}{8} & \\
-\frac{cx^3}{3a^2} & & -\frac{x^3}{6a^2} & & -\frac{x^3}{8a^2} & & -\frac{5x^3}{48a^2} & y^6\dot{y} \\
-\frac{cx^5}{20a^4} & & -\frac{3x^5}{40a^4} & \times\frac{y^2\dot{y}}{c} & -\frac{3x^5}{32a^4} & \times\frac{y^4\dot{y}}{c^3} & -\frac{7x^5\dot{y}}{64a^4} & \\
-\frac{cx^7}{56a^6} & \times\dot{y} & -\frac{5x^7}{112a^6} & & -\frac{5x^7}{64a^6} & & -, & \\
-\frac{5cx^9}{576a^8} & & -\frac{35x^9}{1152a^8} & & -, & & & \\
-\frac{7c.x^{11}}{1408a^{10}} & & -, & & & & &
\end{array}$$

Cujus

vel extractionem radicum ſimplicium affectarumve, pervenire. CON-STRUCT. MECHANIC.
Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere ; ut neque alia quædam tradere, quæ circa reductionem infinitarum ſerierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parciùs ſcribo, quòd hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cœperint, adeo ut ab iiſdem jam per quinque ferè annos abſtinuerim.

13. UNUM tamen addam : quòd poſtquam Problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, poſſint inde variæ Approximationes, in uſum Mechanicæ, nullo ferè negotio formari ; quæ, per alias methodos quæſitæ, multo labore temporiſque diſpendio conſtare ſolent ([t]).

14. Cujus rei exemplo eſſe poſſunt tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadraturâ circuli. Nam, ut ex datâ arcûs chordâ, A, & demidii arcûs chordâ, B, arcum illum proximè aſſequaris ; finge arcum illum eſſe z, & circuli radium r ; juxtaque ſuperiora erit A (nempe duplum ſinûs dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4\times 6r^2} + \frac{z^5}{4\times 4\times 120r^4} -$ &c ([u]). Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times 16\times 6r^2} + \frac{z^5}{2\times 16\times 16\times 120r^4} -$ &c ([x]). Duc jam B in numerum fictitium n, & à producto aufer A, & reſidui ſecundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2\times 16\times 6r^2} + \frac{z^3}{4\times 6r^2}$,) eo ut evaneſcat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$, et erit $8B - A = 3z * - \frac{3z^5}{64\times 120r^4} +$ &c. hoc eſt $\frac{8B-A}{3} = z$; errore tantùm exiſtente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in exceſſu ([y]). Quod eſt Theorema *Hugenianum* ([z]).

Inſuper,

Cujus fluens per formulam exponetur ex ſeriebus infinitis, numero infinitis, conflatam, qualis à Newtono allata eſt.

([t]) Confer Geom. Analyt. C. XI. Sect. 1.

([u]) In formulam utique generalem ſinûs ex arcu ſuprà § 2. traditam ſi pro illis z, z^3, z^5, z^7, hæc $\frac{1}{2}z, \frac{z^3}{8}, \frac{z^5}{32}, \frac{z^7}{128}$ ordine ſubſtituantur, veniet ſinûs dimidii arcûs formula generalis; $\frac{1}{2}z - \frac{z^3}{8\times 6r^2} + \frac{z^5}{2\times 16\times 120r^4} -$; cujus membra omnia cum binario ſi multiplicaveris, veniet $z - \frac{z^3}{4\times 6r^2} + \frac{z^5}{4\times 4\times 120r^4} -$, $=$ A, atque hæc Chordæ quidem ex arcu Formula generalis erit.

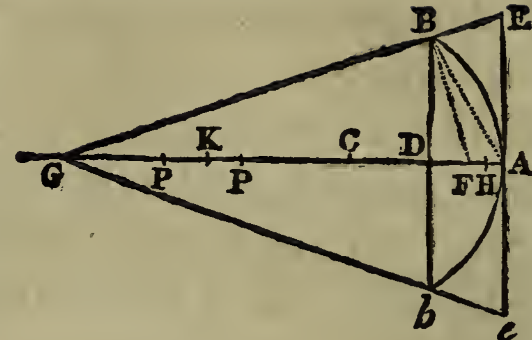
([x]) Hanc æquationem ita obtinebis, ſi in formulam generalem chordæ ex arcu modò inventam, pro illis z, z^3, z^5, z^7, hæc $\frac{z}{2}, \frac{z^3}{8}, \frac{z^5}{32}, \frac{z^7}{128}$ ordine ſubſtitueris.

([y]) In defectu potiùs ; nempe rectæ eo modo inventæ arcubus minores ſunt : ſicut rectè ſtatuit Hugenius.

([z]) Hugen. de Circuli Magnitudine inventâ, Prop. XII.

 ([a]) Per

EXCERPTUM QUARTUM.



15. Insuper, si in arcûs, Bb, sagittâ AD indefinitè productâ, quæratur punctum G, à quo actæ rectæ, GB, Gb, abscindant tangentem Ee quàm proximè æqualem arcui isti: esto circuli centrum C, diameter AK$=d$, & sagitta AD$=x$: et erit DB $(=\sqrt{dx-x^2})=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}}-$ &c. Et AE (=AB)$=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}+\frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}+$ &c (aa). Et AE − DB : AD :: AE : AG. Quare AG $=\frac{3}{2}d-\frac{1}{5}x-\frac{12x^2}{175d}-$ vel + &c (bb). Finge ergo AG$=\frac{3}{2}d-\frac{1}{5}x$; et viciſſim erit DG $(\frac{3}{2}d-\frac{6}{5}x)$: DB :: DA : AE − DB. Quare AE − DB $=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}+\frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}+$ &c. Adde DB; & prodit AE $=d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}+\frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}+$ &c. Hoc aufer de valore ipſius AE ſuprà habito, & reſtabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}+$ vel − &c. Quare in AG, cape AH quintam partem DA, et KG=HC, et actæ GBE, Gbe abſcindent tangentem Ee quàm proximè æqualem arcui BAb; errore tantùm exiſtente

(aa) Per formulam ſuprà traditam § I. arcûs ex ſinu verſo. Quòd ſi huic æquationi prior dematur, pars ſcilicet parti, hæc tertia veniet AE − DB $=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^{\frac{7}{2}}}{28d^{\frac{5}{2}}}+,$

(bb) NEMPE ex hâc analogiâ AE − DB:AD=AE:AG, efficitur AG $=\frac{\text{AD}\times\text{AE}}{\text{AE}-\text{DB}}$.

Sed AD × AE $=x\times$ AE $=x\times d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}}+,$

Et AE − DB $=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^{\frac{7}{2}}}{28d^{\frac{5}{2}}}+,$

Quare AG $=\left\{\frac{x\times d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+,}{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}+,}=\frac{d+\frac{x}{6}+\frac{3x^2}{40d}+\frac{5x^3}{112d^2}+,}{\frac{2}{3}+\frac{x}{5d}+\frac{3x^2}{28d}+,}\right.$

Unde diviſione peractâ veniet AG $=\frac{3}{2}d-\frac{1}{5}x-\frac{12x^2}{175d}-$ vel +,

(cc) Nimirum ſi capiatur AG $=\frac{3}{2}d-\frac{1}{5}x-\frac{12x^2}{175d}$, ablatâ AK $=d$, relinquetur KG $=\frac{1}{2}d-\frac{1}{5}x-\frac{12x^2}{175d}=$ CH $-\frac{12x^2}{175d}$. Sed $\frac{12x^2}{175d}=\frac{3}{5}x\times\frac{4}{5}x\times\frac{1}{7d}=\frac{3\text{AH}\times\text{DH}}{7\text{AK}}$.

(dd) Analyſ. per Æquationes numero terminorum Infinitas. Cap. III. § 7.

(ee) Immò errore hujus ferè duplo, id quod ex ſequenti computatione manifeſtum fit.

$\frac{2}{3}$ AB

Construct. Mechanic.

iſtente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ + vel − &c. multo minore ſcilicet quàm in Theoremate *Hugenii*. Quòd ſi fiat 7AK : 3AH : : DH : n; et capiatur KG = CH − n, erit error adhuc multo minor (cc).

16. Atque ita, ſi Circuli ſegmentum aliquod BAb per Mechanicam deſignandum eſſet: primò reducerem aream iſtam in infinitam ſeriem, puta hanc; $\mathrm{B}b\mathrm{A} = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ − &c (dd). Dein quærerem conſtructiones Mechanicas, quibus hanc ſeriem proximè aſſequerer: cujuſmodi ſunt hæ. Age rectam AB, et erit ſegmentum $\mathrm{B}b\mathrm{A} = \overline{\frac{2}{3}\mathrm{AB} + \mathrm{BD}} \times \frac{4}{5}\mathrm{AD}$ proximè; exiſtente ſcilicet errore tantùm $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx}$ + &c. in defectu (ee): vel proximiùs, erit ſegmentum illud (biſecto AD in F, & rectâ actâ BF) $= \frac{4\mathrm{BF} + \mathrm{AB}}{15} \times 4\mathrm{AD}$; exiſtente errore ſolummodo $\frac{x^3}{500d^2}\sqrt{dx}$ + (ff) &c. qui ſemper minor erit quàm $\frac{1}{1500}$ totius ſegmenti, etiamſi ſegmentum illud ad uſque ſemicirculum augeatur.

17. Sic et in Ellipſi BAb, [*vid. fig. præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape $\mathrm{PG} = \frac{1}{2}\mathrm{AP} + \frac{19\mathrm{AK} - 21\mathrm{AP}}{10\mathrm{AK}} \times \mathrm{AD}$. In Hyperbolâ verò, cape $\mathrm{PG} = \frac{1}{2}\mathrm{AP} + \frac{19\mathrm{AK} + 21\mathrm{AP}}{10\mathrm{AK}} \times \mathrm{AD}$ (gg). Et acta

$$\frac{2}{3}\mathrm{AB} = \frac{2}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{BD} = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} -,$$

$$\frac{2}{3}\mathrm{AB} + \mathrm{BD} = \frac{5}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} -,$$

$$\frac{4}{5}\mathrm{AD} = \frac{4}{5}x$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\frac{2}{3}\mathrm{AB} + \mathrm{BD}} \times \frac{4}{5}\mathrm{AD} = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{10d^{\frac{3}{2}}} -, \\ \text{Area } \mathrm{B}b\mathrm{A} = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} \end{array}\right\} \text{Differentia} = \overline{\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{14}}\,\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{70}\,\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}}$$

(ff) Errore rurſum duplo

Nempe $\mathrm{BF}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AF}^2 - \overline{2\mathrm{DF} \times \mathrm{FA}} = \mathrm{AB}^2 - 3\mathrm{AF}^2 = dx - \frac{3}{4}x^2$

$$\mathrm{BF} = \sqrt{dx - \tfrac{3}{4}x^2} = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{128d^{\frac{3}{2}}} - \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{1024d^{\frac{5}{2}}} -,$$

$$4\mathrm{BF} = 4d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{3}{2}}} - \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{5}{2}}} -,$$

$$\mathrm{AB} = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$4\mathrm{BF} + \mathrm{AB} = 5d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{32d^{\frac{3}{2}}} - \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^{\frac{5}{2}}} -,$$

$$\frac{4\mathrm{AD}}{15} = \frac{4x}{15}$$

$$\frac{4\mathrm{BF} + \mathrm{AB}}{15} \times 4\mathrm{AD} = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^{\frac{7}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} - \frac{9x^{\frac{9}{2}}}{64 \times 5d^{\frac{5}{2}}}$$

Excerptum Quartum.

acta recta GBE abscindet tangentem AE quàm proximè æqualem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo arcus ille non sit nimis magnus (hh).

Et

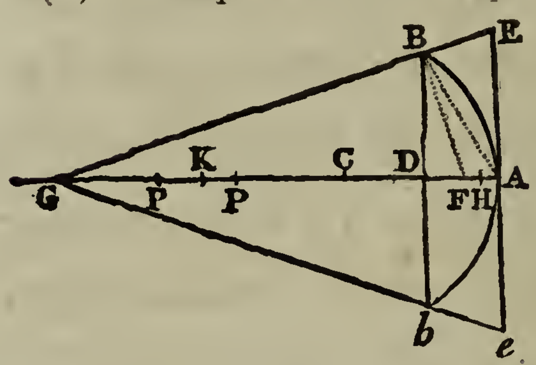
$$\text{Area } \mathrm{B}b\mathrm{A} = \tfrac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} -$$

$$\text{Error} = \overline{\tfrac{3}{40} - \tfrac{1}{14}}\,\frac{x^{\frac{7}{2}}}{d^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{280d^2}\sqrt{dx}$$

2. Cæterum viam investigandi generalem, quâ hæc et hisce similia assequi liceat, et errores etiam, quantùm velis, imminuere, Newtonus ipse indicavit Geometriæ Analyticæ Cap. XI. § I.

(gg) In Parabolâ capiatur PG $= \frac{1}{2}$AP $+ \frac{19}{10}$AD.

(hh) Nempe posito Problemate quàm maximè generali, ut Curvâ quâlibet AB positione datâ, inveniatur in axe ejus punctum G, unde si recta GB ad punctum quodlibet in curvâ B educatur, producta illa à rectâ AE, quæ curvam in axis vertice contingat, auferat partem AE arcui AB quàm proximè æqualem; hoc inquam Problemate ita generaliter proposito, quæcunque demum sit Curva AB, modò talis sit ut arcûs ejus AB longitudo ex sinu ejus, vel recto quem vocant vel verso, per seriem infinitam exponi possit, eadem servanda erit investigandi ratio, quam Newtonus usurpabat, cùm de arcu Circulari ageretur.



Nimirum factum puta id quod efficiendum est. Sit G punctum illud quod quærimus; junctaque GB tangenti AE in E occurrat, et abscindat AE arcui AB æqualem. A puncto B in axem AG ad perpendiculum deducatur recta BD. Jam cùm arcûs AB longitudo ex utrâque rectarum DB, vel DA, puta ex DA, per seriem infinitam data sit, id enim ponimus; per eandem seriem infinitam data erit rectæ AE longitudo. Sed ex curvæ naturâ data erit recta DB ex illâ DA. Symbolum igitur rectæ DB in seriem infinitam, si opus sit, resolutum auferatur seriei, quâ arcus AB exponitur. Relinquetur nova series; cujus, si ea infinitè producatur, summa arcûs AB rectæque DB, hoc est rectarum AE, DB, differentiæ ultimò erit æqualis.

Jam ex analogiâ illâ AE − DB : AD = DB : GD, quæ Curvas pariter apud omnes viget, utpote quæ ex triangulorum GDB, GAE inter ipsa similitudine, non ex peculiari curvæ alicujus naturâ ortum ducat; ex hàc igitur analogiâ eliciatur series, quæ rectæ DG longitudinem exponat. Nempe hoc modo. Quantitas Algebraica, quâ rectæ DB longitudo exhibetur, dividatur à serie illâ cujus inventionem modò exposuimus, quæ rectarum AE, DB differentiam exhibeat. In serie per divisionem factâ, indices potestatum ejus literæ, quâ recta AD designata fuerit, unitate augeantur. Ita veniet nova series; cujus, si ea infinitè producatur, summa rectæ DG ultimò fit æqualis. Huic si auferatur symbolum rectæ DP, sive $p - x$, veniet tandem series, cujus, infinitè utique productæ, summa rectæ PG ultimò æqualis erit. Hujus demum ope Problema absolvendum erit. Capienda nimirum est PG ejus longitudinis, quam membra aliquot seriei novissimæ, inde ab initio ordine sumenda, algebraicè consummata præfinierint. Duo plerumque suffecerint, nisi nimia sit arcûs AB longitudo. Sed quo plura fuerint adhibita, eò veritatem propiùs accesseris.

2. Hæc etsi satis explicatè dixisse mihi videor, majoris tamen evidentiæ gratiâ, posito curvam Parabolam esse primùm, tum Ellipsin, calculos subducam.

3. Sit igitur curva AB primùm Parabola, cujus parametro recta AP sit æqualis. Rectam AP litera p designet, rectam verò AD, arcûs AB sinum versum, litera x.

$$\text{Arcus igitur AB, sive recta AE,} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} - \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{p^{\frac{7}{2}}} -,$$

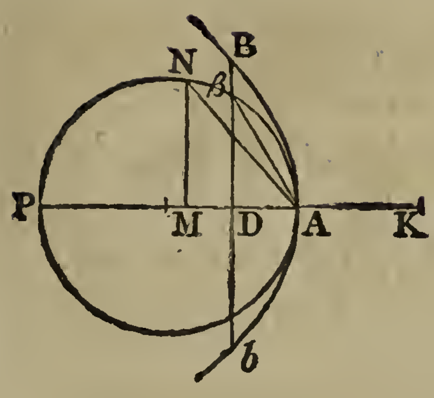
secundum formulam suprà traditam: vide not. q. § I.

Et è naturâ parabolæ, DB $= p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$

$$\text{Ergo AE} - \text{DB} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} - \frac{10x^{\frac{9}{2}}}{p^{\frac{7}{2}}}$$

$$\text{Ergo } \frac{\text{DB}}{\text{AE} - \text{DB}} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} -}, = \frac{p}{\frac{2}{3}x - \frac{2}{5p}x^2 + \frac{4}{7p^2}x^3 -} = \frac{3p}{2x} + \frac{9}{10} - \frac{261}{350p}x$$

Hinc



18. Et pro areâ ſegmenti Hyperbolici BbA; in DP cape MD $= \frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia ſemicirculo ſuper diametro AP deſcripto: eritque $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD =$ BbA proximè: vel proximiùs, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD =$ BbA; ſi modò capiatur DM $= \frac{5AD^2}{7AK}$ (ii). CONSTRUCT. MECHANIC.

TRAC-

Hinc $\frac{DB \times AD}{AE - DB}$ $(= DG) = \frac{3p}{2} + \frac{9x}{10} - \frac{261}{350p}x^2 +,$

Sed DP $= \qquad p - x$

Ergo PG $=$ (DG $-$ DP $=$) $\frac{1}{2}p + \frac{19}{10}x - \frac{261}{350p}x^2$

Hinc ſi modicus ſit arcus AB, ſatis erit ſumpſiſſe PG æqualem rectæ $\frac{1}{2}$AP $+ \frac{19}{10}$AD.

4. SIT jam curva AB Ellipſis, cujus axis AD literâ d deſignetur, parametur AP literâ p, literâ x ut priùs arcûs AB ſinum verſum deſignante.

$$\text{Arcus igitur AB, ſive recta AE,} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \begin{array}{l} \frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}} \\ -\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d} \end{array} x^{\frac{3}{2}} + \begin{array}{l} -\frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} \\ +\frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d} \\ -\frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2} \end{array} x^{\frac{5}{2}} - \begin{array}{l} +\frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d} \\ +\frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2} \\ -\frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3} \end{array} x^{\frac{7}{2}}$$

(per formulam ſuprà traditam §. 5.)

$$\text{Sed è naturâ Ellipſeos, DB} = \sqrt{\frac{p}{d}dx - x^2} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}x^{\frac{7}{2}}$$

$$\text{Ergo AE} - \text{DB} = \frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \begin{array}{l} \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} \\ +\frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d} \end{array} x^{\frac{5}{2}} + \begin{array}{l} \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{9}{7p^{\frac{3}{2}}d} \\ +\frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2} \end{array} x^{\frac{7}{2}}$$

$$\text{Et } \frac{DB}{AE - DB} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{2d}x^{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{8d^2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{p^{\frac{1}{2}}}{16d^3}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{2}{3p^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}} - \begin{array}{l} \frac{2}{5p^{\frac{3}{2}}} \\ +\frac{3}{5p^{\frac{1}{2}}d} \end{array} x^{\frac{5}{2}} - \begin{array}{l} \frac{4}{7p^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{9}{7p^{\frac{5}{2}}d} \\ +\frac{23}{28p^{\frac{1}{2}}d^2} \end{array} x^{\frac{7}{2}}}$$

Hoc

$$\text{Hoc est } \frac{BD}{AE-DB} = \frac{p - \frac{px}{2d} - \frac{px^2}{8d^2} -,}{\frac{2}{3}x \begin{array}{l} -\frac{2}{5p} \\ +\frac{3}{5d} \end{array} x^2 \begin{array}{l} +\frac{4}{7p^2} \\ -\frac{9}{7pd} \\ +\frac{23}{28d^2} \end{array} x^3 \begin{array}{l} -, \\ +, \\ -, \\ +, \end{array}} = \frac{3p}{2x} \begin{array}{l} +\frac{9}{10} \\ -\frac{21p}{10d} \end{array} \begin{array}{l} -\frac{261}{350p} \\ +\frac{144}{175d} \\ -\frac{51p}{350d^2} \end{array} x$$

$$\text{Ergo } \frac{DB \times AD}{AE - DB} \,(= GD) = \frac{3p}{2} \begin{array}{l} +\frac{9}{10} \\ -\frac{21p}{10d} \end{array} x \begin{array}{l} -\frac{261}{350p} \\ +\frac{144}{175d} \\ -\frac{51p}{350d^2} \end{array} x^2 \begin{array}{l} \pm \\ \pm \\ \pm \end{array}$$

$$DP = p - x \quad \pm$$

$$\text{Ergo } PG = \frac{1}{2}p \begin{array}{l} +\frac{19}{10} \\ -\frac{21p}{10d} \end{array} x \begin{array}{l} -\frac{261}{350p} \\ +\frac{144}{175d} \\ -\frac{51p}{350d^2} \end{array} x^2 \begin{array}{l} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \end{array}$$

Hinc, si modicus sit arcus AB, satis erit sumpsisse $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK} AD$.

(ii) $A\beta = \sqrt{px}$, è naturâ Circuli. $MD = \frac{3x^2}{4d}$ (ex hypothesi) Ergo $AM = x + \frac{3x^2}{4d}$. $AN^2 = AM \times AP = px + \frac{3px^2}{4d}$. Ergo $AN = \sqrt{px + \frac{3px^2}{4d}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{d}} \times \sqrt{4dx + 3x^2}$.

Ergo $4AN = 2\sqrt{\frac{p}{d}} \times \sqrt{4dx + 3x^2}$.

Sed $\sqrt{4dx + 3x^2} = 2.d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{4d^{\frac{1}{2}}} - \frac{9x^{\frac{5}{2}}}{64d^{\frac{3}{2}}} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{512d^{\frac{5}{2}}} -,$

Ergo $4AN = 4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2d} - \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{32d^2} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^3} -,$

Et $4AN + A\beta = 5p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2d} - \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{32d^2} + \frac{27x^{\frac{7}{2}}}{256d^3} -,$

Et $\frac{4.AN + AB}{15} = \frac{1}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{10d} - \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{160d^2} + \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{1280d^3} -,$

Ergo $\frac{4AN + AB}{15} \times 4AD = \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{3p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{40d^2} + \frac{9p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{320d^3} -,$

Sed area hyperbolica $BbA = \frac{4p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{14d^2} +,$ (Geometr. Analyt.)

Error $\quad \overline{\frac{3}{40} - \frac{1}{14}} \,\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{d^2} = \frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{280d^2}$

2. Ponatur autem $MD = \frac{5AD^2}{7AK} = \frac{5x^2}{7d}$. Tum $AM = x + \frac{5x^2}{7d}$,

Et $AN^2 = AM \times AP = px + \frac{5px^2}{7d}$. Ergo $AN = \sqrt{px + \frac{5px^2}{7d}} = \sqrt{\frac{p}{7d}} \times \sqrt{7dx + 5x^2}$

Et

Et 21.AN $= 3\sqrt{\frac{7p}{d}} \times \sqrt{7dx+5x^2}$

Sed $\sqrt{7dx+5x^2} = 7^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{5.x^{\frac{3}{2}}}{2.d^{\frac{1}{2}}7^{\frac{1}{2}}} - \frac{25.x^{\frac{5}{2}}}{56.d^{\frac{3}{2}}7^{\frac{1}{2}}} + \frac{125x^{\frac{7}{2}}}{784.d^{\frac{5}{2}}7^{\frac{1}{2}}} -,$

Ergo 21AN $= 21.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{15.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{2.d} - \frac{75.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{375.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -,$

Sed 4Aβ $= 4.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$

Ergo 21AN+4Aβ $= 25.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{15.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{2.d} - \frac{75.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{375\,p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -$

Et $\frac{21\text{AN}+4\text{A}\beta}{75} = \frac{1}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{10.d} - \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{56.d^2} + \frac{5.p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{784.d^3} -,$

Et $\frac{21\text{AN}+4\text{A}\beta}{75} \times 4\text{AD} = \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5.d} - \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{14.d^2} + \frac{5p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{196d^3} -,$

Sed area hyperbolica BbA $= \frac{4}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5d} - \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{14d^2} + \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{36d^3} -,$

Error $\overline{\frac{1}{36} - \frac{5}{196}}\,\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{d^3} = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{441d^3}.$

TRACTATUS

DE

QUADRATURA CURVARUM.

INTRODUCTIO

AD

QUADRATURAM CURVARUM.

QUANTITATES Mathematicas, non ut ex partibus quàm minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas, hîc conſidero. Lineæ deſcribuntur, ac deſcribendo generantur, non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum; ſuperficies per motum linearum; ſolida per motum ſuperficierum; anguli per rotationem laterum; tempora per fluxum continuum; & ſic in cæteris. Hæ Geneſes in rerum naturâ locum verè habent, & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres, ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium, geneſin docuerunt rectangulorum.

2. Conſiderando igitur, quòd quantitates æqualibus temporibus creſcentes & creſcendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ creſcunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam, determinandi quantitates, ex velocitatibus motuum vel incrementorum, quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones*, & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *annis* 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum, quâ hic uſus ſum in Quadraturâ Curvarum.

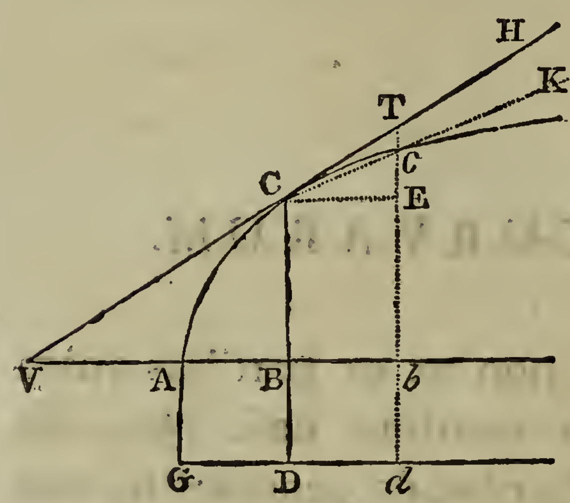
3. Fluxiones ſunt, quàm proximè, ut fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quàm minimis genita, &, ut accuratè loquar, ſunt in primâ ratione augmentorum naſcentium; exponi autem poſſunt per lineas quaſcunque, quæ ſunt ipſis proportionales ([a]).

4. Ut ſi areæ ABC, ABDG ordinatis BC, BD, ſuper baſi AB uniformi cum motu progredientibus, deſcribantur; harum arearum

([a]) Vide Noſtram Fluxionum Geometriam Def. 4 & 5. & Prop. 1.

fluxiones

INTRODUCTIO. fluxiones erunt inter se ut ordinatæ deſcribentes BC & BD, & per ordinatas illas exponi poſſunt, propterea quòd ordinatæ illæ ſunt ut arearum augmenta naſcentia.



Progrediatur ordinata BC de loco ſuo BC in locum quemvis novum *bc*. Compleatur parallelogrammum BCE*b*, ac ducatur recta VTH, quæ curvam tangat in C, ipſiſque *bc* & BA productis occurrat in T & V: & abſciſſæ AB, ordinatæ BC, & lineæ curvæ AC*c* augmenta modò genita, erunt B*b*, E*c* & C*c*; & in horum augmentorum naſcentium ratione primâ ſunt latera trianguli CET, ideoque fluxiones ipſarum AB, BC & AC ſunt ut trianguli illius CET latera CE, ET & CT, & per eadem latera exponi poſſunt; vel, quòd perinde eſt, per latera trianguli conſimilis VBC.

5. Eodem recidit, ſi ſumantur fluxiones in ultimâ ratione partium evaneſcentium. Agatur recta C*c*, & producatur eadem ad K. Redeat ordinata *bc* in locum ſuum priorem BC, & coeuntibus punctis C & *c*, recta CK coincidet cum tangente CH ([b]), & triangulum evaneſcens CE*c*, in ultimâ ſuâ forma, evadet ſimile triangulo CET, & ejus latera evaneſcentia CE, E*c* & C*c* erunt ultimò inter ſe, ut ſunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT; & propterea in hâc ratione ſunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & *c* parvo quovis intervallo ab invicem diſtant, recta CK parvo intervallo à tangente CH diſtabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat, & rationes ultimæ linearum CE, E*c* & C*c* inveniantur, debent puncta C & *c* coire, & omninò coincidere. Errores quàm minimi in rebus mathematicis non ſunt contemnendi.

6. Simili argumento ſi Circulus, centro B radio BC deſcriptus, in longitudinem abſciſſæ AB ad angulos rectos, uniformi cum motu, ducatur; fluxio ſolidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio ſuperficiei ejus erit ut perimeter circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim. Nam quo tempore ſolidum

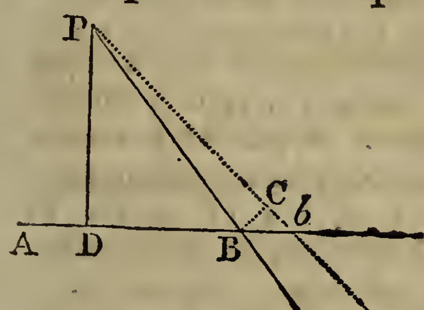
([b]) Per Lemma 6m. de Method. Rat. Prim. et Ult.

ABC

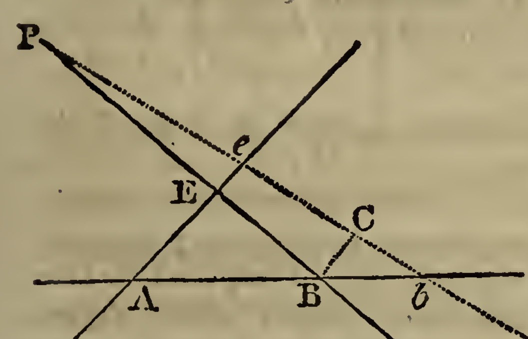
ABC generatur, ducendo circulum illum in longitudinem abſciſſæ AB, eodem ſuperficies ejus generatur, ducendo perimetrum circuli illius in longitudinem curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ ſequuntur. Doctrina Fluxionum.

7. *Recta* PB, *circa polum datum* P *revolvens, ſecet aliam poſitione datam rectam* AB : *quæritur proportio fluxionum rectarum illarum* AB *&* PB.

Progrediatur recta PB de loco ſuo PB in locum novum P*b*. In P*b* capiatur PC ipſi PB æqualis, & ad AB ducatur PD ſic, ut angulus *b*PD æqualis ſit angulo *b*BC ; & ob ſimilitudinem triangulorum *b*BC, *b*PD erit augmentum B*b* ad augmentum C*b*, ut P*b* ad D*b*. Redeat jam P*b* in locum ſuum priorem PB, ut augmenta illa evaneſcant, & evaneſcentium ratio ultima, id eſt ratio ultima P*b* ad D*b*, ea erit, quæ eſt PB ad DB, exiſtente angulo PDB recto ; & propterea in hâc ratione eſt fluxio ipſius AB ad fluxionem ipſius PB.



8. *Recta* PB, *circa datum polum* P *revolvens, ſecet alias duas poſitione datas rectas* AB *&* AE *in* B *&* E : *quæritur proportio fluxionum rectarum illarum* AB *&* AE.



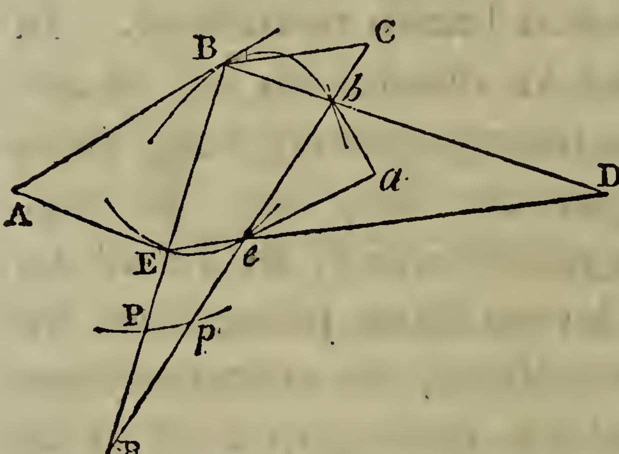
Progrediatur recta revolvens PB de loco ſuo PB in locum novum P*b*, rectas AB, AE in punctis *b* & *e* ſecantem, & rectæ AE parallela BC ducatur, ipſi P*b* occurrens in C ; & erit B*b* ad BC ut A*b* ad A*e*, & BC ad E*e* ut PB ad PE ; &, conjunctis rationibus, B*b* ad E*e* ut A*b* × PB ad A*e* × PE. Redeat jam linea P*b* in locum ſuum priorem PB, & augmentum evaneſcens B*b* erit ad augmentum evaneſcens E*e*, ut AB × PB ad AE × PE ; ideoque in hâc ratione eſt fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.

9. Hinc ſi recta revolvens PB lineas quaſvis curvas, poſitione datas, ſecet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles, AB, AE, curvas illas tangant in ſectionum punctis B & E : erit fluxio curvæ, quam recta AB tangit, ad fluxionem curvæ, quam recta AE tangit, ut AB × PB ad AD × PE. Id quod etiam eveniet, ſi recta

PB

PB curvam aliquam, positione datam, perpetuò tangat in puncto mobili P (c).

FORMULA 10. *Fluat quantitas x uniformiter, & invenienda sit fluxio quantitatis x^n.* Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x + o$, quantitas x^n evadet $\overline{x + o}|^n$; id est per methodum serierum infinitarum, $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2} + \&c.$ Et augmenta, o, & $nox^{n-1} +$ $nn-n$



(c) IN curvas duas Bb, Ee recta PEB incidat, quæ dum quolibet motu transferatur, extremitate suâ P curvam, positione datam, Pp perpetuò tangat. Per puncta B, E, ubi recta mobilis PE curvis Bb, Ee, occurrit, ducantur rectæ BA, EA quæ curvas illas contingant. Rectæ BA, EA in A concurrant. Dico fluxionem curvæ Bb esse ad fluxionem curvæ Ee, ut rectangulum AB × PB ad rectangulum AE × PE. Rectæ enim PB, ex situ PB egressæ, sit alius quivis situs peb. Junctæ Bb, Ee in D concurrant; necnon rectæ PB, pb in R. Ducatur per E recta EC cum rectâ Ee parallela. Erit igitur Bb ad EC ut Db ad De: et EC ad Ee ut BR ad RE. Ergo Bb erit ad Ee ut rectangulum Db × BR ad rectangulum De × RE. Redeunte autem rectâ pb in locum suum priorem, PE, anguli DBA, DEA vel imminuti usque vel usque crescentes, ultimò quidem, punctis b, B necnon illis e, E coeuntibus, aut in nihilum erunt redacti, aut in duos rectos uterque creverint; aut altero denique in nihilum redacto in duos rectos alter creverit. Unde punctum D cum ipso A ultimò jungetur. Jungetur etiam ultimò punctum R cum ipso P, lineâ PR infinitè imminutâ. Quare subtensæ evanescentis Bb ad evanescentem Ee ea erit ratio ultima, quæ rectanguli AE × PE ad rectangulum AE × PE est ratio. Sed subtensæ arcubus suis evanescentibus ultimò sunt æquales. (Per Lemma VII. De Rat. Prim. et Ult.) Arcuum igitur et subtensarum rationes ultimæ eædem erunt. Quare curvarum Bb, Ee incrementa evanescentia erunt ultimò inter se ut rectangula AB × PB, AE × PE. Ergo et curvarum illarum fluxiones eorundem rectangulorum inter se proportionem gerent. Q. E. D.

(d) POST multas jam olim evulgatas hujus Formulæ demonstrationes, quarum duas potissimùm plurimi facio, Robinesii alteram, alteram ipsius Newtoni, quam, in secundo Principiorum Libro Lemmate 2°. à Newtono adumbratim traditam, nos in Prop. VIII. Geometriæ nostræ Fluxionum ejusque Corollariis accuratiùs exposuimus, post has inquam aliasque plurimas jam pridem pervagatas, alia nuper in lucem prodiit, quæ auctorem habuit Simsonum celebrem illum Glasguensium Geometram; quæ nescio sanè an omnes hactenus excogitatas simplicitate vincat. Certè dignam esse judico, quæ inter pretiosissima Geometriæ hîc reponatur, tanquam in fisco Newtoni; ita tamen si sermone reddita sit Newtoniano, quem Simsonus sine causâ, me judice, magnoperè refugiebat. Ex eo autem quòd fluxio potestatis quadraticæ, sive x^2, sit $2x\dot{x}$, et quòd rectanguli xy fluxio sit $x\dot{y} + y\dot{x}$, ad hunc modum ratiocinando Formulæ generalis veritatem Vir summus evincit.

THEOREMA.

Si sint rectæ quovis numero proportione convenientes, quarum primâ permanente reliquæ fluant; tum si fluxio penultimæ sit ad fluxionem secundæ, sicut antepenultimæ multiplex aliqua ad primam, et capiatur æquè multiplex penultimæ; fluxio ultimæ erit ad fluxionem secundæ sicut summa penultimæ et multiplicis ipsius ad primam.

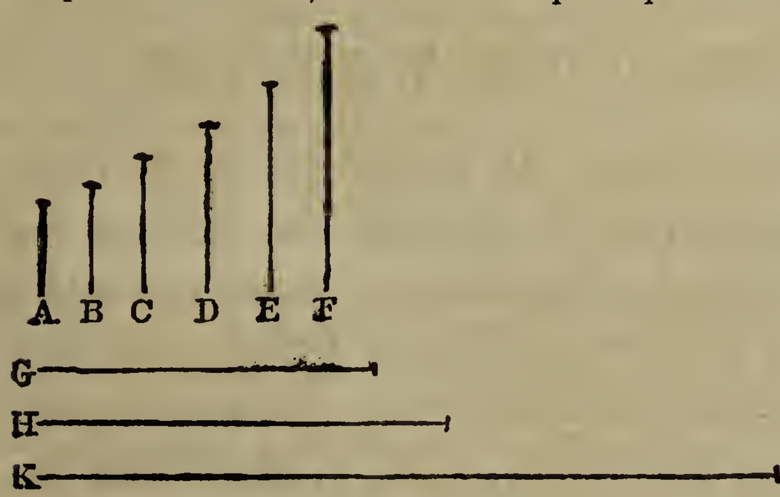
Sint rectæ quovis numero proportione convenientes A, B, C, D, E, F, quarum primâ A permanente, reliquæ fluant. Harum antepenultimæ D sit recta G multiplex, et penultimæ E sit H æquè multiplex; et fluxio rectæ E ad fluxionem secundæ B eam rationem habeat quam G ad A. Dico fluxionem ultimæ F ad fluxionem secundæ B eam rationem habituram quam summa duarum E, H, ad A. Sit enim recta K ad A ut fluxio rectæ $\dot{F}$ ad fluxionem rectæ $\dot{B}$. Cùm igitur $\dot{F}$ sit ad $\dot{B}$ ut K ad A, rectangula A × $\dot{F}$, K × $\dot{B}$ [*notis* $\dot{F}$, $\dot{B}$ *rectæ intelligantur designari, nempe rectarum* F, B *fluxiones*

 sensu

$\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}$ + &c. sunt ad invicem, ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2}$ + &c. Evanescant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1}: ideoque fluxio quantitatis x est ad fluxionem quantitas x^n, ut 1 ad nx^{n-1} (d). Fluxionis Quantitatis x^n.

11. Similibus argumentis, per methodum Rationum Primarum & Ultimarum, colligi possunt fluxiones linearum, seu rectarum,

sensu Def. 5. *Geomet. Flux.*] erunt inter se æqualia. Rectangulum autem $A \times \dot{F}$ fluxio est rectanguli $A \times F$, cujus latus F fluit, altero A manente. Et, propter continuam rectarum A, B, C, D, E, F, proportionis convenientiam, rectangula $A \times F$, $B \times E$ sunt inter se æqualia. Horum igitur fluxiones erunt inter se æquales. (Geom. Flux. Prop. 11.) Fluxio autem rectanguli BE rectangulorum $B \times \dot{E}$, $E \times \dot{B}$ summa erit. Et fluxio rectanguli $A \times F$ est ipsum rectangulum $A \times \dot{F}$. Rectangulum igitur $A \times \dot{F}$ duobus $B \times \dot{E}$, $E \times \dot{B}$ simul sumptis est æquale. Iisdem igitur rectangulum $K \times \dot{B}$ æquale erit. Atqui $\dot{B} : \dot{E} = A : G$. (sic enim posuimus.) Permutando $\dot{B} : A = \dot{E} : G$. Rectangulum igitur $K \times \dot{B} : K \times A = B \times \dot{E} : B \times G$. Et permutando $K \times \dot{B} : B \times \dot{E} = K \times A : B \times G$. Rursum $K \times \dot{B} : E \times \dot{B} = K : E = K \times A : A \times E$. Quare rectangulum $K \times \dot{B}$ erit ad rectangula duo $B \times \dot{E}$, $E \times \dot{B}$ simul sumpta, sicut rectangulum $K \times A$ ad rectangula duo $B \times G$, $A \times E$ simul sumpta (24. 5. Elem.) Sed ex priùs ostensis rectangulum $K \times \dot{B}$ duobus $B \times \dot{E}$, $E \times \dot{B}$ simul sumptis est æquale. Ergo duobus $B \times G$, $A \times E$ simul sumptis rectangulum $K \times A$ æquale erit. Sed cùm rectæ G, H rectarum D, E æquè sint multiplices, erit G ad H ut D ad E. Sed D ad E ut A ad B. Ergo G ad H ut A ad B. Rectangula igitur $G \times B$, $H \times A$ erunt inter se æqualia. Et rectangulo $A \times E$ communiter addito, duo $G \times B$, $A \times E$ simul sumpta duobus $A \times H$, $A \times E$ simul sumptis æqualia erunt. Sed duobus $G \times B$, $A \times E$ simul sumptis rectangulum $A \times K$ modò ostensum est æquale. Duobus igitur $A \times H$, $A \times E$ simul sumptis idem $A \times K$ æquale. Ac propterea recta K æqualis erit rectis H, E simul sumptis. Sed recta K ad A ut $\dot{F}$ ad $\dot{B}$. Id enim posuimus. Quare $\dot{F}$ ad $\dot{B}$ ut summa duarum H, E ad A. Q. E. D. Demonstratio Formulæ Flux. x^n.



Hinc si litera n numerum designet, cujus tot sunt unitates quot sunt rectæ præter primam A proportione convenientes, si sit F proportione convenientium ultima, E penultima, fluxio ultimæ F erit ad fluxionem secundæ B, sive $\dot{F}$ ad $\dot{B}$, ut $n.E$ ad A. Nam ob continuam rectarum A, B, C analogiam, $A \times C = B^2$. Ergo $A \times \dot{C} = 2B\dot{B}$. Ergo $\dot{C} : \dot{B} = 2B : A$. Ac proinde, propter ea quæ modò sunt ostensa, erit $\dot{D} : \dot{B} = 2C + C : A$, hoc est $\dot{D} : \dot{B} = 3C : A$. Unde rursum concludetur esse $\dot{E} : \dot{B} = 3D + D : A$. Hoc est $\dot{E} : \dot{B} = 4D : A$. Eodemque modo progrediendo obtinebitur tandem $\dot{F} : \dot{B} = n.E : A$.

Jam si proportione convenientium primam, quam datam ponimus, litera a designet, secundam x; tertia hoc symbolo significanda erit, $\frac{x^2}{a}$; quarta hoc alio, $\frac{x^3}{a^2}$; penultimam ultimamque symbola $\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$, $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ designabunt. Et fluxio ultimæ erit ad fluxionem secundæ, ut $n\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$ ad a. Hoc est ut $n.x^{n-1}$ ad a^{n-1}. Vel si arithmeticè omnia æstimare libeat, ponatur $a = 1$. Et si secunda proportione convenientium sit x, erit tertia x^2, quarta x^3 penultima x^{n-1}, ultima x^n. Et fluxio ultimæ x^n erit ad fluxionem secundæ x sicut $n.x^{n-1}$ ad 1. Ac proinde si fluxio quantitatis x designetur hâc notâ $\dot{x}$, fluxio quantitatis x^n erit $nx^{n-1}\dot{x}$. Q. E. D.

Vide Librum Roberti Simsoni De Limitibus Quantitatum et Rationum Prop. x.

INTRODUCTIO.

ſeu curvarum, in caſibus quibuſcunque, ut & fluxiones ſuperficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitatibus analyſin ſic inſtituere, & finitarum, naſcentium vel evaneſcentium, rationes primas vel ultimas inveſtigare, conſonum eſt Geometriæ Veterum: & volui oſtendere, quòd in methodo Fluxionum non opus ſit figuras infinitè parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen poteſt analyſis, in figuris quibuſcunque, ſeu finitis, ſeu infinitè parvis, quæ figuris evaneſcentibus finguntur ſimiles; ut & in figuris quæ per methodos Indiviſibilium pro infinitè parvis haberi ſolent, modò cautè procedas.

12. Ex Fluxionibus invenire Fluentes, Problema difficilius eſt; & ſolutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de quâ ſequentia olim ſcripſi.

DE

QUADRATURA CURVARUM.

NOTATIO FLUXIONALIS.

QUANTITATES indeterminatas ut motu perpetuo creſcentes vel decreſcentes, id eſt, ut fluentes vel defluentes, in ſequentibus conſidero; deſignoque literis x, y, z, v, & earum fluxiones, ſeu celeritates creſcendi, noto iiſdem literis punctatis $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones, ſeu mutationes, magis aut minùs celeres; quas ipſarum z, y, x, v, fluxiones ſecundas nominare licet, & ſic deſignare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$; & harum fluxiones primas, ſeu ipſarum z, y, x, v fluxiones tertias, ſic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$; & quartas ſic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{v}$. Et quemadmodum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{v}$ ſunt fluxiones quantitatum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, & hæ ſunt fluxiones quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, v, & hæ ſunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v: ſic hæ quantitates conſiderari poſſunt ut fluxiones aliarum, quas ſic deſignabo, $\acute{z}$, $\acute{y}$, $\acute{x}$, $\acute{v}$; & hæ ut fluxiones aliarum $\overset{\prime\prime}{z}$, $\overset{\prime\prime}{y}$, $\overset{\prime\prime}{x}$, $\overset{\prime\prime}{v}$; & hæ ut fluxiones aliarum $\overset{\prime\prime\prime}{z}$, $\overset{\prime\prime\prime}{y}$, $\overset{\prime\prime\prime}{x}$, $\overset{\prime\prime\prime}{v}$. Deſignant igitur $\overset{\prime\prime}{z}$, $\acute{z}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{z}$, &c. ſeriem quantitatum, quarum quælibet poſterior eſt fluxio præcedentis, & quælibet prior eſt fluens

fluens quantitas fluxionem habens subsequentem. Similis est series $\overset{\shortparallel}{\sqrt{az-zz}}$, $\overset{\shortmid}{\sqrt{az-zz}}$, $\sqrt{az-zz}$, $\overset{.}{\sqrt{az-zz}}$, $\overset{..}{\sqrt{az-zz}}$, $\overset{...}{\sqrt{az-zz}}$, ut & series $\overset{\shortparallel}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\overset{\shortmid}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\frac{az+zz}{a-z}$, $\overset{.}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\overset{..}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\overset{...}{\frac{az+zz}{a-z}}$ (e).

Et notandum est, quòd quantitas quælibet prior, in his seriebus, est ut Area figuræ curvilineæ, cujus ordinatim applicata rectangula est quantitas posterior, & abscissa est z: uti $\overset{\shortmid}{\sqrt{az-zz}}$ area curvæ cujus ordinata est $\sqrt{az-zz}$ & abscissa z. Quò autem spectant hæc omnia patebit in propositionibus quæ sequuntur.

PROP. I. PROB. I.

Datâ æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones. Prop. I.

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujusque fluentis, quam involvit; & in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem suam, & aggregatum factorum omnium, sub propriis signis, erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d, &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x, &c. involvens, uti $x^3-xy^2+a^2z-b^3=0$. Multiplicentur termini primò per indices dignitatum x, &c, in singulis multiplicationibus, pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis, scribatur $\dot{x}$, & summa factorum erit $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2$. Idem fiat in y, & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur summa factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2-2xy\dot{y}+a^2\dot{z}=0$. Dico quòd hâc æquatione definitur relatio fluxionum.

Demonstratio.

Nam sit o quantitas admodum parva & sunto $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, quantitatum z, y, x momenta; id est, incrementa momentanea syn-

(e) Vide nostram Fluxionum Geometriam Def. 5.

 chrona.

Prop. I.

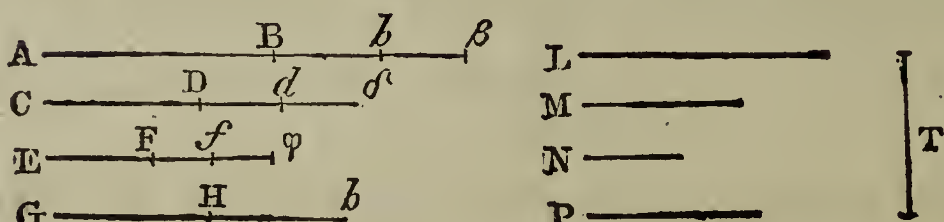
chrona. Et ſi quantitates fluentes jam ſunt z, y & x, hæ, poſt momentum temporis, incrementis ſuis $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ auctæ, evadent $z+o\dot{z}$, $y+o\dot{y}$, $x+o\dot{x}$, quæ in æquatione primâ pro z, y, & x ſcriptæ dant æquationem $x^3+3x^2o\dot{x}+3xo^2\dot{x}\dot{x}+o^3\dot{x}^3-xy^2-o\dot{x}y^2-2xo\dot{y}y-2\dot{x}o^2\dot{y}y-xo^2\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^3\dot{y}\dot{y}+a^2z+a^2o\dot{z}-b^3=0$.

Subducatur æquatio prior, & reſiduum diviſum per o erit $3\dot{x}x^2+3\dot{x}\dot{x}ox+\dot{x}^3o^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y-2\dot{x}o\dot{y}y-xo\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^2\dot{y}\dot{y}+a^2\dot{z}=0$. Minuatur quantitas o in infinitum, & neglectis terminis evaneſcentibus reſtabit $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y+a^2\dot{z}=0$. Q. E. D. (f)

Expli-

(f) EXPLICATIO DEMONSTRATIONIS NEWTONIANÆ.

Demonstratio



Puta rectas, AB, CD, EF, motu punctorum, B, D, F, genitas magnitudines eſſe mutabiles, quas Newtonus literis z, y, x deſignari voluit, literâ a deſignante aliam rectam datæ longitudinis. Hæ rectæ, tempore quovis T, longitudines novas Ab, Cd, Ef ſint adeptæ; ut ſint, Bb, Dd, Ff incrementa rectarum ſimul genita. Sit GH alia recta, æquabili velocitate mutabilis, cui, tempore T, incrementum Hh acceſſerit. Exponatur recta P datæ cujuſvis longitudinis. Sint L, M, N aliæ rectæ, ad quas P rationes habeat, quas velocitas æquabilis puncti H, rectam GH generantis, ad velocitates quibus puncta B, D, F, rectas AB, CD, EF generantia, ex ſuo unumquodque loco B, vel D, vel F diſcedunt. Erunt L, M, N magnitudines, quæ Newtono notis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$ deſignantur (Geom. Flux. Def. V.) Sint Bβ, Dδ, Fφ incrementa quæ rectis, AB, CD, EF, tempore T, acceſſiſſent, ſi puncta B, D, F velocitabus quibuſcum è locis B, D, F diſcedunt, totum illud tempus T æquabiliter lata eſſent. Jam cùm æquatio propoſita, $x^3-xy^2+a^2z-b^3=0$, quantitatum mutabilium x, y, z relationes mutuas generaliter exprimat, ut quibuſlibet harum magnitudinibus, quæ fluendo ſimul fuerint factæ, pro literis, x, y, z ſubſtitutis, æqualitas maneat; cùm præterea ſint AB, CD, EF magnitudines fluendo ſimul factæ, et Ab, Cd, Ef aliæ ſimul factæ, literis z, y, x ſignificatæ, ſi illas primò, tum has, pro literis z, y, x ſubſtitueris, duæ orientur æquationes

$$\mathrm{EF}^3-\mathrm{EF}\times\mathrm{CD}^2+a^2\mathrm{AB}-b^3=0$$

$$\overline{\mathrm{EF}+\mathrm{F}f}\big|^3-\overline{\mathrm{EF}+\mathrm{F}f}\times\overline{\mathrm{CD}+\mathrm{D}d}\big|^2+a^2\times\overline{\mathrm{AB}+\mathrm{B}b}-b^3=0.$$

Harum poſteriori priore detractâ, tertia exſiſtet,

$$3\overline{\mathrm{EF}}\big|^2.\mathrm{F}f+3\mathrm{EF}.\overline{\mathrm{F}f}\big|^2+\overline{\mathrm{F}f}\big|^3-2\mathrm{EF}.\mathrm{CD}.\mathrm{D}d-\mathrm{EF}.\overline{\mathrm{D}d}\big|^2-\mathrm{F}f.\overline{\mathrm{CD}}\big|^2-2\mathrm{CD}.\mathrm{F}f.\mathrm{D}d-\mathrm{F}f.\overline{\mathrm{D}d}\big|^2+a^2\mathrm{B}b=0.$$

Quæ incrementorum ſimul factorum, Bb, Dd, Ff, mutuas relationes ſignificabit; idque generaliter, qualeſcunque fuerint illorum magnitudines. Si igitur tempore T infinitè decreſcente, incrementa illa evaneſcant, evaneſcentium relationes ultimas eadem æquatio ſignificabit. Sed cùm fluentium GH, AB, quarum fluxiones ſunt P, L, incrementa ſimul genita ſint Hh, Bb, evaneſcentium Hh, Bb ultima inter ipſas ratio rectarum P, L ratio erit. (Geometr. Flux. Prop. I.) Sunt autem Hh, Bβ ſpatia eodem tempore T æquabiliter confecta velocitatibus, quæ ſunt inter ſe ut rectæ P, L. Neque huic rationi obſtant ſpatiorum Hh, Bβ longitudines magnæ parvæve fuerint. Quare tempore T infinitè decreſcente, evaneſcentium Hh, Bβ ratio inter ipſas ultima rectarum P, L ratio erit. Evaneſcentis igitur Hh ad evaneſcentes Bb, Bβ eædem erunt rationes ultimæ. Evaneſcentes igitur Bb, Bβ erunt ultimò inter ſe æquales. Simili modo oſtendetur evaneſcentes Dd, Dδ, necnon Ff, Fφ eſſe ultimò inter ſe æquales. Ac propterea evaneſcentium, Bβ, Dδ, Fφ, eædem erunt ac illarum Bb, Dd, Ff relationes ultimæ; et ſi in æquationem noviſſimam pro his Bb, Dd, Ff, illæ Bβ, Dδ, Fφ ſubſtituantur, tranſmutabitur illa in aliam, quæ evaneſcentium Bβ, Dδ, Fφ ultimas inter ipſas relationes exprimet. Nempe hoc modo. $3\overline{\mathrm{EF}}\big|^2\mathrm{F}\varphi+3.\mathrm{EF}.\overline{\mathrm{F}\varphi}\big|^2+\overline{\mathrm{F}\varphi}\big|^3-2\mathrm{EF}.\mathrm{CD}.\mathrm{D}\delta-\mathrm{EF}.\overline{\mathrm{D}\delta}\big|^2-\mathrm{F}\varphi.\overline{\mathrm{CD}}\big|^2-2\mathrm{CD}.\mathrm{F}\varphi.\mathrm{D}\delta-\mathrm{F}\varphi.\overline{\mathrm{D}\delta}\big|^2+a^2\mathrm{B}\beta=0$, ultimò

Jam

Explicatio plenior.

Prop. I.

Ad eundem modum ſi æquatio eſſet $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$, produceretur $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}} = 0$. Ubi ſi fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax-yy} = z$, & erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc propoſitionem) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$, ſeu $\frac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$; hoc eſt $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}$. Et inde $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + \frac{a^3\dot{x} - 2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$.

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$; & fiet per operationem primam, $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4\dot{z}z^3 = 0$: per ſecundam $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}y^2$

Jam cùm Hb ſit ad Bβ ut P ad L, erit B$\beta = \frac{\mathrm{H}b \times \mathrm{L}}{\mathrm{P}}$; vel ſi recta H$b$ per literam o deſignetur, Prop. I^{a}.

B$\beta = \frac{o \times \mathrm{L}}{\mathrm{P}}$. Similiter oſtendetur D$\delta = \frac{o \times \mathrm{M}}{\mathrm{P}}$, necnon F$\phi = \frac{o \times \mathrm{N}}{\mathrm{P}}$. Et in omnibus rectarum, Bβ, Dδ, Eϕ, magnitudinibus, dummodo illæ conferantur quæ ſimul genitæ ſint, hæ æqualitates manent. Quare ſi in æquationem relationum ultimarum pro illis Bβ, Dδ, Fϕ, hæ $\frac{o\mathrm{L}}{\mathrm{P}}$, $\frac{o\mathrm{M}}{\mathrm{P}}$, $\frac{o\mathrm{N}}{\mathrm{P}}$ ſubſtituantur, nova exſiſtet hujuſcemodi; $\frac{3\mathrm{EF}^2.\mathrm{N}o}{\mathrm{P}} + \frac{3\mathrm{EF}.\mathrm{N}^2o^2}{\mathrm{P}^2} + \frac{\mathrm{N}^3o^3}{\mathrm{P}^3} - 2\mathrm{EF}.\mathrm{CD}.\frac{o.\mathrm{M}}{\mathrm{P}} - \frac{\mathrm{EF}.o^2.\mathrm{M}^2}{\mathrm{P}^2} - \frac{\overline{\mathrm{CD}}^2.o.\mathrm{N}}{\mathrm{P}} - \frac{2\mathrm{CD}.\mathrm{N}.\mathrm{M}.o^2}{\mathrm{P}^2} - \frac{\mathrm{N}.\mathrm{M}^2.o^3}{\mathrm{P}^3} + \frac{a^2\mathrm{L}.o}{\mathrm{P}} = 0$; ultimò ſcilicet. Omnibuſque à quantitate $\frac{o}{\mathrm{P}}$ diviſis, factâque tranſlatione, ut quantitates illæ omnes, quas, peractâ diviſione, litera o non erit ingreſſa, ſeorſum conſiſtant, $3\mathrm{EF}^2.\mathrm{N} - 2\mathrm{EF}.\mathrm{CD}.\mathrm{M} - \overline{\mathrm{CD}}^2.\mathrm{N} + a^2\mathrm{L} = \frac{\mathrm{N}.\mathrm{M}^2.o^2}{\mathrm{P}^2} + \frac{2\mathrm{CD}.\mathrm{N}.\mathrm{M}.o}{\mathrm{P}} + \frac{\mathrm{EF}.\mathrm{M}^2.o}{\mathrm{P}} - \frac{\mathrm{N}^3.o^2}{\mathrm{P}^2} - \frac{3\mathrm{EF}.\mathrm{N}^2.o}{\mathrm{P}}$ ultimò. Hoc eſt, duo illa multinomia hinc illinc conſtituta, ut ſint inæqualia ſi tempus T datæ capiatur magnitudinis, tempore tamen T infinitè decreſcente, ad æqualitatem uſque tendunt; quam propiùs tandem acceſſerint quàm pro datâ quâvis differentiâ. Sed tempore T infinitè decreſcente recta o evaneſcit, et unà cum tempore T ad nihilum redigetur. Quare è duobus multinomiis, quæ conſtituunt æquationem noviſſimam, alterum illud, cujus membra ſingula litera o ingreſſa eſt, evaneſcet; ut unà cum tempore T rectâque o in nihilum abierit. Quare et alterum $3\mathrm{EF}^2.\mathrm{N} - 2\mathrm{EF}.\mathrm{CD}.\mathrm{M} - \mathrm{CD}^2.\mathrm{N} + a^2\mathrm{L}$ nihilo æquale erit. Non enim. Sed ſi fieri poſſit, æquale ſit finitæ alicui magnitudini, quam litera Y deſignet. Multinomium igitur alterum, cujus membra ſingula litera o ingreſſa eſt, magnitudinem Y propiùs ultimò acceſſerit quàm pro datâ quâvis differentiâ; ac propterea hanc ipſam Y magnitudinem ſuam habebit ultimam; nec unquam propiùs quàm pro datâ illâ differentiâ Y nihilum acceſſerit. Non igitur unà cum tempore T rectâque o multinomium illud in nihilum abierit. Quod eſt abſurdum. Abierit enim ex priùs demonſtratis.

Multinomium igitur $3\overline{\mathrm{EF}}^2.\mathrm{N} - 2\mathrm{EF}.\mathrm{CD}.\mathrm{M} - \overline{\mathrm{CD}}^2.\mathrm{N} + a^2\mathrm{L}$ nihilo eſt æquale. Hoc eſt, pro rectis CD, EF, literis y, x; et pro L, M, N notis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, ſubſtitutis, $3x^2.\dot{x} - 2xy\dot{y} - y^2\dot{x} + a^2\dot{z} = 0$. Q. E. D.

Ita ni fallor abſolutam dedimus ac perfectam, quam Newtonus adumbrare voluit, demonſtrationem; ab omni certè individuorum vel infinitè parvorum notione liberam.

Cæterùm veritas regulæ de quâ agitur è Corollariis Prop. VIII. Libri noſtri de Geometriâ Fluxionum ejuſdemque Libri Prop. V. ſatis eluceſcit.

Prop. I. & II. $+3z\dddot{y}y^2+6z\ddot{y}^2y-4\dddot{z}z^3-12\dot{z}^2z^2=0$: per tertiam $\dddot{z}y^3+9\ddot{z}\dot{y}y^2+9\dot{z}\ddot{y}y^2+18\dot{z}\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18z\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-4\dddot{z}z^3-36\ddot{z}\dot{z}z^2-24\dot{z}^3z=0$.

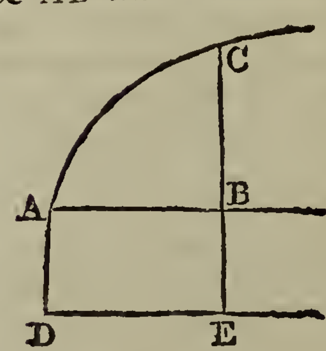
Ubi verò ſic pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare; & pro ejus fluxione primâ unitatem ſcribere, pro ſecundâ verò & ſequentibus nihil. Sit æquatio $zy^3-z^4+a^4=0$, ut ſuprà; & fluat z uniformiter, ſitque ejus fluxio unitas, & fiet per operationem primam $y^3+3z\dot{y}y^2-4z^3=0$: per ſecundam $6\dot{y}y^2+3z\ddot{y}y^2+6z\dot{y}^2y-12z^2=0$: per tertiam $9\ddot{y}y^2+18\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18z\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-24z=0$.

In hujus autem generis æquationibus concipiendum eſt, quòd fluxiones in ſingulis terminis ſint ejuſdem ordinis; id eſt, vel omnes primi ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$; vel omnes ſecundi $\ddot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}^2$; vel omnes tertii $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, $\dot{z}^3$, &c. Et ubi res aliter ſe habet, complendus eſt ordo per ſubintellectas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis. Sic æquatio noviſſima complendo ordinem tertium fit $9\dot{z}\ddot{y}y^2+18\dot{z}\dot{y}^2y+3z\dddot{y}y^2+18z\ddot{y}\dot{y}y+6z\dot{y}^3-24z\dot{z}^3=0$ (g).

PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ Quadrari poſſunt.

Sit ABC figura invenienda, BC ordinatim applicata rectangula, & AB abſciſſa. Producatur CB ad E, ut ſit BE $=1$, & compleatur parallelogrammum ABED: & arearum ABC, ABED fluxiones erunt ut BC & BE. Aſſumatur igitur æquatio quævis quâ relatio arearum definiatur, & inde dabitur relatio ordinatarum BC & BE per Prop. 1. Q. E. I. (h).



Hujus rei exempla habentur in propoſitionibus duabus ſequentibus (i).

(g) Vide Geomet. Analytic. Cap. IV. § 21. not. *d.*

(h) Hoc Problema Septimum eſt Geometriæ Analyticæ, ubi reſolutionem ejus, explicatiùs longè quàm hîc fecit, Newtonus tradidit. Confer etiam Geometr. Analyt. C. IV. § 13.

(i) Et Tironum captui magis accommodata in Geometriâ Analyticâ, poſt Problema ſeptimum.

PROP. III. THEOR. I.

Prop. III. & IV.

Si pro abſciſſâ AB, & areâ AE, ſeu AB × 1, promiſcuê ſcribatur z; & ſi pro $e + fz^\eta + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ &c. ſcribatur R: ſit autem area curvæ $z^\theta R^\lambda$, erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\overline{\theta e + \begin{matrix}\theta\\+\lambda\eta\end{matrix} \times fz^\eta + \begin{matrix}\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix} \times gz^{2\eta} + \begin{matrix}\theta\\+3\lambda\eta\end{matrix} \times hz^{3\eta} + \&c.} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}.$$

Demonſtratio.

Nam ſi ſit $z^\theta R^\lambda = v$, erit (per Prop. 1.) $\theta\dot{z}z^{\theta-1}R^\lambda + \lambda z^\theta \dot{R} R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Pro R^λ, in primo æquationis termino, & z^θ, in ſecundo, ſcribe $RR^{\lambda-1}$ & $zz^{\theta-1}$; & fiet $\theta\dot{z}R + \lambda z\dot{R}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Erat autem $R = e + fz^\eta + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ &c. et inde (per Prop. 1.) fit $\dot{R} = \eta f\dot{z}z^{\eta-1} + 2\eta g\dot{z}z^{2\eta-1} + 3\eta h\dot{z}z^{3\eta-1} +$ &c. quibus ſubſtitutis, & ſcriptâ BE, ſeu 1, pro $\dot{z}$, fiet

$$\overline{\theta e + \begin{matrix}\theta\\+\lambda\eta\end{matrix} \times fz^\eta + \begin{matrix}\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix} \times gz^{2\eta} + \begin{matrix}\theta\\+3\lambda\eta\end{matrix} \times hz^{3\eta} + \&c.} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = \dot{v} = BC.$$

Q. E. D.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſi pro $e + fz^\eta + gz^{2\eta} +$ &c. ſcribatur R, & pro $k + lz^\eta + mz^{2\eta} +$ &c. ſcribatur S; ſit autem Area Curvæ $z^\theta R^\lambda S^\mu$: erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\left.\begin{array}{l}
\theta ek + \begin{matrix}\theta\\+\lambda\eta\end{matrix} \times fkz^\eta + \begin{matrix}\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix} \times gkz^{2\eta} \ldots * \ldots\ldots\ldots * \ldots \\
+ \begin{matrix}\theta\\+\mu\eta\end{matrix} \times elz^\eta + \begin{matrix}\theta\\+\lambda\eta\\+\mu\eta\end{matrix} \times flz^{2\eta} + \begin{matrix}\theta\\+2\lambda\eta\\+\mu\eta\end{matrix} \times glz^{3\eta} \ldots * \ldots \\
\qquad + \begin{matrix}\theta\\+2\mu\eta\end{matrix} \times emz^{2\eta} + \begin{matrix}\theta\\+\lambda\eta\\+2\mu\eta\end{matrix} \times fmz^{3\eta} + \begin{matrix}\theta\\+2\lambda\eta\\+2\mu\eta\end{matrix} \times gmz^{4\eta}
\end{array}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}:$$

Demonſtratur ad modum propoſitionis ſuperioris [k].

PROP.

(k) PROP. IV. EXPLICATIUS ENUNTIATA ET DEMONSTRATA.

Si curvæ abſciſſæ AB ſit z, et ſi pro $e + fz^\eta + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + iz^{4\eta} +$, ſcribatur R, et pro $k + lz^\eta + mz^{2\eta} + nz^{3\eta} + pz^{4\eta} +$, ſcribatur S, ſitque Area curvæ $z^\theta.R^\lambda.S^\mu$: erit Ordinata BC æqualis rectæ hoc ſymbolo deſignatæ

$(ek +$

Prop. V.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & pro $e + fz^{n} + gz^{2n} + hz^{3n} +$ &c. ſcribatur R: ſit autem ordinatim applicata $z^{\theta-1}\,\mathrm{R}^{\lambda-1} \times \overline{a + bz^{n} + cz^{2n} + dz^{3n} + \&c.}$ & ponatur $\frac{\theta}{n} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, $t + \lambda = v$, &c.

$$\text{Erit area} = z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda} \text{ in } + \frac{\frac{1}{n}a}{rc}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}b - sf\mathrm{A}}{\overline{r+1} \times e} z^{n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}c - \overline{s+1} \times f\mathrm{B} - tg\mathrm{A}}{\overline{r+2} \times e} z^{2n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}d - \overline{s+2} \times f\mathrm{C} - \overline{t+1} \times g\mathrm{B} - vh\mathrm{A}}{\overline{r+3} \times e} z^{3n}$$

$$+ \frac{-\overline{s+3} \times f\mathrm{D} - \overline{t+2} \times g\mathrm{C} - \overline{v+1} \times h\mathrm{B}}{\overline{r+4} \times c} z^{4n}$$

$$+ \text{\&c.}$$

Ubi

Demonstratio.

$$\left.\begin{array}{lllll}
\theta ek & + \theta \times fkz^{n} & + \theta \times gkz^{2n} & + \theta \times hkz^{3n} & + \theta \times ikz^{4n} \\
 & + \lambda n & + 2\lambda n & + 3\lambda n & + 4\lambda n \\
 & + \theta \times elz^{n} & + \theta \times flz^{2n} & + \theta \times glz^{3n} & + \theta \times hlz^{4n} \\
 & + \mu n & + \lambda n & + 2\lambda n & + 3\lambda n \\
 & & + \mu n & + \mu n & + \mu n \\
 & & + \theta \times emz^{2n} & + \theta \times fmz^{3n} & + \theta \times gmz^{4n} \\
 & & + 2\mu n & + \lambda n & + 2\lambda n \\
 & & & + 2\mu n & + 2\mu n \\
 & & & + \theta \times enz^{3n} & + \theta \times fnz^{4n} \\
 & & & + 3\mu n & + \lambda n \\
 & & & & + 3\mu n \\
 & & & & + \theta \times epz^{4n} \\
 & & & & + 4\mu n
\end{array}\right\} \times Z^{\theta-1}.\mathrm{R}^{\lambda-1}.\mathrm{S}^{\mu-1}.$$

DEMONSTRATIO.

Ponatur $z^{\theta}.\mathrm{R}^{\lambda}.\mathrm{S}^{\mu} = u$. Erit igitur (Per Prop. I.)

$$\theta z^{\theta-1}\dot{z}\,\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu} + \lambda z^{\theta}.\mathrm{R}^{\lambda-1}\dot{\mathrm{R}}\,\mathrm{S}^{\mu} + \mu z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu-1}\dot{\mathrm{S}} = \dot{u}.$$

Pro R^{λ} in membro æquationis primo atque tertio, pro z^{θ} in ſecundo et tertio, pro S^{μ} in primo et ſecundo, ſcribantur $\mathrm{R}.\mathrm{R}^{\lambda-1}$, $z.z^{\theta-1}$, $\mathrm{S}.\mathrm{S}^{\mu-1}$. Ita fiet $\overline{\theta\dot{z}\mathrm{RS} + \lambda z\mathrm{S}\dot{\mathrm{R}} + \mu z\mathrm{R}\dot{\mathrm{S}}} \times z^{\theta-1}.\mathrm{R}^{\lambda-1}.\mathrm{S}^{\mu-1}. = \dot{u}$. Erant autem $\mathrm{R} = e + fz^{n} + gz^{2n} + hz^{3n} + iz^{4n} +$, et $\mathrm{S} = k + lz^{n} + mz^{2n} + nz^{3n} + pz^{4n} +$. Quare (per Prop. I.) $\dot{\mathrm{R}} = nfz^{n-1}\dot{z} + 2ngz^{2n-1}\dot{z} + 3nhz^{3n-1}\dot{z} + 4niz^{4n-1}\dot{z} +$; et $\dot{\mathrm{S}} = nlz^{n-1}\dot{z} + 2nmz^{2n-1}\dot{z} + 3nnz^{3n-1}\dot{z} + 4npz^{4n-1}\dot{z} +$. Ex hiſce verò per formulam generalem noſtram multiplicationis primam, in Logiſticâ Infinitorum traditam, efficietur.

RS =

Ubi A, B, C, D, &c. denotant totas coefficientes datas terminorum singulorum in serie cum signis suis + & −, nempe Prop. V.

A primi termini coefficientem $\dfrac{\frac{1}{\eta}a}{re}$

B secundi termini coefficientem $\dfrac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{\overline{r+1}\times e}$

C tertii termini coefficientem $\dfrac{\frac{1}{\eta}c - \overline{s+1}\times fB - tgA}{\overline{r+2}\times e}$

Et sic deinceps.

Demonstratio.

Sunto juxta propositionem tertiam.

$$\begin{array}{l|c|l}
\text{CURVARUM ORDINATÆ} & & \text{AREÆ} \\
1.\ \theta eA + \overline{\theta+\lambda\eta}\times fAz^{\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gAz^{2\eta} + \overline{\theta+3\lambda\eta}\times hAz^{3\eta}\ \&c. & & Az^{\theta}R^{\lambda} \\
2.\ \ldots + \overline{\theta+\eta}\times eBz^{\eta} + \overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fBz^{2\eta} + \overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times gBz^{3\eta}\ \&c. & \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} & Bz^{\theta+\eta}R^{\lambda} \\
3.\ \ldots\ldots + \overline{\theta+2\eta}\times eCz^{2\eta} + \overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times fCz^{3\eta}\ \&c. & & Cz^{\theta+2\eta}R^{\lambda} \\
4.\ \ldots\ldots\ldots + \overline{\theta+3\eta}\times eDz^{3\eta}\ \&c. & & Dz^{\theta+3\eta}R^{\lambda}
\end{array}$$

Et si summa ordinatarum ponatur æqualis ordinatæ $a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}$ Prop. IV.

$$RS = ek + \begin{array}{l} el \\ +kf \end{array} z^{\eta} + \begin{array}{l} em \\ +fl \\ +gk \end{array} z^{2\eta} + \begin{array}{l} en \\ +fm \\ +gl \\ +hk \end{array} z^{3\eta} + \begin{array}{l} ep \\ +fn \\ +gm \\ +hl \\ +ik \end{array} z^{4\eta} +,$$

$$\text{Et } \dot{R}S = \eta fk.z^{\eta-1} + \begin{array}{l} \eta fl \\ +2\eta gk \end{array} z^{2\eta-1} + \begin{array}{l} \eta fm \\ +2\eta gl \\ +3\eta hk \end{array} z^{3\eta-1} + \begin{array}{l} \eta fn \\ +2\eta gm \\ +3\eta hl \\ +4\eta ik \end{array} z^{4\eta-1} +, \times \dot{z}$$

$$\text{Et } \dot{S}R = \eta lez^{\eta-1} + \begin{array}{l} \eta lf \\ +2\eta me \end{array} z^{2\eta-1} + \begin{array}{l} \eta lg \\ +2\eta mf \\ +3\eta ne \end{array} z^{3\eta-1} + \begin{array}{l} \eta lh \\ +2\eta mg \\ +3\eta nf \\ +4\eta pe \end{array} z^{4\eta-1} +, \times \dot{z}$$

Et hisce seriebus pro tribus illis RS, $\dot{R}S$, $\dot{S}R$, in æquationem modò expositam $\overline{\theta\dot{z}RS + \lambda z\dot{R}S + \mu z\dot{S}R} \times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1} = \dot{u}$ ritè substitutis, efficietur

PROP. V. $cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+$ &c. in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſumma arearum $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+$ &c. æqualis erit areæ curvæ cujus iſta eſt ordinata. Æquentur igitur ordinatarum termini correſpondentes,

$$\begin{aligned} \text{et fiet } a &= \theta e\text{A}, \\ b &= \overline{\theta+\lambda\eta}\times f\text{A}+\overline{\theta+\eta}\times e\text{B}, \\ c &= \overline{\theta+2\lambda\eta}\times g\text{A}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times f\text{B}+\overline{\theta+2\eta}\times e\text{C}, \\ &\text{\&c (l)}. \end{aligned}$$

$$\text{et inde A} = \frac{a}{\theta e}$$

$$\text{B} = \frac{b-\overline{\theta+\lambda\eta}\times f\text{A}}{\overline{\theta+\eta}\times e}$$

$$\text{C} = \frac{c-\overline{\theta+2\lambda\eta}\times g\text{A}-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times f\text{B}}{\overline{\theta+2\eta}\times e}$$

Et ſic deinceps in infinitum (m).

Pone jam $\frac{\theta}{\eta}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, &c. et in areâ $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+$ &c. ſcribe ipſorum A, B, C, &c. valores inventos, & prodibit ſeries propoſita. Q. E. D.

1. Et notandum eſt, quòd Ordinata omnis duobus modis in ſeriem reſolvitur. Nam index η vel affirmativus eſſe poteſt vel negativus.

Proponatur

$$\theta\times ek \begin{array}{l} +\theta\times el \\ +\theta\times fk \\ +\lambda\eta\times fk \\ +\mu\eta\times le \end{array} z^{\eta} \begin{array}{l} +\theta\times em \\ +\theta\times fl \\ +\theta\times gk \\ +\lambda\eta\times fl \\ +2\lambda\eta\times gk \\ +\mu\eta\times lf \\ +2\mu\eta\times me \end{array} z^{2\eta} \begin{array}{l} +\theta\times en \\ +\theta\times fm \\ +\theta\times gl \\ +\theta\times hk \\ +\lambda\eta\times fm \\ +2\lambda\eta\times gl \\ +3\lambda\eta\times hk \\ +\mu\eta\times lg \\ +2\mu\eta\times mf \\ +3\mu\eta\times ne \end{array} z^{3\eta} \begin{array}{l} +\theta\times ep \\ +\theta\times fn \\ +\theta\times gm \\ +\theta\times hl \\ +\theta\times ik \\ +\lambda\eta\times fn \\ +2\lambda\eta\times gm \\ +3\lambda\eta\times hl \\ +4\lambda\eta\times ik \\ +\mu\eta\times lh \\ +2\mu\eta\times mg \\ +3\mu\eta\times nf \\ +4\mu\eta\times pe \end{array} z^{4\eta}+,\times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1}\times\dot{z}$$

$$=\dot{u}=BC\times\dot{z}.$$

Unde omnibus ab illâ $\dot{z}$ diviſis, et ritè ordinatis, veniet ſymbolum rectæ BC, quod initio poſuimus. Q. E. D.

(l) $d=\overline{\theta+3\lambda\eta}\times h\text{A}+\theta\overline{+\eta+2\lambda\eta}\times g\text{B}+\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times f\text{C}+\overline{\theta+3\eta}\times e\text{D}$.

(m) Nimirum $\text{D}=\dfrac{\frac{1}{\eta}d-\overline{s+2}f\text{C}-\overline{t+1}g\text{B}-uh\text{A}}{\overline{r+3}e}$.

Et

Propoſitio V.: Proponatur Ordinata $\frac{3k-lzz}{zz\sqrt{kz-lz^3+mz^4}}$: hæc vel ſic ſcribi poteſt $z^{-\frac{5}{2}} \times \overline{3k-lz^2} \times \overline{k-lz^2+mz^3}\big|^{-\frac{1}{2}}$; vel ſic $z^{-2} \times \overline{-l+3kz^{-2}} \times \overline{m-lz^{-1}+kz^{-3}}\big|^{-\frac{1}{2}}$

In caſu priore eſt $a=3k$, $b=0$, $c=-l$, $e=k$, $f=0$, $g=-l$, $h=m$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=1$, $\theta-1=-\frac{5}{2}$, $\theta=-\frac{3}{2}=r$, $s=-1$, $t=-\frac{1}{2}$, $v=0$.

In poſteriore eſt $a=-l$, $b=0$, $c=3k$, $e=m$, $f=-l$, $g=0$, $h=k$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\eta=-1$, $\theta-1=-2$, $\theta=-1$, $r=1$, $s=1\frac{1}{2}$, $t=2$, $v=2\frac{1}{2}$. Tentandus eſt caſus uterque. Et ſi ſerierum alterutra, ob terminos tandem deficientes, abrumpitur ac terminatur, habebitur area curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore caſu, ſcribendo in ſerie valores ipſorum a, b, c, e, f, g, h, λ, θ, r, s, t, v, termini omnes poſt primum evaneſcunt in infinitum, & area curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k-lz^2+mz^3}{z^3}}$. Et hæc area ob ſignum negativum adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abſciſſæ quàm ordinatæ; negativa verò cadit ad contrarias partes ordinatæ, & adjacet abſciſſæ productæ, manente ſcilicet ſigno ordinatæ. Hoc modo ſeries alterutra, & nonnunquam utraque, ſemper terminatur, & finita evadit, ſi curva

Et ſi multinomio literâ R deſignato accedat novum nomen $iz^{4\eta}$, et multinomio $a+bz^{\eta}+$, novum etiam nomen $\varepsilon z^{4\eta}$, erit

$$\varepsilon = \overline{\theta+4\lambda\eta} \times i\mathrm{A} + \overline{\theta+\eta+3\lambda\eta}\,h\mathrm{B} + \overline{\theta+2\eta+2\lambda\eta}\,g\mathrm{C} + \overline{\theta+3\eta+\lambda\eta}\,f\mathrm{D} + \overline{\theta+4\eta}\,e\mathrm{E}.$$

Et $\mathrm{E} = \frac{\frac{1}{\eta}\varepsilon - \overline{s+3}\,f\mathrm{D} - \overline{t+2}\,g\mathrm{C} - \overline{v+1}\,h\mathrm{B} - wi\mathrm{A}}{\overline{r+4}\,e}$, ſicut in ſuis etiam ad hunc locum commentariis rectè admonuit J. Stewart Abredonenſis.

Newtonus autem in numeratore coefficientis E membrum primum, $\frac{1}{\eta}\varepsilon$, et ultimum, $wi\mathrm{A}$, omiſit. Quod eo conſilio eum feciſſe arbitror, ut inſinuaret, formulis illis, $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$, $a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+$, non ſeries neceſſariò infinitas deſignari, ſed multinomia Algebraica, ſive infinita ſive finita quotvis nominum: et quando illa finita ſint, in areæ formulâ literas illas quæ nominum, illis in quibus formulæ $e+fz^{\eta}+$, $a+bz^{\eta}+$, ſubſiſtant, elatiorum coefficientes deſignarent, nihilo ſingulatim æquandas eſſe. Et cujuſque coefficientis eam quantitatem ſumendam, quæ ex membris reliquis conflatur, quæ literis illis, nihilo æquatis, non ſunt implicata. Ut ſi formulæ illæ $e+fz^{\eta}+$, $a+bz^{\eta}+$, in quarto quæque nomine ſubſiſtant; minimè quidem ex eo conſequetur, Areæ quoque formulam in nomine quarto neceſſariò terminatum iri. Quin etiam evenire poteſt, ut illa uſque proferpat. Literæ vero ε, i, et aliæ omnes, quibus formulæ utriuſque, $e+fz^{\eta}+$, $a+bz^{\eta}+$, ultra quartum nomen productæ, coefficientes indicarentur, nihilo ſingulatim ſunt æquandæ. Unde coefficiens E formam induet, quali eam Newtonus protulit, membris $\frac{1}{\eta}\varepsilon$, $wi\mathrm{A}$ è medio ſublatis. Et nominis proximi coefficiens F erit $\frac{-\overline{s+4}\,f\mathrm{E} - \overline{t+3}\,g\mathrm{D} - \overline{v+2}\,h\mathrm{C}}{\overline{r+5}\,e}$.

PROP. V. geometricè quadrari poteſt. At ſi curva talem quadraturam non admittit, ſeries utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget, & aream dabit approximando; præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel nihil eſt, vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{z^\eta}{e}$ æqualis eſt unitati. Si $\frac{z^\eta}{e}$ minor eſt unitate, converget ſeries in quâ index η affirmativus eſt: ſin $\frac{z^\eta}{e}$ unitate major eſt, converget ſeries altera. Si in uno caſu area adjacet abſciſſæ ad uſque ordinatam ductæ, in altero adjacet abſciſſæ ultra ordinatam productæ.

2. Nota inſuper, quòd ſi Ordinata contentum eſt ſub factore rationali

(n) NIMIRUM calculi ita fient ſimpliciſſimi, ſi Ordinata QR^π ad eam formam revocetur, quâ latus partis irrationalis R^π non metiatur partem rationalem. Si igitur R metiatur Q, metiendo faciat A. Erit igitur $Q = AR$; et ordinata QR^π in $AR^{\pi+1}$ migraverit. Si R^2 metiatur Q, metiendo faciat B. Erit $Q = B.R^2$ et ordinata $Q.R^\pi$ in $B.R^{\pi+2}$ migraverit. Denique ſi R^n metiatur Q, metiendo faciat P. Erit $Q = PR^n$ et ordinata $Q.R^\pi$ in $P.R^{\pi+n}$ migraverit.

(o) Viâ in Arithmeticâ Univerſali traditâ. Cap. VII. Sect. 2.

(p) HUJUS demonſtratio hâc nititur propoſitione.

THEOREMA.

DE FLUXIONIBUS FLUENTIUM *Si quantitas fracta rationalis fluat, ejus fluxio quantitas erit fracta; cujus, minimis ſcilicet quantitatibus expoſitæ, denominator vel quadratus erit, vel ex poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis etiam, cum quadraticis compoſitus.*

FLUAT quantitas fracta algebraicè rationalis $\frac{X}{Y}$, hiſce quidem, X, Y, minimis expoſita. Hujus fluxio quantitas erit fracta $\frac{Y\dot{X} - X\dot{Y}}{Y^2}$: quæ, ſi quantitates $Y\dot{X} - X\dot{Y}$, Y^2 inter ſe ſint primæ, his quidem minimis expoſita erit, et denominatorem habet Y^2 quadratum. Quantitatum autem, $Y\dot{X} - X\dot{Y}$ et Y^2, ſi non ſint inter ſe primæ, inveniatur maximus diviſor communis algebraicus, qui literâ Z deſignetur. Quantitas Z quantitates $Y\dot{X} - X\dot{Y}$, Y^2 dividens faciat U, S. Hiſce igitur U, S fluxio quantitatis $\frac{X}{Y}$ minimis exponetur. Nempe hoc modo $\frac{U}{S}$. Dico denominatorem S ex poteſtatibus cubicis, vel etiam ultra-cubicis cum aliis quadraticis, compoſitum eſſe.

Quantitas Z vel prima erit, vel ex primis compoſita. Sit primùm prima. Cùm igitur quantitas prima Z quantitatem quadraticam Y^2 metiatur, radicem ejus Y eadem Z metietur (Elem. VII. 32.) Quare Z metietur $Y\dot{X}$. Sed metitur quoque hujus $Y\dot{X}$, aliuſque $X\dot{Y}$ differentiam. Quare et aliam illam $X\dot{Y}$ metitur. Sed non metietur X. Nam ſi metiatur illam, cùm oſtenſum ſit, eandem Z quantitatem etiam Y metiri, duæ X, Y non erunt inter ſe primæ. Sed primas inter ſe poſuimus. Quantitas igitur prima Z quæ non metitur X, cùm tamen $X\dot{Y}$ metiatur, neceſſariò metietur $\dot{Y}$ (Elem. VII. 32.) Metitur igitur Z illam $\dot{Y}$. Et oſtenſum eſt metiri Y. Ponatur igitur Z^n poteſtas illius Z, elatiſſima earum quæ fluentem Y metiantur. Jam

 cùm

rationali Q & factore furdo irreducibili R^{π}, & factoris furdi latus R non dividit factorem rationalem Q; erit $\lambda-1=\pi$, & $R^{\lambda-1}=R^{\pi}$. Sin factoris furdi latus R dividit factorem rationalem femel, erit $\lambda-1=\pi+1$, & $R^{\lambda-1}=R^{\pi+1}$: fi dividit bis, erit $\lambda-1=\pi+2$, & $R^{\lambda-1}=R^{\pi+2}$: fi ter, erit $\lambda-1=\pi+3$, & $R^{\lambda-1}=R^{\pi+3}$: & fic deinceps (n). PROP. V.

3. Si Ordinata eft fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis compofito: refolvendus eft denominator in divifores fuos omnes primos (o). Et fi divifor fit aliquis cui nullus alius eft æqualis, curva quadrari nequit (p): fin

cùm z^n metiatur fluentem Y, quantitatem quidem quadraticam Y^2 metietur quadratica z^{2n}, et fluxionem $\dot{Y}$ quantitas z^{n-1} metietur. Sed oftenfum eft z metiri fluxionem $\dot{Y}$. Quare index ille $n-1$ non minor erit unitate, neque fanè major. Non minor: quoniam fi minor effet, quantitas z^{n-1} non effet elatiffima in poteftatibus quantitatis z quæ fluxionem $\dot{Y}$ metirentur: neque igitur z^n elatiffima quæ metiretur fluentem Y: quam tamen elatiffimam pofuimus. Non major: quoniam fi major effet unitate index illæ $n-1$, quantitas prima z non effet duarum $\dot{Y}X-X\dot{Y}$, et Y^2 maximus divifor communis. Sed maximum pofuimus. Quare $n-1=1$. Ergo $n=2$. Et $2n=4$. Quantitas igitur z^4 metietur quantitatem Y^2. Metiatur, et faciat T. Ut fit $Tz^4=Y^2$. Sed $S\times Z=Y^2$. Quare $Tz^4=S\times Z$, et $Tz^3=S$. Quantitatis igitur fractæ, $\frac{U}{S}$, denominator, S, compofitus eft ex poteftate cubicâ primæ quantitatis z, cum aliâ quantitate T. FRACTARUM RATIONALIUM.

Sed non fit z quantitas prima. Ex primis igitur erit compofita. Refolvatur igitur z in divifores fui primos α, β, γ. Jam cùm α metiatur z, et z metiatur Y^2, idcirco illa α eandem Y^2 metietur. Ex eo autem quòd quantitas prima α quadraticam Y^2 metiatur, efficietur eandem α tum fimplicem Y tum fluxionem $\dot{Y}$ metiri. Id enim iifdem planè argumentis obtinendum erit, quibus priùs idem de quantitate z evicimus, cùm illam primam pofuiffemus. Et pari ratione alii quantitatis z divifores primi, β, γ, fluentem Y et fluxionem $\dot{Y}$ fingulatim metientur. Quantitatum α, β, γ ponantur α^n, β^p, γ^q poteftates elatiffimæ, quæ quantitatem Y fingulatim metiantur. Fluxionem igitur $\dot{Y}$ poteftates, α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1}, fingulatim metientur, neque illis ullæ quidem elatiores: quantitatem verò quadraticam Y^2 poteftates α^{2n}, β^{2p}, γ^{2q} fingulatim metientur. Jam cùm quantitatem Y metiantur primarum, α, β, γ, poteftates illæ α^n, β^p, γ^q fingulatim, factum quidem ex poteftatum illarum omnium mutuâ in fe multiplicatione, $\alpha^n\times\beta^p\times\gamma^q$, eandem Y metietur. (Hoc autem demonftratione mox firmabimus.) Et factum $\alpha^{n-1}\times\beta^{p-1}\times\gamma^{q-1}$, fluxionem $\dot{Y}$ metietur, nimirum, quam illæ α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1} primarum poteftates fingulatim. Quantitatem denique quadraticam Y^2 factum $\alpha^{2n}\times\beta^{2p}\times\gamma^{2q}$ metietur. Hinc efficitur quantitatem $\alpha^{n-1}\times\beta^{p-1}\times\gamma^{q-1}$ duarum $\dot{Y}X-X\dot{Y}$ et Y^2 communem effe diviforem; et maximum quidem illum, qui ex poteftatibus primarum α, β, γ compofitus communis effe poteft. Major enim fi quis effet, eum ex elatioribus poteftatibus componi oporteret. Ita verò fluxionem $\dot{Y}$ poteftates quantitatum α, β, γ, elatiores quàm funt illæ α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1} fingulatim metirentur. Cujus contrarium oftendimus. Quantitatum igitur $\dot{Y}X-X\dot{Y}$, Y^2 erit illa $\alpha^{n-1}\times\beta^{p-1}\times\gamma^{q-1}$ divifor communis maximus qui ex poteftatibus illarum α, β, γ componi poterit. Eft verò z duarum $\dot{Y}X-X\dot{Y}$, Y^2 divifor maximus communis, et ex illarum α, β, γ poteftatibus totus eft compofitus.

Quare z facto illi $\alpha^{n-1}\times\beta^{p-1}\times\gamma^{q-1}$ æqualis eft. Sed cùm z dividens Y^2 fecerit S, erit $SZ=$

Prop. V.

sin duo vel plures sint divisores æquales, rejiciendus est eorum unus; & si adhuc alii duo vel plures sint sibi mutuò æquales, & prioribus

De Fluxionibus Fluentium

$\text{sz} = \text{y}^2$, hoc est $\text{s} \times \alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1} = \text{y}^2$. Sed illam y^2 hæc $\alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q}$ metitur (ostensum enim.) Metiendo faciat T. Ut sit $\text{T} \times \alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q} = \text{y}^2$. Ergo $\text{T} \times \alpha^{2n} \times \beta^{2p} \times \gamma^{2q} = \text{s} \times \alpha^{n-1} \times \beta^{p-1} \times \gamma^{q-1}$. Ac propterea $\text{T} \times \alpha^{n+1} \times \beta^{p+1} \times \gamma^{q+1} = \text{s}$. Quantitatis igitur fractæ $\frac{\text{u}}{\text{s}}$, quæ fluentis fractæ, $\frac{\text{x}}{\text{y}}$, fluxio est, minimis exposita; hujus denominator s compositus est ex quantitâte quâdam per literam T designata, et primarum α, β, γ potestatibus α^{n+1}, β^{p+1}, γ^{q+1}; quæ sanè cubicis haud erunt depressiores. Nam cùm illæ α^{n-1}, β^{p-1}, γ^{q-1} sint primarum α, β, γ potestates elatissimæ, quæ fluxionem $\dot{\text{y}}$ metiantur, et ostensum sit ipsas α, β, γ illam $\dot{\text{y}}$ metiri, indicum illorum, $n-1$, $p-1$, $q-1$, nullus quidem unitate minor erit. Illorum igitur $n+1$, $p+1$, $q+1$, nullus ternario minor. Potestates igitur α^{n+1}, β^{p+1}, γ^{q+1} cubicis non erunt depressiores.

Quantitatis igitur fractæ $\frac{\text{u}}{\text{s}}$, quæ facta est ex illâ $\frac{\text{y}\dot{\text{x}} - \text{x}\dot{\text{y}}}{\text{y}^2}$, illas $\text{y}\dot{\text{x}} - \text{x}\dot{\text{y}}$, y^2 dividendo à z, quem maximum illæ communem divisorem habent; hujus inquam quantitatis fractæ, sic minimis expositæ, denominator s, in casu utroque, sive z prima fuerit sive composita, totus erit compositus ex quantitate quâdam per literam T designatâ, et potestatibus quibusdam, sive ipsius z, sive primorum ipsius z divisorum, quæ cubicis non erunt depressiores.

Jam verò dico illam T ex potestatibus quadraticis totam esse compositam. Primùm enim, si z prima sit, erit z^2 quantitatis z potestas, earum quæ Y metiantur elatissima (per ea quæ in casu primo jam antè ostensa sunt.) Metiatur igitur z^2 illam Y, et faciat t. Ut sit $\text{z}^2 \times t = \text{y}$. Erit igitur $\text{z}^4 \times t^2 = \text{y}^2$. Sed positum est $\text{z}^4 \times \text{T} = \text{y}^2$. Quare $\text{T} = t^2$.

In altero casu, quando z est quantitas composita, metiatur $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ fluentem Y et t faciat. Ut sit $\alpha^n \beta^p \gamma^q \times t = \text{y}$; erit igitur $\alpha^{2n} \beta^{2p} \gamma^{2q} \times t^2 = \text{y}^2$. Sed positum erat $\text{T} \times \alpha^{2n} \beta^{2p} \gamma^{2q} = \text{y}^2$. Unde $\text{T} = t^2$.

In casu igitur utroque quantitas T quadraticæ t^2 æqualis erit. Unde si t prima sit nihilominus T quadratica erit. Si t non sit prima, resolvatur ea in divisores sui primos, π, ρ, σ; ut sit $t = \pi \times \rho \times \sigma$. Erit igitur t^2 sive T, huic facto $\pi^2 \times \rho^2 \times \sigma^2$ æqualis. Quantitas igitur T ex quadraticis tota componetur; pluribus quidem eis, si t sit composita; si prima sit t, ex unâ illâ t^2.

Quantitatis igitur fractæ $\frac{\text{u}}{\text{s}}$ denominator s, quem ostendimus ex quantitate T & potestatibus cubicis, vel ultra-cubicis, totum esse compositum, is quidem ex cubicis quibusdam, vel ultrà-cubicis, et aliis quadraticis totus componetur. Q. E. D.

2. Illud modò demonstratione nobis firmandum est, quod assumpsimus, factum ex quantitatum primarum potestatibus, quæ aliam aliquam singulatim metiantur, id eandem metiri.

Sint igitur quantitates duæ primæ α, β quæ aliam A metiantur. Et sint α^n, β^p illarum α, β potestates quæ illam A singulatim metiantur. Dico $\alpha^n \times \beta^p$ eandem A metiri. Metiatur enim α^n illam A, et faciat a. Ut sit $\alpha^n \times \text{a} = \text{A}$. Jam cùm β^p metiatur A, metitur certè $\alpha^n \times \text{a}$. Sed β^p non metitur α^n, ad quam utique prima est (Elem. IX 13.) Metitur igitur illam a. Nam si duæ quantitates inter se multiplicatæ aliam fecerint, factam verò alia aliqua metiatur, ea, si ad alteram initio positarum prima sit, alteram metietur. Hoc enim iisdem planè argumentis ostendi possit, quibus evincitur secunda à tricesimâ libri septimi Elementorum. Igitur β^p, cùm illam A metiatur è duabus, α^n, a, factam, et ad α^n prima sit, metietur alteram a. Sed $\beta^p : \text{a} = \alpha^n \beta^p : \alpha^n \text{a}$. Quare $\alpha^n \beta^p$ metietur $\alpha^n \text{a}$; hoc est ipsam A metietur. Q. E. D.

A

α β

a

Sint jam tres primæ quantitates α, β, γ, quarum potestates α^n, β^p, γ^q quantitatem A singulatim

prioribus inæquales, rejiciendus eſt etiam eorum unus ; & ſic in aliis omnibus æqualibus, ſi adhuc plures ſint : deinde diviſor qui relinquitur, vel contentum ſub diviſoribus omnibus qui relinquuntur, Prop. V.

ſingulatim metiantur. Dico $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ eandem metiri. Metiatur α^n quantitatem A et faciat a. Fracta-rum Rationalium.

A

α β γ

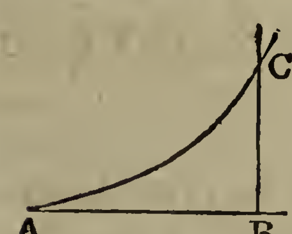
a

Jam β^p metietur a, id enim ut priùs oſtendetur. Sed pari ratione γ^q eandem a metietur. Quare factum etiam $\beta^p \times \gamma^q$ metietur eandem a, per caſum priorem. Sed $\beta^p \times \gamma^q : a = \alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q : \alpha^n a$. Quare $\alpha^n \times \beta^p \times \gamma^q$ metietur $\alpha^n a$; hoc eſt ipſam A metietur.

Et ſimili argumentatione, quotcunque poſitæ fuerint quantitates primæ, veritatem aſſumpti uſque probabimus. Q. E. D.

3. Propositione noſtrâ ſic tandem ex omni parte firmatâ, illius ope, veritas ejus, quod à Newtono dictum eſt, manifeſta fiet : Curvam utique, cujus ordinata ſit fracta rationalis, ſi fractæ illius, minimis expoſitæ, denominator in diviſoribus ſui primis ullum habeat, cui alius non inveniatur æqualis, eam curvam non poſſe quadrari : non poſſe utique definitâ quadraturâ, per æquationem Algebraicam, nominibus finitam, exponendâ. Nam per ſeries quidem infinitas nihil obſtat, quo minùs talis etiam curvæ area, propiùs ſaltem quàm pro differentiâ datâ, æſtimari poſſit.

4. Sit enim quantitas fracta rationalis $\frac{\text{U}}{\text{S}}$, his U, S minimis expoſita : ſignificantibus utique literis U, S, multinomia Algebraica rationalia, ex poteſtatibus ſimplicis alicujus quantitatis z compoſita. Denominator autem S in diviſoribus ſui primis habeat aliquem α, cui alius non inveniatur æqualis. Sit curva ABC, cujus abſciſſâ AB per literam z ſignificatâ, ordinata BC quantitati $\frac{\text{U}}{\text{S}}$ ſemper ſit æqualis. Dico hanc curvam, aliter ac per ſeriem infinitam non poſſe quadrari. Quadretur enim, et area ejus dicatur Q. Jam cùm Q area ſit curvæ, cujus ordinata eſt $\frac{\text{U}}{\text{S}}$, abſciſſa z, erit fluxio areæ Q æqualis huic $\frac{\text{U}}{\text{S}}\dot{z}$. Hoc eſt ſi ponatur $\dot{z} = 1$, erit $\dot{\text{Q}} = \frac{\text{U}}{\text{S}}$. Quantitas igitur Q aut fracta rationalis erit, aut ſeries infinita, ſiquidem fluxionem fractam rationalem habeat. Nam fluxio rationalis à fluente irrationali, ab unâ fluente ſimplici factâ, haud venerit; neque fracta à non fractâ rationali; niſi forte ex ſerie infinitâ. Sit igitur Q, modò eſſe poſſit, quantitas fracta rationalis. Quantitatis igitur fractæ rationalis Q, hujus eſt illa $\frac{\text{U}}{\text{S}}$, fracta rationalis, fluxio; cujus tamen, minimis quidem illis, U, S, expoſitæ, denominator S, cùm in diviſoribus ſui primis habeat quendam α, cui alius non inveniatur æqualis, certè neque quadratus ille erit, neque ex poteſtatibus cubicis, vel ultra-cubicis aliiſque quadraticis totus quidem compoſitus. Hoc autem abſurdum eſt : pugnat enim cum propoſitione modò oſtenſâ. Non igitur fracta rationalis erit quantitas illa Q. Reſtat ut ſeries infinita ſit Q. Curva igitur ACB, niſi per ſeriem infinitam, non poteſt quadrari. Q. E. D.



5. Cæterum fluxiones fractas quaſdam rationales ex feriebus infinitis nonnunquam emanare, quod tacitè quidem aſſumpſimus; illud et poſſe fieri, et reverâ ſolere, ſatis ut opinor intelligatur vel hujus exemplo, $\frac{\dot{z}}{1+z}$, quæ ex hac ſerie infinitâ, $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 -$, emanârit. Hujus enim ſeriei fluxio erit, $\dot{z} - z\dot{z} + z^2\dot{z} - z^3\dot{z} + z^4\dot{z} -, = \frac{\dot{z}}{1+z}$. Hanc autem æquationem verè poni, ſi aliunde non ſatis notum ſit, ex eo intelligatur, quòd ſeriem $\dot{z} - z\dot{z} + z^2\dot{z} - z^3\dot{z} + z^4\dot{z} -$, in binomium $1 + z$ multiplicando, illa $\dot{z}$ effecta fuerit; nominibus aliis omnibus ipſâ multiplicationis operâ deletis, ut videre eſt :

$\dot{z} - z$

PROP. V. linquuntur, fi plures funt, ponendum eft pro R; & ejus quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, (præterquam ubi contentum illud eft quadratum vel cubus vel quadrato-quadratum, &c. quo cafu ejus latus ponendum eft pro R, & poteftatis index, 2 vel 3 vel 4, negativè fumptus pro λ,) et Ordinata ad denominatorem R^2 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda (q).

4. Ut fi Ordinata fit $\frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis eft, & denominatoris divifores funt pares, nempe $z-1$, $z-1$, $z-1$, & $z+2$, $z+2$; rejicio magnitudinis utriufque diviforem unum, & reliquorum $z-1$, $z-1$, $z+2$ contentum, z^3-3z+2, pono pro R; & ejus quadrati reciprocum, $\frac{1}{R^2}$ feu R^{-2}, pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad denominatorem, R^2 feu $R^{1-\lambda}$, reduco, & fit $\frac{z^6-9z^4+8z^3}{\overline{z^3-3z+2}|^2}$, i. e. $\overline{z^3\times 8-9z+z^3}\times\overline{2-3z+z^3}|^{-2}$. Et inde eft $a=8$, $b=-9$, $c=0$, $d=1$, &c. $e=2$, $f=-3$, $g=0$, $h=1$, $\lambda-1=-2$, $\lambda=-1$, $\eta=1$, $\theta-1=3$, $\theta=4=r$, $s=3$, $t=2$, $v=1$. Et his in ferie fcriptis prodit area $\frac{z^4}{z^3-3z+2}$, terminis omnibus in totâ ferie poft primum evanefcentibus.

5. Si denique Ordinata eft fractio irreducibilis, & ejus denominator contentum eft fub factore rationali Q & factore furdo irreducibili

$$\begin{array}{r}
\dot{z}-z\dot{z}+z^2\dot{z}-z^3\dot{z}+z^4\dot{z}- \\
1+z \\
\hline
z\dot{z}-z^2\dot{z}+z\,\dot{z}-z^4\dot{z}+z^5\dot{z}-, \\
\dot{z}-z\dot{z}+z^2\dot{z}-z^3\dot{z}+z^4\dot{z}-z^5\dot{z}+, \\
\hline
\dot{z}\quad *\quad *\quad *\quad *\quad *
\end{array}$$

(q) NIMIRUM fi factum è diviforibus relictis neque quadratum fuerit, neque cubus neque ulla denique poteftas numero quopiam indicata. Sin fuerit, fit quidem poteftas numero n indicata. Tum, facto illo dicto F, jubet Newtonus quantitatem R huic $F^{\frac{1}{n}}$ æqualem fumi. Et ordinatam ad denominatorem R^{n+1} vult reduci. Cùm enim indices λ, $-n$ æquandos dixit, perinde eft ac fi hos $\lambda-1$, $-n-1$ æquandos dixiffet.

(r) NEMPE harum præceptionum, ficut earum quæ fuprà traduntur (§ 2 & 3.) ea mens eft: ut Ordinata, five illa rationalis five irrationalis fit, ad denominatorem quâm maximè fimplicem reducatur. Quod ita plerumque fiet, fi quibus modis Newtonus præfcripfit, ea tractetur.

(f) RAPHSONI in hoc fymbolo fecutus fum emendationes, quas Stewarto quoque fequi placuit, fed celato Raphfoni nomine. (Vide *the Hiftory of Fluxions, &c. by the late Mr. Jofeph Raphfon, A. M. and R. S. S.* 4t°. *London*, 1715, *pag.* 42: et confer *Sir Ifaac Newton's two Treatifes of the Quadrature of Curves and Analyfis by Equations, &c. explained by John Stewart, A. M.*

reducibili R^{π}, inveniendi ſunt lateris R diviſores omnes primi, & rejiciendus eſt diviſor unus magnitudinis cujuſque, & per diviſores qui reſtant, ſiqui ſint, multiplicandus eſt factor rationalis Q: & ſi factum æquale eſt lateri R, vel lateris illius poteſtati alicui cujus index eſt numerus integer, eſto index ille m, & erit $\lambda-1=-\pi-m$, & $R^{\lambda-1}=R^{-\pi-m}$ (r). Prop. V.

Ut ſi ordinata ſit $\dfrac{3q^5-q^4x+9q^3x^2-q^2x^3-6qx^4}{\overline{q^2-x^2}\times\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}$ (s); quoniam factoris ſurdi latus, R, ſeu $q^3+q^2x-qx^2-x^3$, diviſores habet $q+x, q+x, q-x$, qui duarum ſunt magnitudinum; rejicio diviſorem unum magnitudinis utriuſque: & per diviſorem, $q+x$, qui relinquitur, multiplico factorem rationalem q^2-x^2. Et quoniam factum, $q^3+q^2x-qx^2-x^3$, æquale eſt lateri R, pono $m=1$, & inde, cùm π ſit $\frac{1}{3}$, ſit $\lambda-1=-\frac{4}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad denominatorem (t) $R^{\frac{4}{3}}$, & fit $x^0\times\overline{3q^6+2q^5x+8q^4x^2+8q^3x^3-7q^2x^4-6qx^5}\times\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{-\frac{4}{3}}$. Unde eſt $a=3q^6$; $b=2q^5$, &c. $e=q^3$; $f=q^2$, &c. $\theta-1=0$; $\theta=1=\eta$; $\lambda=-\frac{1}{3}$; $r=1$; $s=\frac{2}{3}$; $t=\frac{1}{3}$; $v=0$. Et his in ſerie ſcriptis prodit area $\dfrac{3q^3x+3qx^3}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}$, terminis omnibus in ſerie totâ poſt tertium evaneſcentibus (u).

PROP.

A. M. Profeſſor of Math. in the Mariſhal College, Aberdeen, 4to. London, 1745, *page* 13.) Editio Princeps habuit $\dfrac{3q^5-q4x+9q^1xx-qqx^3-6x^3}{qq-xx\sqrt{\text{cub.}\ q^3+qqx-qxx-x^3}}$. Quod in pejus etiam mutatum Joneſius dedit, hoc modo, $\dfrac{3q^5-q^4x^4+9q^2x^2-q^2x^3-6x^3}{\overline{q^2-x^2}\times\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}$. Horum enim utrumque vitioſum eſſe, ex eo intelligere eſt, quòd neutrum quidem cum alio congruit, inferiùs expoſito, ejuſdem ordinatæ ſymbolo ad denominatorem $R^{\frac{4}{3}}$ reductæ; quod utraque editio, princeps illa, et Joneſii, uno modo protulerunt; quodque eo modo prolatum rectè ſe habere, ſigno eſt indicum ſeries ordine progrediens. Cæterùm vel ante Raphſonum, multo certè ante Stewartum, Harriſius ediderat, $\dfrac{3q^5-q^4x+9q^2xx-qqx^3-6qx^4}{qq-xx\sqrt[3]{\overline{q^3+qqx-qxx-x^3}}}$. Rectè quidem omnia, niſi quòd indicem literæ q, in nomine numeratoris tertio, non ſatis emendaverat. (Vide *Lexicon Technicum, &c. by John Harris, D. D. &c. vol.* 2. *fol. London*, 1710, ſub voce *Quadrature.*)

(t) Sic emendavi, pro $R^{-\frac{4}{3}}$, quod editiones habuere ante hanc noſtram omnes, et quod ipſe quidem Raphſonus habuit.

(u) STEWARTI in hoc ſymbolo emendationes ſequimur. Editio Joneſii, aliæque numeratorem habuere $3q^2x+3x^3$. Vitioſè. Nam ſi areæ exquirendæ ponatur hoc ſymbolum generale, $\dfrac{x}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}\times A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+$, coefficientes hiſce æquationibus definientur. $A=3q^3$. $B=0$. $C=3q$. $D=0$. $E=0$. $F=0$.

Prop. VI.

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſcribantur R pro $e+fz^\eta+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+$ &c. & S pro $k+lz^\eta+mz^{2\eta}+nz^{3\eta}+$ &c. ſit autem ordinatim applicata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ in $a+bz^\eta+cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+$ &c. et ſi terminorum, e, f, g, h, &c. et k, l, m, n, &c. rectangula ſint

$$\begin{matrix} ek & fk & gk & hk & \&c. \\ el & fl & gl & hl & \&c. \\ em & fm & gm & hm & \&c. \\ en & fn & gn & hn & \&c. \end{matrix}$$

Et ſi rectangulorum illorum coefficientes numerales ſint reſpectivè

$$\tfrac{\theta}{\eta}=r.\quad r+\lambda=s.\quad s+\lambda=t\quad t+\lambda=v.\ \&c.$$

$$r+\mu=s'.\quad s+\mu=t'.\quad t+\mu=v'.\quad v+\mu=w'.\ \&c.$$

$$s'+\mu=t''.\quad t'+\mu=v''.\quad v'+\mu=w''.\quad w'+\mu=x''.\ \&c.$$

$$t''+\mu=v'''.\quad v''+\mu=w'''.\quad w''+\mu=x'''.\quad x''+\mu=y'''.\ \&c.$$

Area

Hæ autem æquationes è formulâ generali Propoſitionis v. Newtonianæ veniunt, pro literis, a, b, c, &c. e, f, g, &c. $\eta, \theta, \lambda, r, s, t$, &c. eis earum æſtimationibus in formulam illam ſubſtitutis, quas ſymbolum ordinatæ promit.

Itaque coefficiente ſecundâ, B, omnibuſque poſt tertiam C in nihilum abeuntibus, Area erit $\dfrac{x}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}\times 3q^3+3qx^2=\dfrac{3q^3x+3qx^3}{\overline{q^3+q^2x-qx^2-x^3}|^{\frac{1}{3}}}$.

(x) DEMONSTRATIO PROPOSITIONIS SEXTÆ.

Sunto juxta Propoſitionem quartam.

Curvarum Ordinatæ — Areæ.

$$1^\circ.\ \left.\begin{array}{l} \theta ekA \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\end{matrix}\ fkAz^\eta \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix}\ gkAz^{2\eta} \begin{matrix}+\theta\\+3\lambda\eta\end{matrix}\ hkAz^{3\eta} \\ \begin{matrix}+\theta\\+\mu\eta\end{matrix}\ elAz^\eta \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\\+\mu\eta\end{matrix}\ flAz^{2\eta} \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\\+\mu\eta\end{matrix}\ glAz^{3\eta}\ \&c. \\ \qquad\qquad \begin{matrix}+\theta\\+2\mu\eta\end{matrix}\ emAz^{2\eta} \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\\+2\mu\eta\end{matrix}\ fmAz^{3\eta} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \begin{matrix}+\theta\\+3\mu\eta\end{matrix}\ enAz^{3\eta} \end{array}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\ \Bigg|\ Az^\theta R^\lambda S^\mu$$

2°.

Area curvæ erit hæc

$$
\begin{aligned}
z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} \text{ in } &+ \frac{\frac{1}{n}a}{rek} \\
&+ \frac{\frac{1}{n}b \begin{array}{l} -sfk \\ -s'el \end{array} A}{\overline{r+1}\times ek} z^{n} \\
&+ \frac{\frac{1}{n}c \begin{array}{l} -\overline{s+1}\times fk \\ -\overline{s'+1}\times el \end{array} B \begin{array}{l} -tgk \\ -t'fl \\ -t''em \end{array} A}{\overline{r+2}\times ek} z^{2n} \\
&+ \frac{\frac{1}{n}d \begin{array}{l} -\overline{s+2}\times fk \\ -\overline{s'+2}\times el \end{array} C \begin{array}{l} -\overline{t+1}\times gk \\ -\overline{t'+1}\times fl \\ -\overline{t''+1}\times em \end{array} B \begin{array}{l} -vhk \\ -v'gl \\ -v''fm \\ -v'''en \end{array} A}{\overline{r+3}\times ek} z^{3n} \\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

Ubi A denotat termini primi coefficientem datam, $\frac{\frac{1}{n}a}{rek}$, cum ſigno ſuo + vel – ; B coefficientem datam ſecundi; C coefficientem datam tertii; & ſic deinceps. Terminorum vero, a, b, c, &c. e, f, g, &c. k, l, m, &c. unus vel plures deeſſe poſſunt.

Demonſtratur Propoſitio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hîc obtinent. Pergit autem ſeries talium Propoſitionum in infinitum, & progreſſio ſeriei manifeſta eſt (x).

Demonstratio

$$
\begin{array}{llll}
2^{\circ}. & \overline{\theta+n}ekBz^{n} \begin{array}{l} +\overline{\theta+n} \\ +\lambda n \end{array} fkBz^{2n} \begin{array}{l} +\overline{\theta+n} \\ +2\lambda n \end{array} gkBz^{3n} & & \\
& \qquad \begin{array}{l} +\overline{\theta+n} \\ +\mu n \end{array} elBz^{2n} \begin{array}{l} +\overline{\theta+n} \\ +\lambda n \\ +\mu n \end{array} flBz^{3n} \;\&c. & \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} & Bz^{\theta+n}R^{\lambda}S^{\mu} \\
& \qquad \qquad \begin{array}{l} +\overline{\theta+n} \\ +2\mu n \end{array} emBz^{3n} & & \\
3^{\circ}. & \overline{\theta+2n}ekCz^{2n} \begin{array}{l} +\overline{\theta+2n} \\ +\lambda n \end{array} fkCz^{3n} \;\&c. & \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} & Cz^{\theta+2n}R^{\lambda}S^{\mu} \\
& \qquad \begin{array}{l} +\overline{\theta+2n} \\ +\mu n \end{array} elCz^{3n} & & \\
4^{\circ}. & \theta+3n\, ekDz^{3n} \;\&c. & \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1} & Dz^{\theta+3n}R^{\lambda}S^{\mu}
\end{array}
$$

Et ſi ſumma Ordinatarum ponatur æqualis ordinatæ $a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+, \times z^{\theta-1}.R^{\lambda-1}.S^{\mu-1}$, ſumma arearum $z^{\theta}.R^{\lambda}.S^{\mu}\times A+Bz^{n}+Cz^{2n}+Dz^{3n}+$, æqualis erit areæ curvæ, cujus iſta eſt ordinata. Æquentur igitur ordinatarum membra homologa,

Prop. VII.

PROP. VII. THEOR. V.

Si pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$ &c. ſcribatur R ut ſuprà, & in Curvæ alicujus Ordinatâ, $z^{\theta\pm\eta\sigma}\mathrm{R}^{\lambda\pm\tau}$, maneant quantitates datæ θ, η, λ, e, f, g, &c. et pro σ ac τ ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi detur Area unius ex curvis, quæ per ordinatas innumeras ſic prodeuntes deſignantur, ſi Ordinatæ ſunt duorum nominum in vinculo radicis; vel ſi dentur Areæ duarum ex curvis, ſi Ordinatæ ſunt trium nominum in vinculo radicis; vel Areæ trium ex curvis, ſi Ordinatæ ſunt quatuor nominum in vinculo radicis; & ſic deinceps in infinitum: dico quòd dabuntur Areæ curvarum omnium.

Pro nominibus hîc habeo terminos omnes in vinculo radicis, tam deficientes quàm plenos, quorum indices dignitatum ſunt in progreſſione arithmeticâ. Sic Ordinata $\sqrt{a^4-ax^3+x^4}$, ob terminos duos inter a^4 & $-ax^3$ deficientes, pro quinquinomio haberi debet. At $\sqrt{a^4+x^4}$ binomium eſt; & $\sqrt{a^4+x^4-\frac{x^8}{a^4}}$ trinomium;

Prop. VI.

et fiet $a = \theta ek\mathrm{A}$.

$$b = \overline{\theta+\lambda\eta}\times fk\mathrm{A}+\overline{\theta+\mu\eta}\times el\mathrm{A}+\overline{\theta+\eta}\times ek\mathrm{B}$$

$$c = \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gk\mathrm{A}+\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\times fl\mathrm{A}+\overline{\theta+2\mu\eta}\times em\mathrm{A}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fk\mathrm{B}+\overline{\theta+\eta+\mu\eta}\times el\mathrm{B}+\overline{\theta+2\eta}\times ek\mathrm{C}.$$

$$d = \overline{\theta+3\lambda\eta}\times hk\mathrm{A}+\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\times gl\mathrm{A}+\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}\times fm\mathrm{A}+\overline{\theta+3\mu\eta}\times en\mathrm{A}+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times gk\mathrm{B}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta+\mu\eta}\times fl\mathrm{B}+\overline{\theta+\eta+2\mu\eta}\times em\mathrm{B}+\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times fk\mathrm{C}+\overline{\theta+2\eta+\mu\eta}\times el\mathrm{C}+\overline{\theta+3\eta}\times ek\mathrm{D}.$$

Ex quibus venient

$$\mathrm{A} = \frac{a}{\theta ek}.\quad \mathrm{B} = \frac{b-\overline{\theta+\lambda\eta}\times fk\mathrm{A}-\overline{\theta+\mu\eta}\times el\mathrm{A}}{\overline{\theta+\eta}\times ek}.$$

$$\mathrm{C} = \frac{c-\overline{\theta+2\lambda\eta}\,gk\mathrm{A}-\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl\mathrm{A}-\overline{\theta+2\mu\eta}\,em\mathrm{A}-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\,fk\mathrm{B}-\overline{\theta+\eta+\mu\eta}\,el\mathrm{B}}{\overline{\theta+2\eta}\times ek}.$$

$$\mathrm{D} = \frac{d-\overline{\theta+3\lambda\eta}\,hk\mathrm{A}-\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\,gl\mathrm{A}-\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}\,fm\mathrm{A}-\overline{\theta+3\mu\eta}\,en\mathrm{A}-\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\,gk\mathrm{B}-\overline{\theta+\eta+\lambda\eta+\mu\eta}\,fl\mathrm{B}-\overline{\theta+\eta+2\mu\eta}\,em\mathrm{B}-\overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\,fk\mathrm{C}-\overline{\theta+2\eta+\mu\eta}\,el\mathrm{C}}{\overline{\theta+3\eta}\,ek}$$

Jam

mium; cùm progreſſio jam per majores differentias procedat. Propoſitio verò ſic demonſtratur. PROP. VII.

CAS. I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$[y] & $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, & Areæ pA & qB, exiſtente R quantitate trium nominum $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$. Et cùm per Prop. III. ſit $z^{\theta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata eſt $\theta e+\overline{\theta+\lambda\eta}\times fz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſubduc ordinatas & areas priores de areâ & ordinatâ poſteriori, & manebit $\overline{\theta e-p+\begin{matrix}\theta\\+\lambda\eta\end{matrix}\times f-q\times z^{\eta}+\begin{matrix}\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix}\times gz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ Ordinata nova curvæ, et $z^{\theta}R^{\lambda}-pA-qB$ ejuſdem Area. Pone $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$ [z], & Ordinata evadet $\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & Area $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta eA-\theta fB-\lambda\eta fB$. Divide utramque per $\theta g+2\lambda\eta g$, & aream prodeuntem dic C; & aſſumptâ utcunque r, erit rC Area curvæ, cujus Ordinata eſt $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$. Et quâ ratione ex areis pA & qB aream rC, ordinatæ $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem, invenimus, licebit ex areis qB & rC Aream quartam, puta sD, Ordinatæ $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem, invenire; & ſic deinceps in infinitum. Et par eſt ratio progreſſionis.

Jam pone $\frac{\theta}{\eta}=r,\ r+\lambda=s,\ s+\lambda=t,\ t+\lambda=u,\ u+\lambda=w$

$$r+\mu={}^{\backprime}s,\ s+\mu={}^{\backprime}t,\ t+\mu={}^{\backprime}u,\ u+\mu={}^{\backprime}w$$
$${}^{\backprime}s+\mu={}^{\backprime\backprime}t,\ {}^{\backprime}t+\mu={}^{\backprime\backprime}u,\ {}^{\backprime}u+\mu={}^{\backprime\backprime}w$$
$${}^{\backprime\backprime}t+\mu={}^{\backprime\backprime\backprime}u,\ {}^{\backprime\backprime}u+\mu={}^{\backprime\backprime\backprime}w$$

Et in areâ $z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu}\times\overline{A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+}$, in membro primo pro A, in ſecundo pro B, in tertio pro C, in quarto pro D, ſcribantur literarum A, B, C, D, æſtimationes illæ, quas æquationes jam ſuprà poſitæ, ſi noviſſimarum ope transformentur, promant; ita exſiſtet Areæ formula qualis à Newtono poſita eſt. Q. E. D.

Atque hæc eſt ſextæ propoſitionis demonſtratio, ad ſuperioris exemplar confecta, quam et ante nos Stewartus, in ſuis ad hunc locum commentariis, eodem ferè modo concinnatam dedit.

(y) In hâc demonſtratione ſymbola, $\theta-1$, $\lambda-1$, ponuntur pro θ, et λ enunciationis.

(z) NIMIRUM cùm id ſemper obtineat, ſecundum omnem literarum p, q æſtimationem, ut arearum differentia area ſit curvæ, cujus ordinata ordinatarum differentiæ æqualis ſit, obtinebit etiam, ſi p, q, earum ſumantur magnitudinum, quæ efficiant, ut duo prima ordinatarum differentiæ membra in nihilum ſingulatim abeant. Hoc autem efficietur ſi ſumatur $p=\theta e$, & $q=\theta f+\lambda\eta f$. Ita enim fiet $\theta e-p=0$, & $\theta f+\lambda\eta f-q=0$. Ponatur igitur $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$, atque ea conſequuntur quæ Newtonus dicit.

(aa) Hæc

Prop. VII. progreſſionis ab areis B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ, $\theta+\lambda\eta$, & $\theta+2\lambda\eta$ aliquis deficit, & feriem abrumpit, aſſumatur area pA, in principio progreſſionis unius, & area qB, in principio alterius, & ex his duabus areis dabuntur areæ omnes in progreſſione utrâque (aa). Et contrà, ex aliis duabus areis aſſumptis fit regreſſus, per analyſin, ad areas A & B; adeo ut ex duabus datis cæteræ omnes dentur. Q. E. O.

Hic eſt caſus Curvarum ubi ipſius z index θ augetur vel diminuitur perpetuâ additione vel ſubductione quantitatis η. Caſus alter eſt curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

C A S. II.

Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda}$ (bb) et $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$, quibus areæ pA et qB jam reſpondeant, ſi in R, ſeu $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$, ducantur, ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $\overline{pe+pfz^{\eta}+pgz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, et $\overline{qez^{\eta}+qfz^{2\eta}+qgz^{3\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et (per Prop. III.) eſt $az^{\theta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata eſt $\overline{\theta ae+\overline{\theta+\lambda\eta}\times afz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times agz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$; et $bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata eſt $\overline{\theta+\eta}\times bez^{\eta}+\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times bfz^{2\eta}+\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times bgz^{3\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

Et

(aa) Hæc præciſè nimis et obſcurè quidem dicta ſunt, credo tamen hâc mente dici. " Si forte eveniat ut vel θ, vel $\theta+\lambda\theta$, vel $\theta+2\lambda\eta$, hoc eſt, ut in ſymbolo illo generali $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta\text{:}A-\overline{\theta+\lambda\eta}\,fB=\overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC$, coefficiens cujuſlibet arearum A, B, C nihilo æqualis ſit, hoc fortè ſi eveniat, nihilo minus, per eandem inveſtigationis viam dabuntur areæ omnes utriuſque progreſſionis; ſive illius quæ, initio ab illâ pA ſumpto, infinitè uſque aſcendit, ſive alterius, quæ, ab alterâ pB incipiens, infinitè uſque deſcendit; ſive utriuſque. Hæc autem explicatiùs mox dicam, ac verè dicta eſſe oſtendam.

(bb) Rurſum ponitur $\theta-1$, pro θ enunciationis.

(cc) Nempe hoc modo.
Propter coefficientem membri ſecundi nihilo æqualem, fiet
$$p=-\frac{\theta af+\lambda\eta af+\theta be+\eta be+qe}{f}.$$ Rurſum, $$p=-\frac{\theta ag+2\lambda\eta ag+\theta bf+\eta bf+\lambda\eta bf+qf}{g};$$ propter coefficientem membri tertii nihilo æqualem. Rurſum, propter coefficientem membri quarti nihilo æqualem, $q=-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b$.

Ex his autem efficietur $b=\frac{afg}{f^2-2ge}$; et $p=\frac{2\lambda\eta age}{f^2-2ge}-\theta a-\lambda\eta a$; et $q=\frac{\theta+\eta+2\lambda\eta}{2ge-f^2}afg$.

Jam verò cùm id ſemper obtineat, ut Arearum ſumma $pA+qB+az^{\theta}R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ curvæ ſit Area, cujus

Et harum quatuor Arearum ſumma eſt $p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}\text{R}^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}$; Prop. VII.
& ſumma reſpondentium Ordinatarum

$$\begin{array}{llll}\overline{\theta ae+\overline{\theta+\lambda\eta}\times afz^{\eta}} & +\overline{\theta+2\lambda\eta}\times agz^{2\eta} & +\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times bgz^{3\eta} & \times z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}. \\ +pe+\overline{\theta+\eta}\times be & +\overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times bf & +1\times qg & \\ \quad +1\times pf & \quad +1\times pg & & \\ \quad +1\times qe & \quad +1\times qf & & \end{array}$$

Si terminus primus, tertius, & quartus, ponatur ſeorſim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae+pe=0$, ſeu $-\theta a=p$; per quartum $-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b=q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f}=b$. Unde ſecundus fit $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$; adeoque ſumma quatuor Ordinatarum eſt $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}z^{\theta+\eta-1}\text{R}^{\lambda-1}$, & ſumma totidem reſpondentium Arearum eſt $az^{\theta}\text{R}^{\lambda}+\frac{2ag}{f}z^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}-\theta a\text{A}-\frac{\overline{2\theta+2\eta+4\lambda\eta}}{f}ag\text{B}$. Dividantur hæ ſummæ per $\frac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$; & ſi quotum poſterius dicatur D, erit D Area curvæ, cujus Ordinata eſt quotum prius, $z^{\theta+\eta-1}\text{R}^{\lambda-1}$. Et eâdem ratione, ponendo omnes ordinatæ terminos, præter primum, æquales nihilo, poteſt Area curvæ inveniri, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$(cc). Dicatur area iſta C; & quâ ratione ex areis A & B inventæ ſunt areæ C ac D, ex his areis, C ac D, inveniri poſſunt aliæ duæ, E & F, ordinatis $z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-2}$ et $z^{\theta+\eta-1}\text{R}^{\lambda-2}$ congruentes, & ſic deinceps in infinitum. Et, per analyſin contrariam, regredi licet ab areis E &F ad areas C ac D, & inde ad

cujus Ordinata ſummæ Ordinatarum eſt æqualis, ſi ſumantur b, p, q, earum magnitudinum, quæ efficiant, ut membra omnia ſummæ ordinatatarum poſt primum in nihilum ſingulatim abeant, erit $p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}\text{R}^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}$ Area curvæ, cujus Ordinata erit $\overline{\theta a+p}\times ez.^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$.

Quare $\frac{p\text{A}+q\text{B}+az^{\theta}.\text{R}^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}}{\overline{\theta a+p}\times e}$ erit Area curvæ, cujus Ordinata $z.^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$. Hoc eſt, ſi pro p, q, b ſcribantur earum æſtimationes illæ, quas è membris Ordinatæ ſecundo, tertio atque quarto, ſingulatim nihilo æquatis elicuimus, et pro Areâ curvæ cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\text{R}^{\lambda-1}$, ſcribatur C, erit

$$\overline{az^{\theta}.\text{R}^{\lambda}+\frac{afg}{f^2-2ge}z^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}+\overline{\frac{2\lambda\eta ge}{f^2-2ge}-\theta-\lambda\eta}\,a\text{A}+\overline{\frac{\theta+\eta+2\ \eta}{2ge-f^2}}\,afg\text{B}}\times\frac{f^2-2ge}{4\lambda\eta age^2-f^2\lambda\eta ae}=\text{C}.$$

Hoc eſt $\frac{\overline{f^2-2ge}\,z^{\theta}.\text{R}^{\lambda}+fgz^{\theta+\eta}\text{R}^{\lambda}+\overline{\overline{\theta+2\lambda\eta}\,2ge-\overline{\theta+\lambda\eta}\,f^2}\,\text{A}-\overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\,fg\text{B}}{\overline{4ge-f^2}\times\lambda\eta e}=\text{C}$. Quali etiam formâ ſymbolum areæ C, ſimili computandi ratione, Stewartus protulit. Symbolum, quod in Hiſtoriâ ſuâ, capite undecimo, (*p.* 85.) Raphſonus poſuit, vitioſum eſt.

Prop. VII. areas A & B, aliasque quæ in progressione sequuntur. Igitur si index λ, perpetuâ unitatum additione vel subductione, augeatur vel minuatur, & ex Areis, quæ Ordinatis sic prodeuntibus respondent, duæ simplicissimæ habentur; dantur aliæ omnes in infinitum. Q. E. O.

CAS. III.

Et per casus hosce duos conjunctos, si tam index θ perpetuâ additione vel subductione ipsius η, quàm index λ perpetuâ additione

Prop. VII. Æquat. Canon.

(d.i) Apertiora quidem sunt hæc, quàm ut explicatione egeant. Illud modò nobis agendum est, ut hujus Propositionis summam formulis quibusdam exponamus ad usum computandi accommodatis.

Hunc igitur in finem, Areæ curvarum quarum Ordinatæ sunt $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$, $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$, $tz^{\theta+4\eta-1}$, $R^{\lambda-1}$, ∗, ∗, ∗, $\pi z^{\theta+\sigma\eta-1}R^{\lambda-1}$, harum inquam Areæ significentur notis pA, qB, rC, sD, tE, ∗, ∗, ∗, πZ. Tum, ope Casûs Primi hujus Propositionis, hæ elicientur Æquationes, quas Canonicas vocare liceat.

Primùm quidem, si quantitas R è duobus constet nominibus

1. $B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA}{\overline{\theta+\lambda\eta}\times f}$. 2. $A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta}\times fB}{\theta e}$.

II. Si R ex tribus constet nominibus.

$$1.\quad C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB}{\overline{\theta+2\lambda\eta}\times g}.$$

$$2.\quad B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gC}{\overline{\theta+\lambda\eta}\times f}.$$

$$3.\quad A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gC}{\theta e}.$$

III. Si R ex quatuor constet nominibus.

$$1.\quad D = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gC}{\overline{\theta+3\lambda\eta}\times h}.$$

$$2.\quad C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD}{\overline{\theta+2\lambda\eta}\,g}.$$

$$3.\quad B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD}{\overline{\theta+\lambda\eta}\,f}.$$

$$4.\quad A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD}{\theta e}.$$

Denique si quantitas R ex tot constet nominibus, quot sint in numero $\sigma + 1$ unitates

$$1.\quad Z = \frac{z^{\theta}R^{\lambda} - \theta eA - \overline{\theta+\lambda\eta}\,fB - \overline{\theta+2\lambda\eta}\,gC - \overline{\theta+3\lambda\eta}\,hD - * - * - * - \overline{\theta+\sigma-1\,\lambda\eta}\,yY}{\overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\,z}.$$

designante

ditione vel ſubductione unitatis, utcunque augeatur vel minuatur, dabuntur areæ ſingulis prodeuntibus ordinatis reſpondentes. Q. E. O. Prop. VII.

C A S. IV.

Et ſimili argumento, ſi Ordinata conſtat ex quatuor nominibus in vinculo radicali, & dantur tres arearum, vel ſi conſtat ex quinque nominibus & dantur quatuor arearum, & ſic deinceps: dabuntur Areæ omnes, quæ, addendo vel ſubducendo numerum η indici θ, vel unitatem indici λ, generari poſſunt. Et par eſt ratio Curvarum ubi Ordinatæ ex binomiis conſlantur, & Area una earum, quæ non ſunt geometricè quadrabiles, datur (dd). Q. E. O.

P R O P.

---

deſignante z denominatoris coefficientem nominis extremi quantitatis R.

$$2.\quad Y = \frac{z^\theta R^\lambda - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta}\, f B - \overline{\theta+2\lambda\eta}\, g C - \overline{\theta+3\lambda\eta}\, h D - * - * - * - \overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\, z Z}{\overline{\theta+\overline{\sigma-1}\,\lambda\eta}\, y}.$$

$$* = *$$
$$* = *$$
$$* = *$$

$$D = \frac{z^\theta R^\lambda - \theta e A - \overline{\theta+\lambda\eta}\, f B - \overline{\theta+2\lambda\eta}\, g C - * - * - * - \overline{\theta+\overline{\sigma-1}\,\lambda\eta}\, y Y - \overline{\theta+\sigma\lambda\eta}\, z Z}{\overline{\theta+3\lambda\eta}\, h}.$$

2. Atque harum formularum ope optimè quidem explicantur ea, quæ de alicujus è coefficientibus hiſce θ, $\theta+\lambda\eta$, $\theta+2\lambda\eta$ defectu Newtonus dixit; ſaltem quæ Newtonum dicentem mihi videor audiviſſe. Primùm enim exiſtente R quantitate trium nominum, θ deficiat. Hoc eſt ponatur $\theta = 0$. Nihilominus ſi detur B, dabitur quidem C per æquationem ſecundæ claſſis primam, quæ, poſito $\theta = 0$, in hanc migraverit: $C = \frac{R^\lambda - \lambda\eta f B}{2\lambda\eta g}$. Si verò detur C, dabitur B per æquationem ſecundæ claſſis ſecundam, quæ poſito $\theta = 0$, in hanc migraverit; $B = \frac{R^\lambda - 2\lambda\eta g C}{\lambda\eta f}$. Ex datis autem duabus B, C invenietur D; et ex datis C, D, invenietur E; eodemque uſque modo progredi licebit, pro θ, illis η, 2η, 3η, 4η, pro C, illis D, E, F, pro B illis, C, D, E, pro A illis, B, C, D, in primam ſecundæ claſſis æquationem ordine ſubſtitutis. Nempe hoc modo, ut exemplis res magis eluceſcat;

$$D = \frac{z^\eta R^\lambda + \eta e B - \overline{\eta+\lambda\eta}\, f C}{\overline{\eta+2\lambda\eta}\, g}.$$

$$E = \frac{z^{2\eta} R^\lambda - 2\eta e C - \overline{2\eta+\lambda\eta}\, f D}{\overline{2\eta+2\lambda\eta}\, g}.$$

$$F = \frac{z^{3\eta} R^\lambda - 3\eta e D - \overline{3\eta+\lambda\eta}\, f E}{\overline{3\eta+2\lambda\eta}\, g}.$$

In hoc igitur caſu dabuntur areæ omnes progreſſionis ejus, quæ, ab illâ A initio ſumpto, infinitè uſque aſcendet. Ipſa autem A, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem poſuimus, illa quidem infinita erit; id quod æquatio ſecundæ claſſis tertia ſatis indicat; quæ, poſito $\theta = 0$, in hanc migraverit. $A = \frac{R^\lambda - \lambda\eta f B - 2\lambda\eta g C}{0}$.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e+fz^{n}+gz^{2n}+$ &c. et $k+lz^{n}+mz^{2n}+$ &c. fcribantur R & S, ut fuprà, & in Curvæ alicujus Ordinatâ $z^{\theta\pm n\sigma}R^{\lambda\pm\tau}S^{\mu\pm\nu}$ maneant quanti-

Progreffionis autem illius, quæ, ab illâ B incipiens, infinitè defcendit, hujus quidem areæ omnes infinitæ erunt. Primùm enim effe A infinitam jam oftendimus. Defignet autem a curvam progreffionis defcendentis ab illâ A proximè inferiorem, five eam, cujus Ordinata eft $z^{\theta-n}R^{\lambda-1}$. Area a, ope tertiæ æquationis fecundæ claffis, invenienda eft; fcribendo, $-n$ pro θ, a pro A, A pro B, B pro C; nempe hoc modo, $a=\dfrac{z^{-n}R^{\lambda}-\overline{\lambda n-n}fA-\overline{2\lambda n-n}gB}{-ne}$. Ubi numerator quantitatis fractæ, propter membrum, $\overline{\lambda n-n}fA$, infinitum, cùm reliqua finita fint, totus quidem infinitus erit. Unde, cùm denominator fit finitus, quantitas ipfa fracta infinita erit. Ergo area a infinita. Simili modo, fi b defignat aream progreffionis defcendentis ab illâ a proximè inferiorem, oftendetur b infinita. Eodemque ufque modo progredi licebit. Omnes igitur hujus progreffionis areæ poft primam B infinitæ erunt.

3. Sed deficiat $\theta+2\lambda n$. Hoc eft, fit $\theta+2\lambda n=0$, exiftente nimirum $\theta=-2\lambda n$. Nihilominus, fi detur A, dabitur B, per æquationem fecundæ claffis fecundam; quæ, pofito $\overline{\theta+2\lambda n}=0$, in hanc migraverit $B=\dfrac{z^{-2\lambda n}R^{\lambda}+2\lambda neA}{-\lambda nf}$. Vel fi detur B, dabitur A per æquationem fecundæ claffis tertiam; quæ, pofito $\theta+2\lambda n=0$, in hanc migraverit: $A=\dfrac{z^{-2\lambda n}R^{\lambda}+\lambda nfB}{-2\lambda ne}$. E duabus autem B, A datis, dabitur a, quæ, in progreffione defcendente, ab illâ A proximè eft inferior; è duabus A, a, dabitur rurfum proximè inferior b; è duabus a, b dabitur c, eodemque ufque modo progredi licebit. Omnes enim a, b, c, d ope tertiæ æquationis fecundæ claffis inveniendæ funt, pro θ, illis $-2\lambda n-n$, $-2\lambda n-2n$, $-2\lambda n-3n$, peo A, illis a, b, c, d, et pro B, illis A, a, b, c, pro C illis B, A, a, b ordine fubftitutis.

In hoc igitur cafu dabuntur areæ omnes progreffionis ejus, quæ, ab illâ B initio fumpto, infinitè defcendit. Ipfa autem C, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem pofuimus, illa quidem infinita erit. Id quod æquatio prima fecundæ claffis fatis indicat; quæ, pofito $\theta+2\lambda n=0$, in hanc migraverit, $C=\dfrac{z^{-2\lambda n}R^{\lambda}+2\lambda neA+\lambda nfB}{0}$.

Ac propterea progreffionis ejus, quæ ab illâ B incipiens, infinitè afcendit, hujus quidem, hoc in cafu, areæ omnes infinitæ erunt. Id enim eâdem plane argumentandi ratione ex æquatione primâ efficietur, quâ in priore cafu ex tertiâ efficiebatur, contrariæ progreffionis areas omnes, poft primam B, infinitas effe.

4. Denique deficiat $\theta+\lambda n$. Hoc eft, fit $\theta+\lambda n=0$, exiftente utique $\theta=-\lambda n$. Jam fi detur A, dabitur quidem C per æquationem fecundæ claffis primam; quæ, pofito $\theta+\lambda n=0$, in hanc migraverit: $C=\dfrac{z^{-\lambda n}R^{\lambda}+\lambda neA}{\lambda ng}$. Vel fi detur C, dabitur A per æquationem fecundæ claffis tertiam; quæ, pofito $\theta+\lambda n=0$, in hanc migraverit: $A=\dfrac{z^{-\lambda n}R^{\lambda}-\lambda ngC}{-\lambda ne}$. Ipfa vero B, cujus, in æquationibus Canonicis, coefficientem nihilo æqualem pofuimus, illa quidem infinita erit. Id quod æquatio fecunda claffis fecundæ fatis indicat; quæ, pofito $\theta+\lambda n=0$, in hanc migraverit: $B=\dfrac{z^{-\lambda n}R^{\lambda}+\lambda neA-\lambda ngC}{0}$.

Utriufque autem progreffionis, tam illius quæ ab illâ B incipiens infinitè afcendit, quàm ejus quæ ab illâ A infinitè defcendit, areæ quidem omnes, illis, A, C exceptis, in hoc cafu infinitæ erunt. Defcendentis enim progeffionis infinitas effe areas omnes poft A, id quidem ex tertiâ æquatione fecundæ claffis efficietur, Afcendentis omnes poft B, id verò, ex primâ; fimili prorfus argumentandi ratione, quâ in primo cafu Defcendentis, in fecundo Afcendentis progreffionis, omnes, poft primam utriufque, infinitæ efficiebantur.

5. In

quantitates datæ θ, η, λ, μ, e, f, g, k, l, m, &c. et pro σ, τ, & υ, ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi dentur Areæ duarum ex curvis, quæ per Ordinatas ſic prodeuntes deſignantur, ſi quanti- PROP. VIII.

5. IN ſummâ ſi ponatur $\theta \pm 0$, datâ ſive A, ſive B, dabuntur areæ omnes progreſſionis inde ab illâ A aſcendentis. Alterius, à B deſcendentis, omnes infinitæ erunt.

Si ponatur $\theta + 2\lambda\eta = 0$, datâ ſive A, ſive B, dabuntur areæ omnes deſcendentis inde ab illâ B progreſſionis. Alterius, à B aſcendentis, omnes infinitæ erunt.

Denique ſi ponatur $\theta + \lambda\eta \pm 0$, ſi duarum A, C detur altera, dabitur altera quoque. Præter illas A, C, omnes utriuſque progreſſionis infinitæ erunt.

Præcisè igitur et breviter loquenti, cujus generis Newtonus nimium amans erat, dicere quodam modo liceat, è datis illis pA, qB omnes in utrâque progreſſione dari. Si quidem unâ illâ inveſtigationis viâ, à Newtono traditâ, quæ omninò æſtimari poſſunt, harum juſtæ invenientur æſtimationes; quarum verò infinitas omnem æſtimationem fugiit, de iis id ipſum duntaxat innoteſcet, infinitas eas eſſe.

6. Cæterùm quæ de curvis trinominalibus diſſeruimus, ea, ſi operæ pretium eſſet, quod vix cenſeo, ad alias facilè transferrentur. Illud verò minimè nobis reticendum eſt, Æquationes Canonicas primæ & ſecundæ claſſis, Stewartum Abredonenſem ante nos protuliſſe.

7. IN ſecundo Propoſitionis hujus caſu, eam ſecutus eſt Newtonus demonſtrandi rationem, quâ nulla certè vel evidentiæ plus vel firmitatis habeat; ad æquationes tamen, ſive Canonicas, ſive pro re natâ, inferendas, minùs, ut videtur, accommodatam; tum propter creſcentem uſque, quo quantitas R plurium fuerit nominum, notarum multitudinem, tum verò maximè propter non ſatis manifeſtam, ex paucis quibuſdam formulis primis, continuationis legem. Nos igitur aliam propoſitionis in hoc caſu demonſtrationem apponemus, Newtonianâ non minùs generalem; quæ per viam planè contrariam, ex datis primùm infimi ordinis, quot opus fuerit, curvarum areis, elatiorum areas pedetentim venari docet; tum, converſis formulis, ab elatioribus ad inferiores deſcenſûs rationem indicat, et Æquationes Canonicas, è Newtonianis ægrè quidem eliciendas, tantùm non ſponte promit. Neque verò noſtra eſt hæc Demonſtratio, ſed Maclaurini. (Vide *Treatiſe of Fluxions by Colin Maclaurin, Edinburgh*, 1742, § 790) PROP. VII. CAS. II. DEMONſ.

SINT Curvæ	A	B	C	D	E
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda-1}$.
Curvæ	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{E}_1$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda}$.
Curvæ	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{C}_2$	$\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{E}_2$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+1}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda+1}$.
Curvæ	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{E}_3$
Quarum Ordinatæ	$z^{\theta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda+2}$.	$z^{\theta+4\eta-1}R^{\lambda+2}$.

Dico primum datâ ſerie infimâ A, B, C, D, E, &c. ſuperiores omnes $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}_1$, &c. $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_2$, &c. $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{E}_3$, uſque dari.

Nam cùm $\mathfrak{A}_1$ area ſit curvæ cujuſdam, cujus abſciſſa eſt z, ordinata $z^{\theta-1}R^{\lambda}$; et cùm fluxio areæ æqualis ſit rectangulo ſub ordinatâ et fluxione abſciſſæ, erit $\dot{\mathfrak{A}}_1 = \underline{z^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda} = z^{\theta-1}\dot{z}RR^{\lambda-1}}$. Hoc eſt, propter $R = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$, $\dot{\mathfrak{A}}_1 = z^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} \times \overline{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +}$, $= ez^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} + fz^{\theta+\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} + gz^{\theta+2\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} + hz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1} +$, Jam verò $ez^{\theta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = e\dot{A}$. $fz^{\theta+\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = f\dot{B}$. $gz^{\theta+2\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = g\dot{C}$. $hz^{\theta+3\eta-1}\dot{z}R^{\lambda-1} = h\dot{D}$.

Quare $\dot{\mathfrak{A}}_1 = e\dot{A} + f\dot{B} + g\dot{C} + h\dot{D} +$,

et $\mathfrak{A}_1 = eA + fB + gC + hD +$,

Simili

PROP. VIII. quantitates R & S ſunt binomia, vel ſi dentur Areæ trium ex curvis, ſi R & S conjunctim ex quinque nominibus conſtant, et ſic deinceps

STRATIO MACLAURINI

Simili modo oſtendetur $\mathcal{B} = e\text{B} + f\text{C} + g\text{D} + h\text{E} +$, $\mathcal{C} = e\text{C} + f\text{D} + g\text{E} + h\text{F} +$, $\mathcal{D} = e\text{D} + f\text{E} + g\text{F} + h\text{G}$, eodemque uſque modo.

Datâ igitur ſerie infimâ A, B, C, D, E, dabitur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, ſeries proximè ſuperior. Eodemque modo, quo hæc ex ſerie infimâ, ex hâc invenietur hâc ipſâ proximè ſuperior. Nimirum $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$. Datâque $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, rurſum ex illâ invenietur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, eodem modo quo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, &c. ex infimâ.

Eodemque modo pedetentim uſque progredi licebit.

Dico præterea ex unâ areâ A, ſi quantitas R duobus tantùm conſtet nominibus, è duabus A, B, ſi tribus, è tribus A, B, C, ſi quatuor; ſemper ex areis infimæ ſeriei unâ paucioribus quàm ſunt nomina quantitatis R, areas omnes progreſſionum omnium uſque dari.

Nam ſi R duorum ſit nominum, datâ A, dabitur B et ſeries tota A, B, C, D, per caſum primum; quare reliquæ omnes dabuntur. Rurſum ſi R trium ſit nominum, datis areis duabus A, B, dabitur tertia C, et ſeries tota A, B, C, D, per caſum primum. Unde ſeries reliquæ dabuntur. Et, quotvis demum nominum ſit quantitas R, viget uſque ſimilis ratiocinatio.

Atque hæc eſt demonſtratio illa cujus fundamenta Vir ſummus Maclaurinus jecit, minùs tamen accuratè eam, quàm nos fecimus, deduxit.

8. JAM verò Æquationes Canonicæ conficientur, ſi in æquationem illam $\mathcal{A} = e\text{A} + f\text{B} + g\text{C} + h\text{D}$, illarum B, C, D, E æſtimationes ſubſtituantur, ex Canonicis primi caſûs petendæ. Nempe, ſi R duobus conſtet nominibus

ÆQUAT. CANON PROP. VII. CAS. II.

$$1.\ \mathcal{A} = e\text{A} + f\text{B} = \frac{\lambda\eta e\text{A} + z^{\theta}\text{R}^{\lambda}}{\theta + \lambda\eta}.$$ (per Canonic. 1^m primæ Claſſis Caſûs prioris)

$$2.\ \text{A} = \frac{\overline{\theta + \lambda\eta}\,\mathcal{A} - z^{\theta}\text{R}^{\lambda}}{\lambda\eta e}.$$

Si R tribus conſtet nominibus,

$$1.\ \mathcal{A} = e\text{A} + f\text{B} + g\text{C} = \frac{2\lambda\eta e\text{A} + \lambda\eta f\text{B} + z^{\theta}\text{R}^{\lambda}}{\theta + 2\lambda\eta}.$$ (Caſ. 1. Claſſ. 2. Can. 1.)

$$2.\ \text{B} = \frac{\overline{\theta + 2\lambda\eta}\,\mathcal{A} - 2\lambda\eta e\text{A} - z^{\theta}\text{R}^{\lambda}}{\lambda\eta f}.$$

$$3.\ \text{A} = \frac{\overline{\theta + 2\lambda\eta}\,\mathcal{A} - \lambda\eta f\text{B} - z^{\theta}\text{R}^{\lambda}}{2\lambda\eta e}.$$

Si R quatuor conſtet nominibus.

$$1.\ \mathcal{A} = e\text{A} + f\text{B} + g\text{C} + h\text{D} = \frac{3\lambda\eta e\text{A} + 2\lambda\eta f\text{B} + \lambda\eta g\text{C} + z^{\theta}\text{R}^{\lambda}}{\theta + 3\lambda\eta}.$$ (Caſ. 1. Claſſ. 3. Can. 1.)

$$2.\ \text{C} = \frac{-z^{\theta}\text{R}^{\lambda} - 3\lambda\eta e\text{A} - 2\lambda\eta f\text{B} + \overline{\theta + 3\lambda\eta}\,\mathcal{A}}{\lambda\eta g}.$$

$$3.\ \text{B} = \frac{-z^{\theta}\text{R}^{\lambda} - 3\lambda\eta e\text{A} - \lambda\eta g\text{C} + \overline{\theta + 3\lambda\eta}\,\mathcal{A}}{2\lambda\eta f}.$$

$$4.\ \text{A} = \frac{-z^{\theta}\text{R}^{\lambda} - 2\lambda\eta f\text{B} - \lambda\eta g\text{C} + \overline{\theta + 3\lambda\eta}\,\mathcal{A}}{3\lambda\eta e}.$$

Denique ſi R tot conſtet nominibus quot ſunt in numero $\sigma + 1$ unitates.

$$1.\ \mathcal{A} = \frac{\sigma\lambda\eta e\text{A} + \overline{\sigma - 1}\,\lambda\eta f\text{B} + \overline{\sigma - 2}\,\lambda\eta g\text{C} + \overline{\sigma - 3}\,\lambda\eta h\text{D} * * * + \lambda\eta y\text{Y} + z^{\theta}\text{R}^{\lambda}}{\theta + \sigma\lambda\eta}.$$ (per Canonicam generalem Caſus prioris)

2. Y =

deinceps in infinitum: dico, quòd dabuntur Areæ curvarum omnium. Prop. VIII.

Demonſtratur ad modum propoſitionis ſuperioris (dd).

P R O P.

$$2.\ \mathrm{Y} = \frac{-z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda} - \sigma\lambda n e\mathrm{A} - \overline{\sigma-1}\,\lambda n f\mathrm{B} - \overline{\sigma-2}\,\lambda n g\mathrm{C} - \overline{\sigma-3}\,\lambda n h\mathrm{D} * * * + \overline{\theta+\sigma\lambda n}\,\mathfrak{A}}{\lambda n y}.$$

$$\mathrm{A} = \frac{-z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda} - \overline{\sigma-1}\,\lambda n f\mathrm{B} - \overline{\sigma-2}\,\lambda n g\mathrm{C} - \overline{\sigma-3}\,\lambda n h\mathrm{D} * * * - \lambda n y\mathrm{Y} + \overline{\theta+\sigma\lambda n}\,\mathfrak{A}}{\sigma\lambda n e}.$$

9. Per has æquationes definiuntur etiam areæ $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, pro θ, illis $\theta+n$, $\theta+2n$, $\theta+3n$, pro illis A, B, C, D, illis, B, C, D, pro λ illis $\lambda+1$, $\lambda+2$, $\lambda+3$, pro A, B, C, D, E, illis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, vel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, vel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, ritè ſubſtitutis. Quæ ſi breviùs fortè dicta ſunt, ex iis tamen apertiſſimè, credo, intelligantur, quæ ad Canonicas prioris caſûs enodatè admodum diſſeruimus.

(dd) DEMONSTRATIO PROPOSITIONIS OCTAVÆ.

CAS. I.

Sunto Curvarum trium Ordinatæ $pz^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, $qz^{\theta+n-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, $rz^{\theta+2n-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, et Areæ $p\mathrm{A}$, $q\mathrm{B}$, $r\mathrm{C}$, exiſtente R quantitate trium nominum, $e+fz^{n}+gz^{2n}$, S duorum, $k+lz^{n}$. Et cùm per Prop. IV. ſit $z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu}$ area curvæ, cujus ordinata eſt $\theta ek + \overline{\overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el}\,z^{n} + \overline{\overline{\theta+2\lambda n}\,gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl}\,z^{2n} + \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,glz^{3n}$ in $z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, ſubduc ordinatas et areas priores de areâ et ordinatâ poſteriore, et manebit $\overline{\theta ek-p} + \overline{\overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el - q}\,z^{n} + \overline{\overline{\theta+2\lambda n}\,gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl - r}\,z^{2n} + \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,glz^{3n} \times z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$ Ordinata novæ Curvæ, et $z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu} - p\mathrm{A} - q\mathrm{B} - r\mathrm{C}$ ejuſdem Area. Et cùm hoc ſemper obtineat, in omni literarum, p, q, r, æſtimatione, ut arearum differentia ſit Area curvæ, cujus Ordinata ordinatarum differentiæ æqualis ſit; obtinebit etiam ſi p, q, r, earum ſumantur magnitudinum, quæ efficiant, ut ordinatarum differentiæ membra tria prima in nihilum ſingulatim abeant. Hoc autem efficietur, ſi ſumatur $p = \theta ek$, $q = \overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el$. $r = \overline{\theta+2\lambda n}\,gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl$. Sumantur igitur p, q, r, iſtarum magnitudinum. Itaque Ordinata evadet $\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,glz^{3n} \times z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, et Area $z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu} - \theta ek\mathrm{A} \substack{-\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el} \mathrm{B} \substack{-\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl} \mathrm{C}$. Divide utramque à $\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl$, et Aream diviſione factam dic D; et, aſſumtâ utcunque s, erit $s\mathrm{D}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $sz^{\theta+3n-1}\mathrm{R}^{n-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$. Et quâ ratione ex areis $p\mathrm{A}$, $q\mathrm{B}$, $r\mathrm{C}$ aream $s\mathrm{D}$ ordinatæ $sz^{\theta+3n-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$ congruentem invenimus, licebit ex areis $q\mathrm{B}$, $r\mathrm{C}$, $s\mathrm{D}$, quartam, puta $t\mathrm{E}$, ordinatæ $tz^{\theta+4n-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$ congruentem invenire; eodemque deinceps uſque modo.

Quòd ſi R, S utraque duorum tantùm nominum fuerit, vel trium utraque, pluriumve, eadem erit demonſtrandi ratio.

Hic eſt caſus Curvarum, in quibus ipſius z index θ augetur vel diminuitur perpetuâ additione, vel ſubductione, quantitatis n. Secundus caſus eſt Curvarum, in quibus index λ vel μ augetur, vel diminuitur, unitatibus.

CAS. II.

Puta indicem λ unitatibus perpetim augeri. Ordinatæ $pz^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu-1}$, $qz^{\theta+n-1}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu-1}$, $rz^{\theta+2n-1}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu-1}$, ſi in R, ſeu $e+fz^{n}+gz^{2n}$, ducantur, ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $\overline{pe+pfz^{n}+pgz^{2n}} \times z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, $\overline{qez^{n}+qfz^{2n}+qgz^{3n}} \times z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, $\overline{rez^{2n}+rfz^{3n}+rfz^{4n}} \times z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$. Et per Prop. IV. eſt $z^{\theta}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $\mathrm{a}+\mathrm{b}z^{n}+\mathrm{c}z^{2n}+\mathrm{d}z^{3n} \times z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$; deſignantibus a, b, c, d, coefficientes è formulâ Propoſitionis IV. deſumendas. Et $bz^{\theta+n}\mathrm{R}^{\lambda}\mathrm{S}^{\mu}$ Area erit curvæ, cujus Ordinata eſt $\grave{\mathrm{a}}bz^{n}+\grave{\mathrm{b}}bz^{2n}+\grave{\mathrm{c}}bz^{3n}+\grave{\mathrm{d}}bz^{4n} \times z^{\theta-1}\mathrm{R}^{\lambda-1}\mathrm{S}^{\mu-1}$, de-ſignantibus

DEMONSTRATIO

ſignantibus notis, $\grave{a}$, $\grave{b}$, $\grave{c}$, $\grave{d}$, coefficientes è formulâ Propoſitionis IV. deſumendas. Et harum quinque arearum ſumma eſt $pA + qB + rC + z^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu} + hz^{\theta+\eta} R^{\lambda} S^{\mu}$, et ſumma ordinatarum

$$\left.\begin{array}{l} a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} \\ \quad + \grave{a}hz^{\eta} + \grave{b}hz^{2\eta} + \grave{c}hz^{3\eta} + \grave{d}hz^{4\eta} \\ + pe + pfz^{\eta} + pgz^{2\eta} \\ \quad + qez^{\eta} + qfz^{2\eta} + qgz^{3\eta} \\ \qquad + rez^{2\eta} + rfz^{3\eta} + rgz^{4\eta} \end{array}\right\} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}.$$

Jam ſi ſummæ ordinataram membra præter tertium omnia nihilo æquentur ſingulatim, nacti erimus quatuor æquationes, ad quatuor illas, h, q, p, r, quæ indefinitè poſitæ ſunt, definiendas. Tum ſi in ſymbolo ſummæ arearum, $pA + qB + rC + z^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu} + hz^{\theta+\eta} R^{\lambda} S^{\mu}$, pro p, q, r, h ponantur earum æſtimationes, quæ ex æquationibus illis quatuor venerint; habebimus Aream Curvæ, cujus Ordinata erit $\overline{c + \grave{b}h + pg + qf + re}\, z^{2\eta} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$. Et utramque, aream dico et ordinatam, ab illâ $\overline{c + \grave{b}h + pg + qf + re}$ dividendo, habebimus Aream curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$. Dicatur illa area F.

Simili ratione, ſi ſummæ ordinatarum membra præter ſecundum omnia nihilo æquentur, invenietur Area Curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$. Dicatur area illa E.

Atque rurſum ſi membra omnia ſummæ ordinatarum præter primum nihilo æquentur, invenietur Area curvæ, cujus Ordinata erit $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$. Dicatur area illa D. Et quâ ratione ex areis tribus A, B, C, inventæ ſunt areæ D, E, F, ex tribus illis D, E, F, inveniri poſſunt tres aliæ G, H, K; eodemque deinceps uſque modo.

A L I T E R.

Et ad computandi uſum magis accommodatè.

SINT Curvæ A, B, C, D

Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$.

Curvæ $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$

Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1} R^{\lambda} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda} S^{\mu-1}$.

Curvæ $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$

Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1} R^{\lambda+1} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda+1} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda+1} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda+1} S^{\mu-1}$.

Curvæ $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{D}_3$

Quarum Ordinatæ $z^{\theta-1} R^{\lambda+2} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda+2} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+2\eta-1} R^{\lambda+2} S^{\mu-1}$. $z^{\theta+3\eta-1} R^{\lambda+2} S^{\mu-1}$.

Et progreſſio infinita ſit.

Dico primùm datâ ſerie infinitâ A, B, C, D, E, ſuperiores omnes uſque dari.
Erit enim $\mathfrak{A}_1 = eA + fB + gC + hD +$,
Erit etiam $\mathfrak{B}_1 = eB + fC + gD + hE +$,
$\mathfrak{C}_1 = eC + fD + gE + hF$,

Et ſimili deinceps uſque modo. Hæc enim ſimili prorſus argumentatione oſtendentur, quâ in ſuperiore propoſitione oſtenſa ſunt. Datâ igitur ſerie infinitâ A, B, C, D, E, dabitur $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$, proximè ſuperior. Tum hâc datâ, dabitur etiam huic proxima, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$, Eodemque modo pedetentim uſque progredi licebit.

Dico præterea è duabus areis A, B, ſi quantitates R, S, duorum utraque ſint nominum, è tribus A, B, C, ſi altera duorum altera trium fuerit, ſemper ex areis infimæ ſeriei binario paucioribus quàm ſunt nomina quantitatum, R, S, ſimul ſumpta, Areas omnes progreſſionum omnium uſque dari.

Nam ſi, R, S, duorum tantùm utraque ſit nominum, datis A, B, dabitur tota ſeries A, B, C, D, per Caſum primum. Quare et reliquæ dabuntur, per ea quæ modò ſunt oſtenſa. Rurſum ſi duarum R, S, altera duorum, altera trium nominum fuerit, datis tribus A, B, C, dabitur ſeries tota prima, per caſum primum. Unde rurſum reliquæ dabuntur. Et quotvis demum nominum quantitatum R, S hæc vel illa fuerit, vigebit uſque ſimilis ratiocinatio.

Eodem modo Propoſitionem approbare licebit, ſi index μ augeatur, vel diminuatur, unitatibus.

CAS.

CAS. III.

Si igitur tam index μ quàm index λ, perpetuâ additione, vel ſubductione, unitatum augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis ſingulatim reſpondentes.

CAS. IV.

Caſum ſecundum cum primo conjungendo, ſi tam index θ, perpetuâ additione vel ſubductione quantitatis n, quam indicum λ vel μ alteruter, perpetuâ additione vel ſubductione unitatis, augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis ſingulatim reſpondentes.

CAS. V.

Et caſum tertium cum primo conjungendo, ſi tam index θ, perpetuâ additione vel ſubductione quantitatis n, quam uterque λ, μ, perpetuâ unitatum additione vel ſubductione, augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ordinatis ſingulatim reſpondentes.

CAS. VI.

Et universè, ſi dentur Areæ duabus pauciores quàm ſunt nomina quantitatum R, S ſimul ſumpta, dabuntur omnes. Nam quotcunque nominum illæ R, S, fuerint, eadem erit demonſtrandi ratio, ſicut jam antè in caſu primo monuimus.

2. Reſtat ut æquationes Canonicas deſcribamus.

CANONICÆ PRIMI CASUS.

I. Si, quantitates R, S utraque è duobus conſtent nominibus

$$1.\ C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek\,A \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B}{\theta+\lambda n+\mu n\,fl}$$

$$2.\ B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek\,A - \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl\,C}{\overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el}$$

$$3.\ A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B - \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl\,C}{\theta ek}$$

II. Si R ex tribus conſtet nominibus, S è duobus.

$$1.\ D = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ck\,A \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \end{array} C}{\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl}$$

$$2.\ C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek\,A \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B - \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl\,D}{\overline{\theta+2\lambda n}\,gk + \overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl}$$

$$3.\ B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} - \theta ek A \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \end{array} C - \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl\,D}{\overline{\theta+\lambda n}\,fk + \overline{\theta+\mu n}\,el}$$

$$4.\ A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu} \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \end{array} C - \overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl\,D}{\theta ck}$$

III. Si R, S ex tribus utraque conſtet nominibus

Prop. IX.

PROP. IX. THEOR. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter ſe quarum Ordinatæ ſunt reciprocè ut fluxiones abſciſſarum(ee).

Nam contenta ſub ordinatis & fluxionibus Abſciſſarum erunt æqualia; & fluxiones arearum ſunt ut hæc contenta.

COROL. I.

Si aſſumatur relatio quævis inter abſciſſas duarum curvarum, & inde per Prop. 1. quæratur relatio fluxionum abſciſſarum, & ponantur Ordinatæ reciprocè proportionales fluxionibus, inveniri poſſunt innumeræ Curvæ, quarum Areæ ſibi mutuò æquales erunt (ff).

COROL. II.

Sic enim curva omnis, cujus hæc eſt ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\ \&c.}|^{\lambda}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo

Æquat. Canon. Prop. VIII. Cas. I.

$$1.\ E = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek A \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \\ -\overline{\theta+\mu n}\,em \end{array} C \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \\ -\overline{\theta+\lambda n+2\mu n}\,fm \end{array} D}{\overline{\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm}$$

$$2.\ D = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ck\, A \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \\ -\overline{\theta+2\mu n}\,em \end{array} C \ -\overline{\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm\ E}{\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl+\overline{\theta+\lambda n+2\mu n}\,fm}$$

$$3.\ C = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek\, A \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \\ -\overline{\theta+\lambda n+2\mu n}\,fm \end{array} D \ -\overline{\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm\ E}{\overline{\theta+2\lambda n}\,gk+\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl+\overline{\theta+2\mu n}\,em}$$

$$4.\ B = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} - \theta ek\, A \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \\ -\overline{\theta+2\mu n}\,em \end{array} C \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \\ -\overline{\theta+\lambda n+2\mu n}\,fm \end{array} D \ -\overline{\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm\ E}{\overline{\theta+\lambda n}\,fk+\overline{\theta+\mu n}\,el}$$

$$5.\ A = \frac{z^{\theta}R^{\lambda}s^{\mu} \begin{array}{l} -\overline{\theta+\lambda n}\,fk \\ -\overline{\theta+\mu n}\,el \end{array} B \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n}\,gk \\ -\overline{\theta+\lambda n+\mu n}\,fl \\ -\overline{\theta+2\mu n}\,em \end{array} C \begin{array}{l} -\overline{\theta+2\lambda n+\mu n}\,gl \\ -\overline{\theta+\lambda n+2\mu n}\,fm \end{array} D \ -\overline{\theta+2\lambda n+2\mu n}\,gm\ E}{\theta ek}$$

ponendo $\frac{\eta}{\nu}=s$, & $z^{s}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$ (gg). Prop. IX. Cor. III & IV.

COROL. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.}$ $\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{\eta}{\nu}=s$, & $z^{s}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$.

COROL. IV.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.}|$ $\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}|^{\mu}$, aſſumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{\nu}{\eta}=s$, & $z^{s}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.}$ $\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\&c}|^{\mu}$.

IV. Si R ex quatuor conſtet nominibus, S ex duobus.

$$1.\ E=\frac{\begin{array}{c}z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}-\overline{\theta+\lambda\eta}|fk\\ -\overline{\theta+\mu\eta}|el\end{array}\ B\ \begin{array}{c}-\overline{\theta+2\lambda\eta}|gk\\ -\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}|fl\end{array}\ C\ \begin{array}{c}-\overline{\theta+3\lambda\eta}|hk\\ -\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}|gl\end{array}\ D}{\overline{\theta+3\lambda\eta+\mu\eta}|hl}$$

(ee) Dummodo ſimul à nihilo generari inceperint. Aliter enim altera alterâ dato major erit (Geometr. Flux. Prop. II.) Arearum autem partes ſimul genitæ vel ſic etiam æquales erunt.

(ff) Vide Geometr. Analyt. Prop. VIII.

(gg) PONATUR enim $z^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+}|^{\lambda},=y$, et ſit v Ordinata, x Abſciſſa curvæ cujuſdam, cujus Area areæ alterius, cujus Ordinata ſit y Abſciſſa z, ſemper ſit æqualis. Abſciſſarum igitur fluxiones inverſas Ordinatarum inter ſe proportiones gerunt (ex hâc Prop.) Hoc eſt $\dot{z}:\dot{x}=v:y$. Sed propter $z^{s}=x$, erit $\dot{x}=sz^{s-1}\dot{z}$. Quare $v:y=\dot{z}:sz^{s-1}\dot{z}=1:sz^{s-1}$. Quare $v=\frac{y}{sz^{s-1}}=\frac{1}{s}z^{\theta-s}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+,}|^{\lambda}$. Sed propter $\frac{\eta}{\nu}=s$, erit $\frac{1}{s}=\frac{\nu}{\eta}$. Et propter $z^{s}=x$, erit $z=x^{\frac{1}{s}}$, et $z^{\theta}=x^{\frac{\theta}{s}}=x^{\frac{\nu\theta}{\eta}}$, et $z^{\theta-s}=x^{\frac{\nu\theta}{\eta}-1}=x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}$. Et $z^{\eta}=x^{\frac{\eta}{s}}=x^{\nu}$. Ergo $z^{2\eta}=x^{2\nu}$; $z^{3\eta}=x^{3\nu}$; * * *; $z^{m\eta}=x^{m\nu}$. Quare $\frac{1}{s}z^{\theta-s}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+,}|^{\lambda}=v=\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+,}|^{\lambda}$. Q. E. D. Demonſtratio Cor. II.

Similem hujus Corollarii demonſtrationem in commentariis ſuis Stewartus attulit.

COROL.

Prop. IX. Cor.V.&VI.

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}\big|^{\lambda}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{1}{x^{\theta+1}}\times\overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}\big|^{\lambda}$: id eſt $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda}}\times\overline{f+ex^{n}}\big|^{\lambda}$, ſi duo ſunt nomina in vinculo radicis: vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda}}\times\overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}\big|^{\lambda}$, ſi tria ſunt nomina; & ſic deinceps.

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}\big|^{\lambda}\times\overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}\big|^{\mu}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{1}{x^{\theta+1}}\times\overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}\big|^{\lambda}\times\overline{k+lz^{-n}+mx^{-2n}+\&c}\big|^{\mu}$: id eſt $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda+n\mu}}\times\overline{f+ex^{n}}\big|^{\lambda}\times\overline{l+kx^{n}}\big|^{\mu}$, ſi bina ſunt nomina in vinculis radicum: vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda+n\mu}}\times\overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}\big|^{\lambda}\times\overline{l+kx}\big|^{\mu}$, ſi tria ſunt nomina in vinculo radicis prioris, ac duo in vinculo poſterioris: & ſic in aliis.

Et

Demonstratio Cor. VII.

(l.h) Editionem principem cum Stewarto ſequor. Editio Joneſii habuit $\frac{n-\delta}{\alpha\delta-\beta n}$. Vitioſè.

(ii) Hujus Corollarii hanc ferè demonſtrationem Stewartus attulit.

Hæ ſunt æquationes à Newtono poſitæ, præter illam ad curvam ſcilicet cujus abſciſſa z, ordinata y.

1. $s=\frac{n-\delta}{n}$. 2. $x=\frac{1}{s}z^{s}$. 3. $\lambda=\frac{n-\delta}{\alpha\delta+\beta n}$.

Ex quibus has alias deducere licet.

1. $s^{\frac{1}{s}}x^{\frac{1}{s}}=z$. 2. $s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}}=z^{\beta}$. 3. $s^{\frac{\delta}{s}}x^{\frac{\delta}{s}}=z^{\delta}$ (ex ſecundâ poſitarum). 4. $n-ns=\delta$ (ex primâ poſitarum). 5. $\frac{s}{\frac{1}{n}\alpha\delta+\beta}=\lambda$ (per primam et tertiam poſitarum). 6. $\frac{\alpha+\beta-s\alpha}{s}=\frac{1}{\lambda}$ (per 4m & 5m deductarum).

Jam cùm Area curvæ cujus Abſciſſa eſt z Ordinata y, alterius areæ ſit æqualis, cujus Abſciſſa x, Ordinata v, idcircò abſciſſarum Fluxiones inverſas ordinatarum inter ſe proportiones gerent. Hoc eſt, erit $\dot{z}:\dot{x}=v:y$. Sed, per æquationem poſitarum ſecundam, $\dot{z}:\dot{x}=1:z^{s-1}$. Ergo $v:y=1:z^{s-1}=z:z^{s}$. Sed $z:z^{s}=s^{\frac{1}{s}}x^{\frac{1}{s}}:sx$ (per æquationes deductarum primam et poſitarum ſecundam). Ergo $v:y=s^{\frac{1}{s}}x^{\frac{1}{s}}:sx$. Hinc æquationes aliæ venient. Nempe, 7. $y=$

$s^{\frac{s-1}{s}}$

Et nota, quòd Areæ duæ æquales, in noviſſimis hiſce duobus Corollariis, jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si area in alterutrâ Curvâ adjacet abſciſſæ, area huic æqualis, in alterâ Curvâ, adjacet abſciſſæ productæ. Prop. IX. Cor. VII. & VIII.

C O R O L. VII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam, y, & Abſciſſam z, definiatur per æquationem quamvis affectam hujus formæ, $y^\alpha \times \overline{e+fy^\eta z^\delta+gy^{2\eta}z^{2\delta}+hy^{3\eta}z^{3\delta}+\&c.} = z^\beta \times \overline{k+ly^\eta z^\delta+my^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.}$ hæc figura, aſſumendo $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$, $x=\frac{1}{s}z^s$, & $\lambda=\frac{\eta-\delta}{\alpha\delta+\beta\eta}$ [hh], migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa x, ex datâ Ordinatâ v, determinatur per æquationem non affectam; $\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda}\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+\&c.}\rfloor^{\lambda} \times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+\&c.}\rfloor^{-\lambda}=x$ [ii].

C O R O L. VIII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam, y, & Abſciſſam, z, definitur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^\alpha\times\overline{e+fy^\eta z^\delta+gy^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.} = z^\beta\times\overline{k+ly^\eta z^\delta+my^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.}$$
$$+\,z^\gamma\times\overline{p+qy^\eta z^\delta+ry^{2\eta}z^{2\delta}+\&c.}$$

hæc figura, aſſumendo $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$, $x=\frac{1}{s}z^s$, $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta\eta}{\eta-\delta}$, & $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma\eta}{\eta-\delta}$,

$s^{\frac{s-1}{s}}x^{\frac{s-1}{s}}v$. 8. $y^\alpha = s^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}v^\alpha$. 9. $y^\eta = s^{\frac{s\eta-\eta}{s}}x^{\frac{s\eta-\eta}{s}}v$. Cæterùm $\frac{s\eta-\eta}{s}=-\frac{\delta}{s}$ (per æquationem deductarum quartam.) Unde noviſſima in hanc migrabit. 10. $y^\eta = s^{-\frac{\delta}{s}}x^{-\frac{\delta}{s}}v^\eta$. Ex hâc autem et tertiâ deductarum efficietur, 11. $y^\eta z^\delta = v^\eta$. Ac propterea $y^{2\eta}z^{2\delta}=v^{2\eta}$. $y^{3\eta}z^{3\delta}=v^{3\eta}$. $y^{4\eta}z^{4\delta}=v^{4\eta}$, eodemque uſque modo. Jam in æquationem ad curvam, cujus abſciſſa z, ordinata y, in hujus inquam æquationem à Newtono poſitam, pro z^β, y^α, $y^\eta z^\delta$, ſubſtituantur earum æſtimationes, æquationibus deductarum 2ª. 8ª. et 11ª expoſitæ; et æquatio illa in hanc tranſmutabitur. $s^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}v^\alpha\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,} = s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}}\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+nv^{3\eta}+}\rfloor$. Utramque hujus æquationis partem dividat quantitas, $x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}\times s^{\frac{\beta}{s}}\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+}\rfloor$. Fiet $s^{\frac{s\alpha-\alpha-\beta}{s}}v^\alpha\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,}\rfloor\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+}\rfloor^{-1}=x^{\frac{\beta+\alpha-s\alpha}{s}}$. Hoc eſt, per æquationem deductarum 6m. $s^{-\frac{1}{\lambda}}v^\alpha\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+,}\rfloor\times\overline{+lv^\eta+mv^{2\eta}+}\rfloor^{-1}=x^{\frac{1}{\lambda}}$. Hujus denique pars utraque evehatur ad gradum illum cujus index quantitas λ; fiet $\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda}\times\overline{e+fv^\eta+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+}\rfloor^{\lambda}\times\overline{k+lv^\eta+mv^{2\eta}+,}\rfloor^{-\lambda}=x$. Q. E. D. Demonstratio Cor. VII.

Prop. IX. Cor. IX.

migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa, x, ex datâ Ordinatâ, v, determinatur per æquationem minùs affectam;

$$v^{\alpha}\times\overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+\&c.}=s^{\mu}x^{\mu}\times\overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+\&c.}$$
$$+\,s^{\nu}x^{\nu}\times\overline{p+qv^{n}+rv^{2n}+\&c}\ \text{(kk)}.$$

COROL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata eſt $\pi z^{\theta-1}\times\overline{\nu e+\overline{\nu+\eta}fz^{n}+\overline{\nu+2\eta}gz^{2n}+\&c.}$ $\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}\Big|^{\lambda-1}$ in $\overline{a+b\times\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+n}+gz^{\nu+2n}+\&c.}\Big|^{\tau}}\Big|^{\omega}$, ſi ſit $\theta=\lambda\nu$, & aſſumantur $x=\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+n}+gz^{\nu+2n}+\&c.}\Big|^{\pi}$, $\sigma=\frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta=\frac{\lambda-\pi}{\pi}$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}\Big|^{\omega}$ (ll). Et nota, quòd Ordinata prior in hoc corollario evadit ſimplicior, ponendo $\lambda=1$, vel ponendo $\tau=1$; & efficiendo, ut radix dignitatis

Demonstratio Cor. VIII.

(kk) Hujus Corollarii veritatem cum Stewarto ſic oſtendimus.

Hæ ſunt æquationes à Newtono poſitæ, præter illam ad Curvam ſcilicet cujus abſciſſa z, ordinata y. 1. $s=\frac{\eta-\delta}{\eta}$. 2. $x=\frac{1}{s}z^{s}$. 3. $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta\eta}{\eta-\delta}$. 4. $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma\eta}{\eta-\delta}$. Quarum duæ primæ eædem ſunt ac duæ primæ poſitarum corollarii ſuperioris. Cæterùm quatuor illarum z, x, v, y eadem erit in hoc, atque in illo fuit, proportionis convenientia. Quare deductæ etiam Corollarii ſuperioris, quarum ope æquationis ad Curvam tranſmutationes efficiebantur, hæ inquam omnes, præter quintam et ſextam, in hoc etiam obtinebunt. Utpote quæ omnes, præter illas, duabus poſitarum primis, & analogiâ illâ nituntur, quam analogiam huic cum illo communem diximus. Loco autem 5^{tæ} & 6^{tæ} corollarii ſuperioris, venient $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\delta+\beta}=\frac{1}{\mu}$ (ex primâ et tertiâ poſitarum) et $\frac{\alpha+\beta-\alpha s}{s}=\mu$ (è noviſſimâ, et quartâ deductarum Corollarii ſuperioris).

Ex primâ autem et quartâ poſitarum elicietur $\frac{s}{\frac{1}{\eta}\alpha\delta+\gamma}=\frac{1}{\nu}$: et ex hâc et quartâ deductarum Corollarii ſuperioris, $\frac{\alpha+\gamma-\alpha s}{s}=\nu$. Præterea ex ſecundâ poſitarum elicietur, $z^{\gamma}=s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}$. Jam in æquationem ad curvam cujus abſciſſa z, ordinata y, in hujus inquam æquationem à Newtono poſitam, pro y^{α}, z^{β}, $y^{\eta}z^{\delta}$ ſubſtituantur earum æſtimationes æquationibus deductarum ſuperioris 2^{a}. 8^{a}. et 11^{a}. expoſitæ; et pro z^{γ} ſubſtituatur $s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}$; et æquatio illa in hanc tranſmutabitur; $s^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}v^{\alpha}\times\overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+hv^{3n}+,}=s^{\frac{\beta}{s}}x^{\frac{\beta}{s}}\times\overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+,}+s^{\frac{\gamma}{s}}x^{\frac{\gamma}{s}}\times\overline{p+qv^{n}+rv^{2n}+}$. Hujus pars utraque à quantitate $s^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}x^{\frac{s\alpha-\alpha}{s}}$ dividatur; fiet $v^{\alpha}\times$

$$\overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+hv^{3n}+,}=s^{\frac{\alpha+\beta-s\alpha}{s}}x^{\frac{\alpha+\beta-s\alpha}{s}}\times\overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+,}$$
$$+\,s^{\frac{\alpha+\gamma-s\alpha}{s}}x^{\frac{\alpha+\gamma-s\alpha}{s}}\times\overline{p+qv^{n}+rv^{2n}+,}$$

Unde pro illis $\frac{\alpha+\beta-s\alpha}{s}$, $\frac{\alpha+\gamma-s\alpha}{s}$ ſcriptis μ, ν, veniet tandem æquatio quantitatum v, x, ab ipſo Newtono poſita. Q. E. D.

I

(ll) Osten-

tatis extrahi poffit, cujus index eft ω; vel etiam ponendo $\omega = -1$, Prop. IX. Cor. X.
& $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$, ut alios cafus prætereram.

C O R O L. X.

Pro $ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \&c.$ $\nu ez^{\nu-1} + \overline{\nu+\eta} fz^{\nu+\eta-1} + \overline{\nu+2\eta} gz^{\nu+2\eta-1} + \&c.$ $k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \&c.$ et $\eta lz^{\eta-1} + 2\eta mz^{2\eta-1} + \&c.$ fcribantur R, r, S, & s refpectivè; & Curva omnis cujus Ordinata eft $\overline{\pi S r + \phi R s} \times R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \times \overline{aS^{-\nu} + bR^{\tau}}|^{\omega}$ (mm), fi fit $\frac{\mu - \nu\omega}{\lambda} = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$, $\frac{\lambda - \pi}{\pi} = \vartheta$, & $R^{\pi} S^{\phi} = x$; migrat in aliam fibi æqualem, cujus Ordinata eft $x^{\vartheta} \times \overline{a + bx^{\sigma}}|^{\omega}$. (nn) Et nota, quòd Ordinata prior evadit fimplicior, ponendo unitates

pro

(ll) Ostendimus quod Newtonus dicit hoc modo. Demonstratio Cor. IX.

Hæ funt æquationes à Newtono pofitæ 1. $\theta = \lambda\nu$. 2. $x = \overline{ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} +,}|^{\pi}$. 3. $\sigma = \frac{\tau}{\pi}$. 4. $\vartheta = \frac{\lambda - \pi}{\pi}$. Ponantur præterea, 5. $\overline{\nu e + \overline{\nu+\eta} fz^{\eta} + \overline{\nu+2\eta} gz^{2\eta} +,} = R$. 6. $\overline{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} +,} = S$. 7. $\overline{ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} +} = \Sigma$. 8. $\overline{\nu ez^{\nu-1} + \overline{\nu+\eta} fz^{\nu+\eta-1} + \overline{\nu+2\eta} gz^{\nu+2\eta-1} +,} = \Gamma$.

Ex his æquationibus hæ aliæ deducentur.

1. $x = \Sigma^{\pi}$ (ex 2ª & 7ª pofitarum) Ergo 2. $\frac{\dot{x}}{\pi\Sigma^{\pi-1}} = \dot{\Sigma}$. 3. $\dot{\Sigma} = \Gamma\dot{z}$ (per 7ᵐ et 8ᵐ pofitarum) 4. $S = \frac{\Sigma}{z^{\nu}}$ (ex fextâ et feptimâ pofitarum). Ex hâc autem, et eâ quæ primùm deducebatur, veniet 5. $S = x^{\frac{1}{\pi}} z^{-\nu}$.

Datæ autem curvæ Ordinata fignificabitur hoc fymbolo; $\pi z^{\vartheta-1} \times R \times S^{\lambda-1} \times \overline{a + b\Sigma^{\tau}}|^{\omega}$.

Curvæ tranfmutatæ, cujus abfciffa x, Ordinata defignetur literâ O.

Erit igitur $\dot{x} : \dot{z} = \pi z^{\zeta-1} \times R \times S^{\lambda-1} \times \overline{a + b\Sigma^{\tau}}|^{\nu} : O$. Sed (per æquationes 2ᵐ & 3ᵐ deductarum) efficitur $\dot{x} : \dot{z} = \Gamma : \frac{1}{\pi\Sigma^{\pi-1}}$. Ergo $\pi z^{\theta-1} \times R \times S^{\lambda-1} \times \overline{a + b\Sigma^{\tau}}|^{\omega} : O = \Gamma : \frac{1}{\pi\Sigma^{\pi-1}}$. Ergo $O = \frac{z^{\theta-1} \times R}{\Gamma} \times \frac{S^{\lambda-1}}{\Sigma^{\pi-1}} \times \overline{a + b\Sigma^{\tau}}|^{\nu}$. Sed (per æquationem deductarum quintam) $S^{\lambda-1} = x^{\frac{\lambda-1}{\pi}} z^{\nu-\lambda\nu}$. Et (per æquationem deductarum primam) $\Sigma^{\pi-1} = x^{\frac{\pi-1}{\pi}}$. Quare $\frac{S^{\lambda-1}}{\Sigma^{\pi-1}} = x^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}} z^{\nu-\lambda\nu} = x^{\vartheta} z^{\nu-\theta}$ (per æquationes pofitarum 4ᵐ & 1ᵐ). Hinc $O = \frac{z^{\nu-1} x^{\vartheta} \times R}{\Gamma} \times \overline{a + b\Sigma^{\tau}}|^{\nu}$. Sed $z^{\nu-1} \times R = \Gamma$ (per æquationes quintam et octavam pofitarum). Ergo $O = \frac{x^{\vartheta} \times \Gamma}{\Gamma} \times \overline{a + b\Sigma^{\tau}}|^{\nu} = x^{\vartheta} \times \overline{a + b\Sigma^{\tau}}|^{\nu}$. Sed $\Sigma^{\tau} = x^{\frac{\tau}{\pi}}$ (per æquationem deductarum primam) $= x^{\sigma}$ (per æquationem pofitarum tertiam). Ergo $O = x^{\vartheta} \times \overline{a + bx^{\sigma}}|^{\nu}$. Q. E. D.

(mm) Stewarti emendationem fequor. Editiones ipfius priores habuere $\overline{aS^{\nu} + bR^{\tau}}|^{\omega}$; vitiosè.

(nn) Hujus Corollarii veritatem cum Stewarto fic oftendimus.
Hæ funt æquationes à Newtono pofitæ.
1. $\overline{ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta}} +, = R$.

2.

Prop. X. pro τ, υ, & λ vel μ, & faciendo, ut radix dignitatis extrahi poſſit, cujus index eſt ω; vel ponendo $\omega = -1$, vel $\mu = 0$.

PROP. X. PROB. III.

Invenire figuras ſimpliciſſimas, cum quibus Curva quævis geometricè comparari poteſt, cujus Ordinatim applicata, y, per æquationem non affectam ex datâ Abſciſſâ, z, determinatur.

CAS. I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta} az^{\theta}$, ut ex Prop. v. ponendo $b=0=c=d=f=g=h$, & $e=1$, facilè colligitur.

CAS. II.

Sit Ordinata $az^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$; et ſi Curva cum figuris rectilineis geometricè comparari poteſt, quadrabitur per Prop. v. ponendo $b=0=c=d$. Sin minùs, convertetur in aliam curvam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{a}{\eta} x^{\frac{\theta-\eta}{\eta}} \times \overline{e+fx+gx^2+\&c.}|^{\lambda-1}$ per Corol. 2. Prop. IX. Deinde ſi de dignitatum indicibus $\frac{\theta-\eta}{\eta}$ & $\lambda-1$ (per Prop. VII.) rejiciantur unitates, donec dignitates illæ fiant quàm minimæ, devenietur ad figuras ſimpliciſſimas, quæ hâc ratione colligi poſſunt. Dein harum unaquæque, per Corol. 5.

Demonstratio. 2. $\overline{\nu e z^{\nu-1} + \overline{\nu+\eta} f z^{\nu+\eta-1} + \overline{\nu+2\eta} g z^{\nu+2\eta-1} +}| = r$. 3. $\overline{k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} +}| = s$. 4. $\overline{\eta l z^{\eta-1} + 2\eta m z^{2\eta-1} +,}| = s$. 5. $\frac{\mu-\nu\omega}{\lambda} = \frac{\upsilon}{\tau} = \frac{\phi}{\pi}$. 6. $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$. 7. $\frac{\lambda-\pi}{\pi} = \vartheta$. 8. $R^{\pi} S^{\phi} = x$.

Ex his autem hæ aliæ deducentur. 1. $\dot{R} = r\dot{z}$. 2. $\dot{S} = s\dot{z}$. 3. $\pi R^{\pi-1} S^{\phi} \dot{R} + \phi R^{\pi} S^{\phi-1} \dot{S} = \dot{x}$. Et ex his tribus veniet. 4. $\overline{r\pi R^{\pi-1} S^{\phi} + s\phi R^{\pi} S^{\phi-1}}| \times \dot{z} = \dot{x}$.

Jam Curvæ tranſmutatæ, cujus abſciſſa x, hujus Ordinata deſignetur literâ O. Et cùm Curvæ datæ cujus abſciſſa z, ordinata ſit $\overline{\pi S r + \phi R s} \times R^{\lambda-1} \times S^{\mu-1} \times \overline{a S^{-\upsilon} + b R^{\tau}}|^{\omega}$, ſive $r\pi S^{\mu} R^{\lambda-1} + s\phi R^{\lambda} S^{\mu-1} \times \overline{a S^{-\upsilon} + b R}|^{\omega}$; erit $\dot{x} : \dot{z} = \overline{r\pi S^{\mu} R^{\lambda-1} + s\phi R^{\lambda} S^{\mu-1}}| \times \overline{a S^{-\upsilon} + b R^{\tau}}|^{\omega} : O$. Sed $\dot{x} : \dot{z} = r\pi R^{\pi-1} S^{\phi} + s\phi R^{\pi} S^{\phi-1} : 1$ (per æquationem deductarum quartam). Quare $r\pi R^{\pi-1} S^{\phi} + s\phi R^{\pi} S^{\phi-1} : 1 = r\pi S^{\mu} R^{\lambda-1} + s\phi R^{\lambda} S^{\mu-1} \times \overline{a S^{-\upsilon} + b R^{\tau}}|^{\omega} : O$.

Unde $O = \frac{r\pi S^{\mu} R^{\lambda-1} + s\phi R^{\lambda} S^{\mu-1}}{r\pi R^{\pi-1} S^{\phi} + s\phi R^{\pi} S^{\phi-1}} \times \overline{a S^{-\upsilon} + b R}|^{\omega}$. Quantitatis autem fractæ denominator numeratorem algebraicè metitur, et quantitas diviſione facta erit $R^{\lambda-\pi} . S^{\mu-\phi}$. Quare $O = R^{\lambda-\pi} S^{\mu-\phi}$

$\times$

5. Prop. IX. dat aliam, quæ nonnunquam simplicior est. Et ex Prop. X. his, per Prop. III. & Corol. 9 & 10. Prop. IX. inter se collatis, figuræ adhuc simpliciores quandoque prodeunt. Denique ex figuris simplicissimis assumptis, facto regressu, computabitur Area quæsita.

CAS. III.

Sit Ordinata $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$, & hæc figura, si quadrari potest, quadrabitur per Prop. V. Sin minùs, distinguenda est Ordinata in partes, $z^{\theta-1}\times a\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$, $z^{\theta-1}\times bz^{n}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$; &c. et per Cas. II. inveniendæ sunt figuræ simplicissimæ, cum quibus figuræ, partibus illis respondentes, comparari possunt.

Nam Areæ figurarum, partibus illis respondentium, sub signis suis + & − conjunctæ, component Aream totam quæsitam.

CAS. IV.

Sit Ordinata $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1}$ in $\overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c}|^{\mu-1}$; et si curva quadrari potest, quadrabitur per Prop. VI. Sin minùs, convertetur in simpliciorem, per Corol. 4. Prop. IX. ac inde comparabitur cum figuris simplicissimis, per Prop. VIII. et Corol. 6, 9 & 10. Prop. IX. ut fit in Casu 2. & 3.

$\times\overline{as^{-\upsilon}+bR^{\tau}}|^{\omega}$. Sed $R^{\tau}=x^{\frac{\tau}{\pi}}\times\Sigma^{-\frac{\phi\tau}{\pi}}$ (per æquationem positarum octavam). Et $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$ Cor. X. (per sextam positarum) et $\frac{\phi\tau}{\pi}=\upsilon$ (per quintam positarum). Quare $R^{\tau}=x^{\sigma}\times\Sigma^{-\upsilon}$. Et $O=R^{\lambda-\pi}S^{\mu-\phi}\times\overline{as^{-\upsilon}+bx^{\sigma}\times S^{-\upsilon}}|^{\omega}=R^{\lambda-\pi}S^{\mu-\phi-\upsilon\omega}\times\overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Sed $\mu-\upsilon\omega=\frac{\lambda\phi}{\pi}$ (per æquationem positarum quintam). Quare $\mu-\phi-\upsilon\omega=\frac{\lambda\phi-\pi\phi}{\pi}$. Et $\frac{\lambda\phi-\pi\phi}{\pi}=\phi\vartheta$ (per æquationem positarum septimam). Ergo $O=R^{\lambda-\pi}\Sigma^{\phi\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Sed $R^{\lambda-\pi}=R^{\pi\vartheta}$ (per æquationem positarum septimam). Et $R^{\pi\vartheta}=\frac{x^{\vartheta}}{\Sigma^{\phi\vartheta}}$ (per octavam positarum). Quare $R^{\lambda-\pi}\Sigma^{\phi\vartheta}=\frac{x^{\vartheta}\times\Sigma^{\phi\vartheta}}{\Sigma^{\phi\vartheta}}=x^{\vartheta}$. Et $O\ (=R^{\lambda-\pi}\Sigma^{\phi\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega})=x^{\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Q. E. D.

Unum moneo, quod tamen levissimum est; editiones hâc nostrâ priores pro r, s, habuisse $\dot{r}$, $\dot{s}$, errore ut videtur ab editione principe in omnes posteriores propagato.

C A S.

Prob. X. Cor. I. II. & III.

CAS. V.

Si Ordinata ex variis partibus conſtat, partes ſingulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ ſunt, & Curvæ illæ, quotquot quadrari poſſunt, ſigillatim quadrandæ ſunt; earumque Ordinatæ de Ordinatâ totâ demendæ. Dein Curva, quam Ordinatæ pars reſidua deſignat, ſeorſim (ut in Caſu 2, 3 & 4.) cum figuris ſimpliciſſimis comparanda eſt, cum quibus comparari poteſt. Et ſumma Arearum omnium pro Areâ curvæ propoſitæ habenda eſt.

COROL. I.

Hinc etiam Curva omnis, cujus Ordinata eſt radix quadratica affecta æquationis ſuæ, cum figuris ſimpliciſſimis, ſeu rectilineis ſeu curvilineis, comparari poteſt. Nam radix illa ex duabus partibus ſemper conſtat, quæ ſeorſim ſpectatæ non ſunt æquationum radices affectæ.

Proponatur æquatio $a^2y^2+z^2y^2=2a^3y+2z^3y-z^4$, & extracta radix erit $y=\frac{a^3+z^3+a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$; cujus pars rationalis, $\frac{a^3+z^3}{aa+zz}$, & pars irrationalis, $\frac{a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$, ſunt Ordinatæ curvarum, quæ, per hanc propoſitionem, vel quadrari poſſunt, vel cum figuris ſimpliciſſimis comparari, cum quibus collationem geometricam admittunt.

COROL. II.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur, quæ per Corol. 7. Prop. IX. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc propoſitionem, ſi quadrari poteſt, vel comparatur cum figuris ſimpliciſſimis, cum quibus comparari poteſt. Et hâc ratione curva omnis quadratur, cujus æquatio eſt trium terminorum. Nam æquatio illa, ſi affecta ſit, tranſmutatur in non affectam per Corol. 7. Prop. IX ac deinde per Corol. 2 & 5. Prop. IX. in ſimpliciſſimam migrando, dat vel quadraturam figuræ, ſi quadrari poteſt, vel curvam ſimpliciſſimam quâcum comparatur.

COROL. III.

Et curva omnis, cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam

fectam definitur, quæ per Corol. 8. Prop. IX. in æquationem quadraticam affectam migrat; vel quadratur per hanc propositionem & hujus Corol. 1. si quadrari potest, vel comparatur cum figuris simplicissimis, cum quibus collationem geometricam admittit. PROP. X.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ sunt figuræ; ad regulas hasce generales semper recurrere nimis molestum esset: præstat figuras, quæ simpliciores sunt & magis usui esse possunt, semel quadrare, & quadraturas in Tabulam referre; deinde Tabulam consulere, quoties ejusmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis sunt Tabulæ duæ sequentes; in quibus z denotat Abscissam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream curvæ quadrandæ; & d, e, f, g, h, η sunt quantitates datæ cum signis suis + & −.

TABULA

CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ QUADRARI POSSUNT.

CURVARUM FORMÆ			CURVARUM AREÆ
I		$dz^{\eta-1} = y$	$\frac{d}{\eta} z^{\eta} = t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{e^2 + 2efz^{\eta} + f^2 z^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta e^2 + \eta efz^{\eta}} = t$, vel $\frac{-d}{\eta ef + \eta f^2 z^{\eta}} = t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3\eta f} R^3 = t$, existente $R = \sqrt{e+fz^{\eta}}$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2} dR^3 = t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{16e^2 - 24efz^{\eta} + 30f^2 z^{2\eta}}{105\eta f^3} dR^3 = t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^3 + 144e^2 fz^{\eta} - 180ef^2 z^{2\eta} + 210f^3 z^{3\eta}}{945\eta f^4} dR^3 = t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{\eta f} R = t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2} dR = t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16e^2 - 8efz^{\eta} + 6f^2 z^{2\eta}}{15\eta f^3} dR = t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^3 + 48e^2 fz^{\eta} - 36ef^2 z^{2\eta} + 30f^3 z^{3\eta}}{105\eta f^4} dR = t$

Between p. 378 and 379

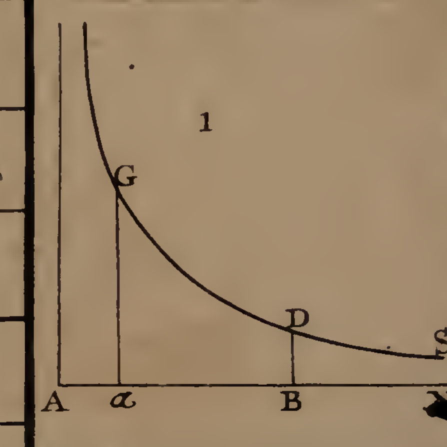
TABULA

CURVARUM SIMPLICIORUM QUÆ CUM ELLIPSI ET HYPERBOLA COMPARARI POSSUNT.

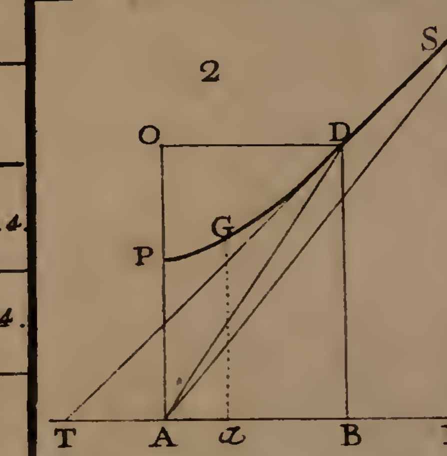
Sit jam aGD vel PGD vel GDS Sectio Conica cujus Area ad Quadraturam Curvæ propositæ requiritur, sitq; ejus Centrum A, Axis Ka, Vertex a, Semiaxis conjugatus AP, datum Abscissæ principium A vel a vel α, Abscissa AB vel aB vel αB $= x$, Ordinata rectangula BD $= v$, et Area ABDP vel aBDG vel αBDG $= s$, existente αG Ordinata ad punctum α. Junganturr KD, AD, aD; ducatur Tangens DT occurrens Abscissæ AB in T, & compleatur parallelogrammum ABDO. Et siquando ad quadraturam Curvæ propositæ requiruntur Areæ duarum Sectionum Conicarum, dicatur posterioris Abscissa ξ, Ordinata Υ, et Area σ. Sit autem $\div$ differentia duarum quantitatum ubi incertum est utrum posterior de priori an prior de posteriori subduci debeat. Et in Forma sexta scribatur p pro $\sqrt{ff-4eg}$.

		Curvarum Formæ	Sectionis Conicæ: Abscissa	Sectionis Conicæ: Ordinata		Curvarum Areæ
I.	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$		$\frac{1}{\eta}s=t=\frac{\alpha\text{GDB}}{\eta}$. *Fig. 1.*
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$		$\frac{d}{\eta f}z^{\eta}-\frac{e}{\eta f}s=t$.
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$		$\frac{d}{2\eta f}z^{2\eta}-\frac{de}{\eta f^2}z^{\eta}+\frac{e^2}{\eta f^2}s=t$.
II	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$		$\frac{2xv\div 4s}{\eta}=t=\frac{4}{\eta}\text{ADGa}$. *Fig. 3. 4.*
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$		$\frac{2d}{\eta f}z^{\frac{1}{2}\eta}+\frac{4es-2exv}{\eta f}=t$.
	3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$		$\frac{2d}{3\eta f}z^{\frac{3}{2}\eta}-\frac{2de}{\eta f^2}z^{\frac{1}{2}\eta}+\frac{2e^2xv-4e^2s}{\eta f^2}=t$.
III	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$		$\frac{4de}{\eta f}\times\overline{\frac{v^3}{2ex}-s}=t=\frac{4de}{\eta f}$ in aGDT, *vel in* APDB $\div$ TDB. *Fig. 2. 3. 4.*
		vel sic	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$\frac{8de^2}{\eta f^2}\times\overline{s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e}+\frac{f^2v}{4e^2x}}=t=\frac{8de^2}{\eta f^2}$ in aGDA $+\frac{f^2v}{4e^2x}$. *Fig. 3. 4.*
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$		$-\frac{2d}{\eta}s=t=\frac{2d}{\eta}$APDB seu $\frac{2d}{\eta}$ aGDB. *Fig. 2. 3. 4.*
		vel sic	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$\frac{4de}{\eta f}\times\overline{s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{2e}}=t=\frac{4de}{\eta f}\times$aGDK. *Fig. 3. 4.*
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$-\frac{d}{\eta}s=t=\frac{d}{\eta}\times-$aGDB *vel* BDPK. *Fig. 4.*
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$\frac{3dfs-2dv^3}{6\eta e}=t$.
IV	1	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$		$\frac{4d}{\eta f}\times\overline{\frac{1}{2}xv\div s}=t=\frac{4d}{\eta f}$ in PAD *vel in* aGDA. *Fig. 2. 3. 4.*
		vel sic	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$\frac{8de}{\eta f^2}\times\overline{s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e}}=t=\frac{8de}{\eta f^2}$ in aGDA. *Fig. 3. 4.*
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$		$\frac{2d}{\eta e}\times\overline{s-xv}=t=\frac{2d}{\eta e}$ in POD *vel in* AODGa. *Fig. 2. 3. 4.*
		vel sic	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$\frac{4d}{\eta f}\times\overline{\frac{1}{2}xv\div s}=t=\frac{4d}{\eta f}$ in aDGa. *Fig. 3. 4.*
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$\frac{d}{\eta e}\times\overline{3s\div 2xv}=t=\frac{d}{\eta e}$ in 3aDGa $\div\Delta$ aDB. *Fig. 3. 4.*
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$		$\frac{10dfxv-15dfs-2dex^2v}{6\eta e^2}=t$

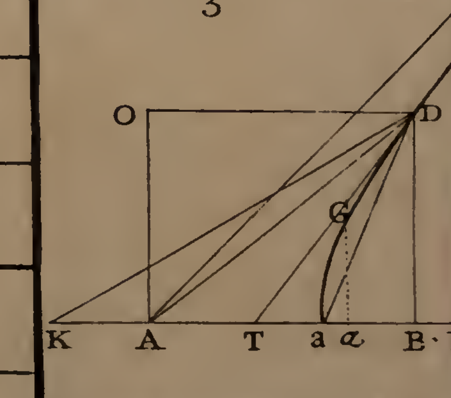
1



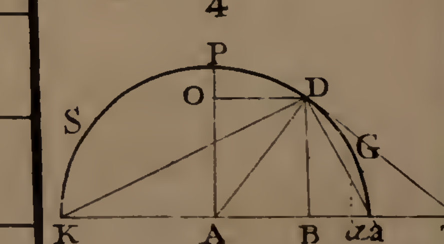
2



3



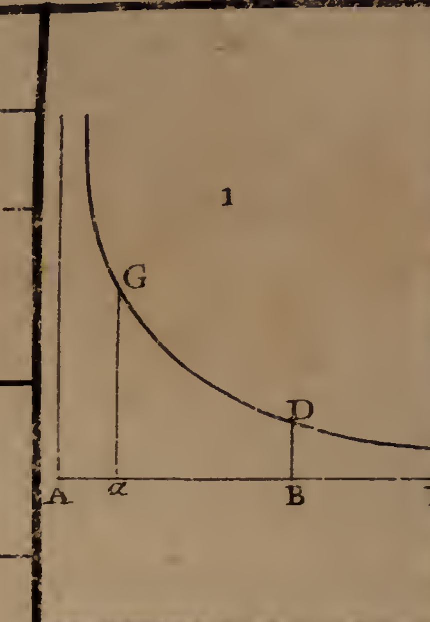
4

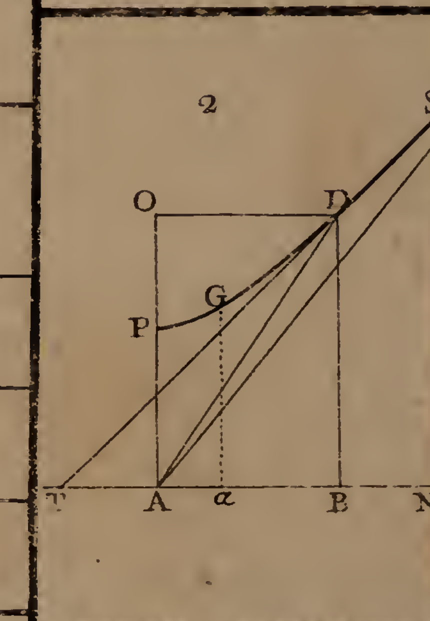


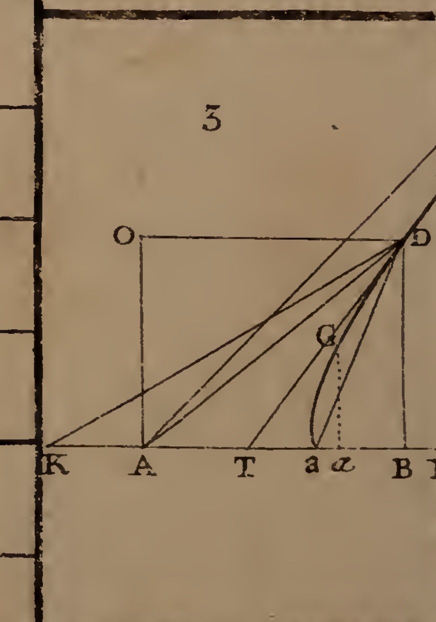
Iohan. Senex sculp.

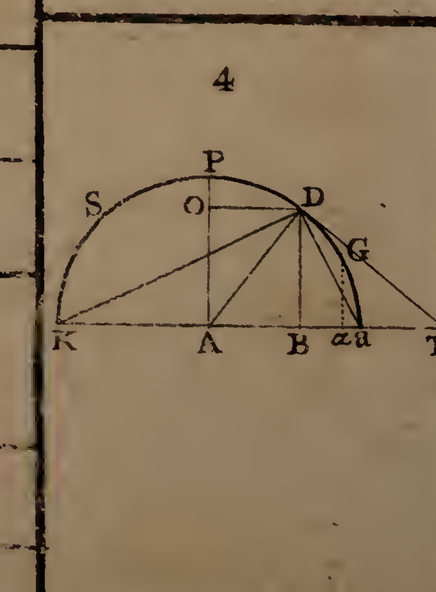
Residuum Tabulæ Curvarum simpliciorum quæ cum Ellipsi et Hyperbola comparari possunt.

Curvarum Formæ			Sectionis Conicæ: Abscissa	Sectionis Conicæ: Ordinata		Curvarum Areæ
V	1	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v$		$\frac{xv-2s}{n}=t$.
		vel sic	$\sqrt{\frac{dz^{2n}}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{f^2-4eg}{4e^2}x^2}=v$		$\frac{2s-xv}{n}=t$.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$ $fz^n+gz^{2n}=\xi$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v$ $\frac{1}{e+\xi}=\Upsilon$		$\frac{d\sigma+2fs-fxv}{2ng}=t$.
VI	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{2dg}{f-p+2gz^n}}=x$ $\sqrt{\frac{2dg}{f+p+2gz^n}}=\xi$	$\sqrt{d+\frac{-f+p}{2g}x^2}=v$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2g}\xi^2}=\Upsilon$		$\frac{2xv-4s-2\xi\Upsilon+4\sigma}{np}=t$.
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n-pz^n+2e}}=x$ $\sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n+pz^n+2e}}=\xi$	$\sqrt{d+\frac{-f+p}{2e}x^2}=v$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}\xi^2}=\Upsilon$		$\frac{4s-2xv-4\sigma+2\xi\Upsilon}{np}=t$.
VII	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$z^n=x$ $\frac{1}{z^n}=\xi$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$ $\sqrt{g+f\xi+e\xi^2}=\Upsilon$		$\frac{4de^2\xi\Upsilon+2def\Upsilon-2dfgxv\begin{smallmatrix}+4deg\\-2ffd\end{smallmatrix}v-8de^2\sigma+4dfgs}{4neg-nff}=t$.
	2	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$z^n=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$		$\frac{d}{n}s=t=\frac{d}{n}\times\alpha GDB$. *Fig.* 2. 3. 4.
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$z^n=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$		$\frac{d}{3ng}v^3-\frac{df}{2ng}s=t$.
	4	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$z^n=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$		$\frac{6dgx-5df}{24ng^2}v^3+\frac{5df^2-4deg}{16ng^2}s=t$.
VIII	1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}=y$	$z^n=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$		$\frac{8dgs-4dgxv-2dfv}{4neg-nf^2}=t=\frac{8dg}{4neg-nf^2}\times\alpha GDB\pm\Delta DBA$. *Fig.* 2. 4.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}=y$	$z^n=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$		$\frac{-4dfs+2dfxv+4dev}{4neg-nf^2}=t$.
	3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}=y$	$z^n=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$		$\frac{\begin{smallmatrix}3dff\\-4deg\end{smallmatrix}s\begin{smallmatrix}-2dff\\+4deg\end{smallmatrix}xv-2defv}{4neg^2-nf^2g}=t$.
	4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}=y$	$z^n=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$		$\frac{\begin{smallmatrix}36defg\\-15df^3\end{smallmatrix}s\begin{smallmatrix}+8degg\\-2df^2g\end{smallmatrix}x^2v\begin{smallmatrix}+10dfff\\-28defg\end{smallmatrix}xv\begin{smallmatrix}+10deff\\-16de^2g\end{smallmatrix}v}{24neg^3-6nf^2g^2}=t$.
IX	1	$\frac{dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$		$\frac{\begin{smallmatrix}4fg\\-4eh\end{smallmatrix}s\begin{smallmatrix}-2fg\\+2eh\end{smallmatrix}xv+2df\frac{v}{x}}{nfh}=t$.
	2	$\frac{dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$		$\frac{\begin{smallmatrix}4egh\\-4fgg\end{smallmatrix}s\begin{smallmatrix}-2egh\\+2fgg\end{smallmatrix}xv+\frac{2}{3}dh\frac{v^3}{x^3}-2dfg\frac{v}{x}}{nfh^2}=t$.
X	1	$\frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$		$\frac{2xv-4s}{nf}=t=\frac{4}{nf}$ ADGa. *Fig.* 3. 4.
	2	$\frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$		$\frac{4gs-2gxv+2d\frac{v}{x}}{nfh}=t$.
XI	1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}=y$	$\sqrt{g+hz^n}=x$ $\sqrt{h+gz^{-n}}=\xi$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2}=v$ $\sqrt{\frac{fg-eh}{g}+\frac{e}{g}\xi^2}=\Upsilon$		$\frac{2dxv^3z^{-n}-4dfs-4de\sigma}{nfg-neh}=t$.
	2	$dz^{n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}=y$	$\sqrt{g+hz^n}=x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2}=v$		$\frac{2d}{nh}s=t$.
	3	$dz^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}=y$	$\sqrt{g+hz^n}=x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}x^2}=v$		$\frac{dhxv^3\begin{smallmatrix}-3dfg\\-deh\end{smallmatrix}s}{2nfh^2}=t$.









Iohan. Senex sculp.

In Tabulis hisce, series curvarum cujusque formæ utrinque in infinitum continuari potest. Scilicet in Tabulâ primâ, in numeratoribus Arearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum ($2, -4, 16, -96, 768$ (oo) &c.) generantur multiplicando numeros $-2, -4, -6, -8, -10$, &c. in se continuò (pp), & subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipsos gradatim; in Formâ quidem tertiâ, per $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}, -\frac{11}{10}$, &c. in quartâ vero per $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{10}$, &c. Et denominatorum coefficientes $3, 15, 105$, &c. prodeunt multiplicando numeros $1, 3, 5, 7, 9$, &c. in se continuè. Prop. XI.

In secundâ vero Tabulâ, series curvarum Formæ primæ, secundæ, quintæ, sextæ, nonæ, & decimæ ope solius divisionis, & Formæ reliquæ ope Propositionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ series mutando signum numeri η variari solent. Sic enim *e. g.* Curva $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$, evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}\eta+1}}\sqrt{f+ez^{\eta}}=y$ (qq).

PROP. XI. THEOR. VIII.

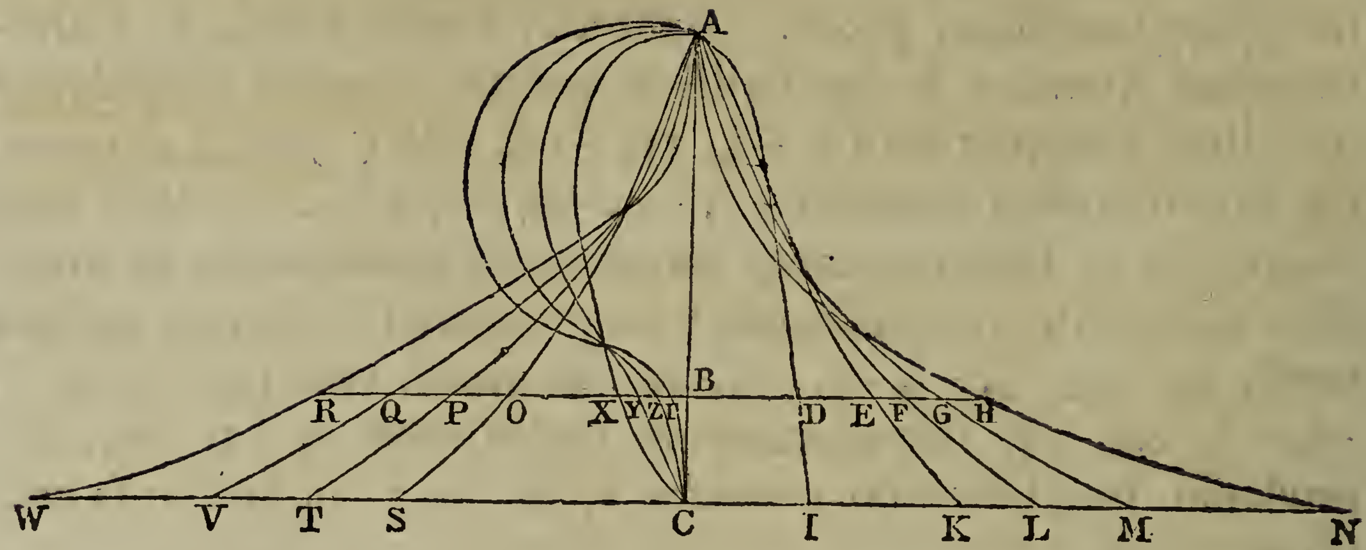
Sit ADIC Curva quævis Abscissam habens $AB=z$, & Ordinatam $BD=y$; & sit AEKC Curva alia, cujus Ordinata, BE, æqualis est prioris areæ, ADB, ad unitatem applicatæ; & AFLC Curva tertia, cujus Ordinata, BF, æqualis est secundæ areæ, AEB, ad unitatem applicatæ; & AGMC Curva quarta, cujus Ordinata, BG, æqualis est tertiæ areæ, AFB, ad unitatem applicatæ; & AHNC Curva quinta, cujus Ordinata, BH, æqualis est quartæ areæ, AGB, ad unitatem applicatæ; & sic deinceps in infinitum. Et sunto A, B, C, D, E,

(oo) Editiones priores habuere 868. Vitiosè. Colsonus in Geometriâ Analyticâ hunc numerum emendatè dedit. Vid. Geometr. Analyt. C. x. Not. *a*.

(pp) Rectius ni fallor dixisset coefficientes illos generari multiplicando binarium in hanc seriem $1, -2, -4, -6, -8$, —. Nimirum in Formâ tertiâ et quartâ Tabulæ primæ, coefficiens primi membri numeratoris areæ primæ binarius est, sive factus è duobus, $2, 1$, inter se multiplicatis. Areæ secundæ coefficiens ille numeratoris factus est ex tribus, $2, 1, -2$; tertiæ, ex quatuor, $2, 1, -2, -4$; quartæ, ex quinque $2, 1, -2, -4, -6$ inter se multiplicatis, eodemque usque modo progrediendum est.

(qq) Vide Geomet. Analyt. C. x.

Prop. XI.



&c. Areæ curvarum Ordinatas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, &c. et Abſciſſam communem z.

Detur Abſciſſa quævis AC$=t$, ſitque BC$=t-z=x$, & ſunto P, Q, R,

(rr) PROPOSITIONIS XI^{æ}. DEMONSTRATIO ROBINESII.

Hujus Propoſitionis ſunt partes duæ; quarum Prima eſt hæc.

Sit Curva quæpiam ADI, cujus abſciſſa AB literâ z ſignificetur; ordinata BD, cuicuimodi ejus cum abſciſſâ ſit cognatio, literâ y. Tum, vocatâ hâc curvâ primâ, ſint aliæ curvæ AEK, AFL, AGM, AHN, quarum abſciſſa omnium quidem communis z, ſingularum ordinatæ BE, BF, BG, BH. Harum autem BE, ſecundæ curvæ ordinata, æqualis ſit areæ primæ ad unitatem applicatæ; Curvæ tertiæ ordinata BF æqualis ſit areæ ſecundæ ad unitatem applicatæ: Quartæ ordinata, BG, æqualis ſit areæ tertiæ ad unitatem applicatæ: et ſimili lege progreſſio uſque fiat.

Jam ſint aliæ etiam Curvæ, AOS, APT, AQV, ARW, eâdem abſciſſâ z, ordinatis BO, BP, BQ, BR; quarum BO, curvæ AOS ordinata, æqualis ſit quantitati zy: Ordinata BP curvæ APT æqualis ſit quantitati z^2y. Ordinata BQ curvæ AQV æqualis ſit quantitati z^3y. Ordinata BR curvæ ARW æqualis ſit quantitati z^4y. Tum literâ A deſignante aream ACI, literâ B aream ACS, literâ C aream ACT, literâ D aream ACV, literâ E Aream ACW, areæ ACI, ACK, ACL, ACM, ACN, ſic ordine erunt æſtimandæ.

$$\text{Area prima ACI} = \text{A}$$

$$\text{Secunda ACK} = z\text{A} - \text{B}.$$

$$\text{Tertia ACL} = \frac{z^2\text{A} - 2z\text{B} + \text{C}}{2}$$

$$\text{Quarta ACM} = \frac{z^3\text{A} - 3z^2\text{B} + 3z\text{C} + \text{D}}{6}$$

$$\text{Quinta ACN} = \frac{z^4\text{A} - 4z^3\text{B} + 6z^2\text{C} - 4z\text{D} + \text{E}}{24}$$

Eodemque deinceps uſque modo.

Harum formularum ea quidem eſt conditio, ut in omnibus poſt primam, index elatiſſimæ poteſtatis literæ z ſit numerus ille, qui curvæ cujuſque à primâ diſtantiam ſignificet; index autem elatiſſimus ille unitate gradatim minuat. Membrum primum multiplicatur cum A, ſecundum cum B, tertium cum C, eodemque deinceps uſque modo. Coefficientes iidem ſunt ac poteſtatis ejus à quâlibet duorum nominum radice, quæ poteſtas pari ſit gradu cum elatiſſimâ quantitatis z. Diviſor verò factus eſt ex tot numeris (1, 2, 3, 4, 5, 6) naturali ordine ſumendis, quot ſint unitates in numero elatiſſimam poteſtatem literæ z indicante.

Vel ſi curvæ, cujus æſtimationem inire oporteat, ſi hujus à primâ diſtantiam numerus n ſignificet,

R, S, T Areæ curvarum Ordinatas habentium x, xy, x^2y, x^3y, x^4y, &c. et Abſciſſam communem x. PROP. XI.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abſciſſam totam datam AC, nec non ad Ordinatam, poſitione datam & infinitè productam, CI.

Et erit Arearum ſub initio poſitarum

Prima ADIC $= A = P$.

Secunda AEKC $= tA - B = Q$.

Tertia AFLC $= \frac{t^2A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2}R$.

Quarta AGMC $= \frac{t^3A - 3t^2B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6}S$.

Quinta AHNC $= \frac{t^4A - 4t^3B + 6t^2C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24}T$ (rr).

COROL.

ficet, Area exquirenda ita quidem invenietur, ſi quantitas $\overline{z-1}|^n$ in ſeriem explicabitur, cujus membrum primum multiplicabitur cum A, ſecundum cum B, tertium cum C, quartum cum D; tum omnium ſumma dividetur numero à mutuâ horum multiplicatione facto; n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, horum utique ſerie eò uſque continuatâ, ut in unitatem deſinat.

ALTERA Pars Propoſitionis hæc eſt.

Sint curvæ prima, ſecunda, tertia, et reliquæ, quæ ſuperiùs poſitæ ſunt. Jam literâ t deſignante abſciſſam totam AC, literâ verò x, partem ejus BC, ſcribi intelligantur curvæ CXA, CYA, CZA, CΓA, eâ quidem lege, ut ex ordinatis BX, BY, BZ, BΓ, illa BX æquetur quantitati xy; illa BY quantitati x^2y; illa BZ quantitati x^3y; BΓ quantitati x^4y. His poſitis, ſi Curvarum CIDA, CXA, CYA, CZA, CΓA, prima CIDA ſignificetur literâ P, ſecunda CXA literâ Q, tertia CYA literâ R, quarta CZA literâ S, quinta CΓA literâ T, Curvarum, quæ initio poſitæ ſunt, Areæ totæ ad hunc modum ordine æſtimandæ ſunt.

Prima AIC $=$ P

Secunda AKC $=$ Q

Tertia ALC $= \frac{1}{2}$ R

Quarta AMC $= \frac{1}{6}$ S

Quinta ANC $= \frac{1}{24}$ T

Nimirum areæ P, Q, R, S, T à numeris horum, 1, 2, 3, 4, 5 mutuâ multiplicatione factis dividendæ, tot ex iſtâ ſerie ac priùs ordine deſumptis.

DEMONSTRATIO PARTIS PRIMÆ.

CUM Curvæ AEK, AFL, AGM, AHN, alia ex aliâ, eâ lege procreatæ ſint, ut abſciſſam z communem omnes habeant, ordinatam unaquæque prioris aream; illud nos oſtendere oportet, formularum illarum, A, $zA - B$, $\frac{zzA - 2zB + C}{2}$, unamquamque Curvæ cujuſdam Aream deſignare, cujus Ordinatam formula præcedens deſignaverit, cùm abſciſſa ſit z.

Ponatur igitur $m = n - 1$.

Prop. XI. Cor.

COROL.

Unde si Curvæ quarum ordinatæ sunt y, zy, z^2y, z^3y, &c. vel

Propositionis XI^{a}.

Erunt igitur $\dfrac{z^m A - mz^{m-1}B + m \times \frac{m-1}{2} z^{m-2}C -,}{m \times m-1 \times m-2 \times,}$ et $\dfrac{z^n A - nz^{n-1}B + n \times \frac{n-1}{2} z^{n-2}C -}{n \times n-1 \times n-2}$, erunt hæ, ex iis quas suprà posuimus formulis duæ aliquæ inter se proximæ. Ostendere igitur nos oportet, harum formularum posteriorem curvæ cujusdam Aream significare, quæ ordinatam quidem à priore designatam habeat, abscissam verò z. Hujus autem areæ fluxio facta erit multiplicando illam $\dot{z}$ cum formulâ priore. Ostendere igitur nos oportet hujus fluxionis fluentem per formulam posteriorem designari. Vel, quod eodem redit, posterioris formulæ fluxionem æqualem esse illi $\dot{z}$ cum formulâ priore multiplicatæ.

Formulæ posterioris fluxio constat ex quantitatibus, $nz^{n-1}\dot{z}A - n \times \overline{n-1}\, z^{n-2}\dot{z}B + n \times \frac{n-1}{2} \times \overline{n-2}\, z^{n-3}\dot{z}C -$, $+ z^n\dot{A} - nz^{n-1}\dot{B} + n \times \frac{n-1}{2} z^{n-2}\dot{C}$, ex his, inquam, cum facto, $n \times n-1 \times n-2 \times$, divisis.

Tota quantitas dividenda è duabus constat partibus. Quarum prima conflata est è fluxionibus potestatum literæ z cum quantitatibus A, B, C, multiplicatis; altera ex illarum A, B, C fluxionibus in potestates literæ z multiplicatis. Horum autem, $z^n\dot{A}$, $z^{n-1}\dot{B}$, $z^{n-2}\dot{C}$, ex quibus partem alteram dividendæ componi diximus, horum unumquodque æquatur quantitati $z^n\dot{z}y$; cùm ex ipsâ Curvarum procreandarum lege, quarum areæ designantur literis A, B, C, efficietur $\dot{A} = \dot{z}y$. $\dot{B} = \dot{z}zy$. $\dot{C} = \dot{z}z^2y$. Dividendæ igitur pars altera illa huic æqualis erit, $z^n\dot{z}y \times 1 - n + n \times \frac{n-1}{2} - n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} +$: vel huic, $z^n\dot{z}y \times \overline{1-1}|^n$. Nihilo igitur. Et tota fluxio huic fit æqualis $\dfrac{nz^{n-1}\dot{z}A - n \times \overline{n-1}\, z^{n-2}\dot{z}B + n \times \frac{n-1}{2} \times \overline{n-2}\, z^{n-3}\dot{z}C -}{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times,}$. Deleto igitur n, qui quantitatem utramque, dividentem et dividendam, metitur, et pro illis $n-1$, $n-2$, $n-3$, his m, $m-1$, $m-2$ substitutis, fluxio de quâ agitur hâc formâ comparebit;

$\dot{z} \times \dfrac{z^m A - mz^{m-1}B + m \times \frac{m-1}{2} z^{m-2}C -}{m \times m-1 \times m-2 -}$. Formulæ igitur posterioris fluxio æqualis erit illi $\dot{z}$ in formulam priorem multiplicatæ. Unde consequetur, quamlibet è formulis illis curvæ cujusdam Aream designare, quæ formulam priorem Ordinatam habeat, cùm Abscissa ejus sit z. Q. E. D.

ALTERIUS PARTIS DEMONSTRATIO.

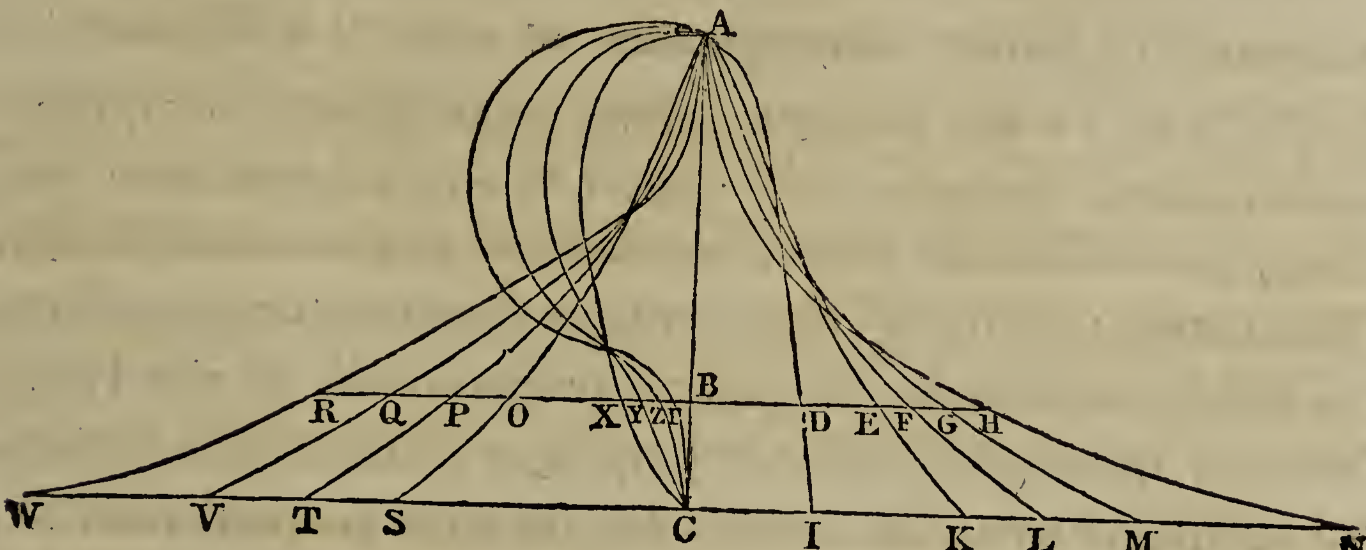
Ex Curvis initio positis, ADI, AEK, AFL, AGM, AHN desumatur illa, cujus à primâ distantiam numerus n significat. Illud jam nos ostendere oportet; illius Aream quæ Abscissam habeat BC, seu x, Ordinatam $x^n y$, si à facto illo $n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times * * * * 1$ divisa sit, æquari desumptæ illius Areæ, modò CB toti CA sit æqualis, sive x fiat t.

Areis ABD, ABO, ABP, ABQ, ABR decrescentibus, alias illas, BCID, BCSO, BCTP, BCVQ, BCWR, augeri manifestum est. Unde consequetur illorum decrementa, horum esse incrementa; illorum fluxiones negatas horum fluxiones esse. Hoc est si area ABD designetur literâ a, area ABO literâ b; area ABP, literâ c; area ABQ, litera d; area ABR, literâ e; tum area BCID, literâ α; area BCSO, literâ β; area BCTP, literâ γ; area BCVQ, literâ δ; area BCWR, literâ ϵ; erit $\dot{\alpha} = -\dot{a}$: $\dot{\beta} = -\dot{b}$: $\dot{\gamma} = -\dot{c}$: $\dot{\delta} = -\dot{d}$: $\dot{\epsilon} = -\dot{e}$.

Jam

vel y, xy, x^2y, x^3y, &c. quadrari poſſunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AGMC, &c. et habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH, Areis curvarum proportionales. Prop. XI. Cor.

Jam Curvæ cujus Abſciſſa x, Ordinata $x^n y$, hujus fluxio erit $\dot x x^n y = \dot x y \times \overline{t-z}|^n$, cùm ſit $x = t - z$. Vel cùm incrementa illius x decrementis ipſius z ſint æqualia, ac propterea cùm ſit $\dot x = -\dot z$, fluxio Robinsesii Demonstratio



Curvæ, quam modò diximus, huic æqualis erit, $-\dot z y \times \overline{t-z}|^n = -\dot z y \times \overline{t^n - nt^{n-1}z + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}z^2 -}$, $= -t^n \dot z y + nt^{n-1}\dot z z y - n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}\dot z z^2 y = t^n \times \overline{-\dot a} - nt^{n-1} \times \overline{-\dot b} + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2} \times \overline{-\dot c -}$, $= t^n \dot\alpha - nt^{n-1}\dot\beta + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}\dot\gamma -$. Sumptiſque fluentibus, Area curvæ cujus Abſciſſa x, vel BC, Ordinata $x^n y$, æqualis erit huic quantitati $t^n\alpha - nt^{n-1}\beta + n \times \frac{n-1}{2} t^{n-2}\gamma -$. Sed cùm x fit t, hoc eſt cùm BC æqualis evadit toti AC, areæ α, β, γ, totis illis A, B, C æquales fiunt: quod ſatis apertum eſt. Si igitur illa x eſt t, hoc eſt ſi CB eſt æqualis toti CA, Curvæ cujus Abſciſſa x, Ordinata $x^n y$, hujus Area huic fit æqualis, $t^n \mathrm{A} - nt^{n-1}\mathrm{B} + n \times \frac{n-1}{2} \times t^{n-2}\mathrm{C}$: quæ fit ex illa $\overline{t-1}|^n$ in ſeriem explicatâ, membro ſeriei primo cum A multiplicato, ſecundo cum B, tertio cum C.—Sed quantitas quæ fit ex illâ $\overline{t-1}|^n$ quo diximus modo, hæc ſi cum facto $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times * \times * \times 1$ dividetur, æquabitur areæ curvæ cujus diſtantiam à primâ numerus n ſignificaverit (per Caſ. 1.) Hujus igitur areæ æquabitur illius area, cum facto $n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3} \times * * \times 1$ diviſa, cujus abſciſſa x, ordinata $x^n y$: modò abſciſſa x toti AC ſit æqualis. Hoc eſt Q, ſive Area curvæ cujus Abſciſſa x, Ordinata xy, ſi x æqualis ſit rectæ AC, æquabitur areæ ſecundæ AKC: $\frac{1}{2}$ R, ſive ſemiſſis areæ cujus Abſciſſa x, Ordinata x^2y, æqualis erit areæ tertiæ ALC: $\frac{1}{6}$ S, ſive pars ſexta ejus areæ, cujus Abſciſſa x, Ordinata x^3y, æqualis erit areæ quartæ AMC: $\frac{1}{24}$ T, ſive pars viceſima quarta ejus Areæ, cujus Abſciſſa x Ordinata x^4y areæ quintæ ANC æqualis; eodemque deinceps uſque modo; dummodo id in omnibus ſervetur, ut x ſit æqualis ipſi AC. Q. E. C.

Atque hæc eſt reconditiſſimæ Propoſitionis Robineſii Demonſtratio; cujus prima adumbratio anno 1727 inter Acta Philoſophicæ Societatis noſtræ Regiæ Londinenſis edita eſt; ſpecies perfectior anno 1733 in Epitome Actorum illâ, quam Viri docti concinnârunt Reid & Gray, Anglico ſermone ab auctore conſcriptam nos in Latinum convertimus. Dignam, credo, omnes judicabunt, cui id laboris noſtri nos impenderemus. Certè Stewarto Abredonenſi tantoperè eam placuiſſe video, ut in ſuos in hunc librum Commentarios transferendam judicârit, mutilam tamen ac haud in meliùs immutatam, & nullâ Robineſii mentione factâ.

SCHOL.

Scholium.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus suprà. Hæ fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium.

Ut si z^n sit quantitas fluens, & fluendo evadat $\overline{z+o}|^n$, deinde resolvatur in seriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ooz^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6} o^3z^{n-3}$ + &c. terminus primus hujus seriei z^n erit quantitas illa fluens, secundus noz^{n-1} erit (ff) ejus incrementum primum, seu differentia prima, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima; tertius $\frac{nn-n}{2} ooz^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum, seu differentia secunda, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda; quartus $\frac{n^3-3nn+2n}{6} o^3z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium, seu differentia tertia, cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est; & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c. *(Vide fig. pag.* 380.*)*

Ut si Ordinata BE $(= \frac{ADB}{1})$ sit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF $(= \frac{AEB}{1})$ si quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD.

Si BH $(= \frac{AGB}{1})$ sit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, secunda, tertia & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD respectivè.

Et hinc in æquationibus, quæ quantitates tantùm duas incognitas involvunt, quarum una est quantitas uniformiter fluens, & altera est fluxio quælibet quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa altera per quadraturam curvarum. Exponatur enim fluxio ejus per Ordinatam BD; & si hæc sit fluxio prima, quæratur area ADB = BE × 1; si fluxio secunda, quæratur area AEB

(ff) Lege, *erit* UT *ejus incrementum primum, tertius* ✱ *erit* UT *ejus incrementum secundum, quartus* ✱ *erit* UT *ejus incrementum tertium.* Hæc Emendatio ipsius quidem Newtoni est, in Recensione Controversiæ inter Leibnitsium & Keillium, &c. minimè verò Keillii, id quod Stewarto persuasum fuisse video. Ignorabat utique Stewartus Recensionem illam ab ipso Newtono profectam. Quòd si quis dubitare velit, locus hic, vel sic emendatus, sitne satis perspicuus, id quod Stewartus se dubitare dicit; eum vel meridie dubitare, sitne lux, jubebo.

(tt) Nempe

AEB = BF × 1 ; ſi fluxio tertia, quæratur area AFB = BG × 1 ; &c. et Area inventa erit exponens fluentis quæſitæ. GENERALE.

Sed & in æquationibus, quæ fluentem & ejus fluxionem primam ſine alterâ fluente, vel duas ejuſdem fluentis fluxiones, primam & ſecundam, vel ſecundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. ſine alterutrâ fluente involvunt: inveniri poſſunt fluentes per quadraturam curvarum. Sit æquatio $aa\dot{v} = av + vv$, exiſtente $v =$ BE, $\dot{v} =$ BD, $z =$ AB, & $\dot{z} = 1$; & æquatio illa, complendo dimenſiones fluxionum, evadet $aa\dot{v} = av\dot{z} + vv\dot{z}$, ſeu $\frac{aa\dot{v}}{av + vv} = \dot{z}$.

Jam fluat v uniformiter, & ſit ejus fluxio $\dot{v} = 1$, & erit $\frac{aa}{av + vv} = \dot{z}$, & quadrando curvam, cujus Ordinata eſt $\frac{aa}{av + vv}$, & Abſciſſa v, habebitur fluens z. Adhæc ſit æquatio $aa\ddot{v} = a\dot{v} + \dot{v}v$, exiſtente $v =$ BF, $\dot{v} =$ BE, $\ddot{v} =$ BD, & $z =$ AB; & per relationem inter $\ddot{v}$ & $\dot{v}$, ſeu BD & BE, invenietur relatio inter AB & BE, ut in exemplo ſuperiore. Deinde, per hanc relationem, invenietur relatio inter AB & BF, quadrando curvam AEB.

Æquationes, quæ tres incognitas quantitates involvunt, aliquando reduci poſſunt ad æquationes, quæ duas tantùm involvunt; &, in his caſibus, fluentes invenientur ex fluxionibus ut ſuprà. Sit æquatio $a - bx^m = cxy^n\dot{y} + dy^{2n}\dot{y}\dot{y}$: ponatur $y^n\dot{y} = \dot{v}$, & erit $a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$. Hæc æquatio, quadrando curvam cujus abſciſſa eſt x & ordinata $\dot{v}$, dat aream v (tt); & æquatio altera $y^n\dot{y} = \dot{v}$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1} y^{n+1} = v$: unde habetur fluens y.

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantùm involvunt, reduci non poſſunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam curvarum. Sit æquatio $\overline{ax^m + bx^n}|^p = rex^{r-1}y^s + sex^r\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^t$, exiſtente $\dot{x} = 1$; et pars poſterior, $rex^{r-1}y^s + sex^r\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^t$, regrediendo ad fluentes, ſit $ex^ry^s - \frac{f}{t+1} y^{t+1}$, quæ proinde eſt ut Area curvæ, cujus abſciſſa eſt x & ordinata $\overline{ax^m + bx^n}|^p$; & inde datur fluens y.

(tt) Nempe per reſolutionem æquationis quadraticæ $a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$ veniet $\dot{v} = \frac{\pm\sqrt{4d\,a - 4d^2bx^m + c^2x^2} - cx}{2d}$. Si igitur detur Area curvæ cujus Abſciſſa x, Ordinata $\frac{\sqrt{4d^2a - 4d^2bx^m + c^2x^2} - cx}{2d}$, dabitur v.

SCHOLIUM GENERALE.

Sit æquatio $\dot{x} \times \overline{ax^m + bx^n}|^p = \frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$. Et fluens, cujus fluxio eſt $\dot{x} \times \overline{ax^m + bx^n}|^p$, erit ut Area curvæ, cujus abſciſſa eſt x & ordinata eſt $\overline{ax^m + bx^n}|^p$. Item fluens, cujus fluxio eſt $\frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$, erit ut Area curvæ, cujus abſciſſa eſt y & ordinata $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$, id eſt (per Caſum 1. Formæ quartæ Tab. I.) ut Area $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^n}$. Pono ergo $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^n}$ æqualem Areæ curvæ, cujus abſciſſa eſt x & ordinata $\overline{ax^m + bx^n}|^p$, & habebitur fluens y.

Et nota quòd fluens omnis, quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis non fluente. Quæ ex fluxione ſecundâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis, cujus fluxio ſecunda nulla eſt. Quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quâvis, cujus fluxio tertia nulla eſt. Et ſic deinceps in infinitum.

Poſtquam fluentes ex fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate concluſionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt, & cum fluxionibus, ſub initio propoſitis, comparandæ. Nam ſi prodeunt æquales, concluſio rectè ſe habet: ſin minùs, corrigendæ ſunt fluentes ſic, ut earum fluxiones fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam & fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis aſſumptæ æqualem fluxioni propoſitæ, & terminos homologos inter ſe comparando.

Et his principiis via ad majora ſternitur.

ARTIS ANALYTICÆ

SPECIMINA

VEL

GEOMETRIA ANALYTICA.

ARGUMENTA CAPITUM HUJUS LIBRI.

In hoc libro edendo tribus usi sumus MSS; in quibus et Auctoris Autographus erat. Alium, ignoti cujusdam scribæ manu exaratum, nobiscum communicavit honoratissimus Dominus Carolus Cavendish; cùm ipse eum olim à Jonesio acceperat. Tertium de Cavendisiano, ut videtur, propriâ manu exscripserat vir Doctissimus Jacobus Wilson, editor ille operum Robinesii. Hunc nobis tradidit Joannes Nourse, Bibliopola Regius, vir elegantioris Matheseos et amantissimus et ipse minimè imperitus. Divisio Libri in Capita à nobis est.

GEOMETRIA ANALYTICA.

CAPUT PRIMUM.

DE SERIEBUS INFINITIS.

ANIMADVERTENTI plerosque Geometras, posthabitâ ferè Veterum Syntheticâ Methodo, Analyticæ excolendæ plurimùm incumbere, et ejus ope tot tantasque difficultates superâsse; ut penè omnia, extra Curvarum Quadraturas, et similia quædam nondum penitùs enodata, videantur exhausisse; placuit sequentia, quibus campi analytici terminos expandere, juxtà & Curvarum doctrinam promovere possem, in gratiam discentium breviter compingere.

2. Cùm in Numeris et Speciebus operationes computandi persimiles sint, neque differre videantur nisi in characteribus, quibus quantitates, in istis definitè, in his indefinitè designantur: demiror, quòd doctrinam de numeris decimalibus nuper inventam (si Quadraturam Hyperbolæ per N. Mercatorem demas) nemini in mentem venerit, Speciebus itidem accommodare; præsertim cùm ad præclariora viam aperiat. Hujus autem de Speciebus doctrina, cùm eodem modo, ad Algebram relata sit, ac doctrina decimalium Numerorum ad vulgarem Arithmeticam; Operationes, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio et Extractio radicum, exinde addisci possunt: modo Lector utriusque, et Arithmeticæ et Algebræ vulgaris, peritus fuerit, et noverit correspondentiam inter decimales numeros, ac terminos Algebraicos in infinitum continuatos; scilicet quòd singulis numerorum locis, proportione decimali dextrorsùm perpetuò decrescentibus, correspondent singuli specierum termini, secundum seriem dimensionum numeratorum vel denominatorum uniformi progressione in infinitum continuatam, prout factum in sequentibus, ordinati. Et quemadmodum commoditas decimalium in eo consistit, ut fractiones omnes et ra-

dicales, in eos reductæ, quodammodo naturam integrorum induant: sic etiam infinitarum specierum commoditas est, quòd per eas abstrusiorum terminorum genera, quales sunt fractiones à compositis quantitatibus denominatæ, compositarum radices, et radices affectarum æquationum, possunt ad simplicium genus reduci; ad infinitas nempe fractionum series numeratores ac denominatores simplices habentium, in quibus nullæ sunt aliorum difficultates propemodum insuperabiles. Imprimis itaque reductiones aliarum quantitatum ad hujusmodi terminos, et methodos computandi minùs obvias ostendam; dein hanc Analysin ad solutiones Problematum applicabo.

3. Reductiones per divisionem et extractionem radicum è sequentibus exemplis, cum similibus operandi modis in Arithmeticâ decimali et speciosâ collatis, elucescet.

Exempla reductionum per Divisionem.

4. Propositâ $\frac{aa}{b+x}$. Divide aa per $b+x$ ad hunc modum

$$\begin{array}{l}
b+x)\ aa+oo\ \left(\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\frac{a^2x^4}{b^5}-\frac{a^2x^5}{b^6}\ \&c.\right.\\
\quad aa+\frac{a^2x}{b}\\
\hline
\quad -\frac{a^2x}{b}+o\\
\quad -\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{b^2}\\
\hline
\quad +\frac{a^2x^2}{b^2}+o\\
\quad +\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x^3}{b^3}\\
\hline
\quad -\frac{a^2x^3}{b^3}+oo\\
\quad -\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4}\\
\hline
\quad +\frac{a^2x^4}{b^4}\ \&c.
\end{array}$$

Et prodit $\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$ &c. quæ series in infinitum continuata tantùm valet ac $\frac{aa}{b+x}$. Vel posito x primo divisoris termino, hoc modo $x+b)\,aa($ prodibit $\frac{aa}{x}-\frac{a^2b}{x^2}+\frac{a^2b^2}{x^3}-\frac{a^2b^3}{x^4}$ &c.

5. Ad eundem modum fractio $\frac{1}{1+x^2}$ reducitur ad $1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c, Vel ad $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$ &c.

6. Et

6. Et fractio $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$ ad $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$ &c.

DIVISIO ET EXTRACT. RAD.

7. Ubi obiter notandum eſt, quòd uſurpo x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, &c. pro $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, et $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, &c. pro $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$; et $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$, &c. pro $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c. Idque ob analogiam rei, quæ deprehendi poteſt ex hujuſmodi geometricis progreſſionibus x^3, $x^{\frac{5}{2}}$, x^2, $x^{\frac{3}{2}}$, x, $x^{\frac{1}{2}}$, x^0, ſive 1, $x^{-\frac{1}{2}}$, x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2}, &c.

Ad hunc modum pro $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}$ &c. ſcribi poteſt $aax^{-1}-aabx^{-2}+aab^2x^{-3}$ &c.

Et ſic vice $\sqrt{aa-xx}$ ſcribi poteſt $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$; et $\overline{aa-xx}|^2$ vice quadrati ex $aa-xx$; et $\overline{\frac{aab-y^3}{by+yy}}\Big|^{\frac{1}{3}}$ vice $\sqrt[3]{\frac{aab-y^3}{by+yy}}$; & ſic in aliis.

Unde meritò poteſtates diſtingui poſſunt in affirmativas et negativas, integras et fractas (a).

Exempla reductionum per Extractionem radicum.

8. Propoſitâ $aa+xx$, radicem ejus ut ſequitur extrahas

$$aa+xx\left(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\text{ \&c.}\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa \\ \hline
0 \quad +xx \\
\quad xx+\frac{x^4}{4a^2} \\ \hline
\qquad -\frac{x^4}{4a^2} \\
\qquad -\frac{x^4}{4a^2}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6} \\ \hline
\qquad\qquad +\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6} \\
\qquad\qquad \frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline
\qquad\qquad\quad -\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}\text{ \&c.} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{5x^8}{64a^6}-\frac{5x^{10}}{128a^8}+\frac{5x^{12}}{512a^{10}} \\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{7x^{10}}{128a^8}-\frac{7x^{12}}{512a^{10}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{7x^{10}}{128a^8}+\frac{7x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{21x^{12}}{512a^{10}}\text{ \&c.}
\end{array}$$

(a) Vide Arithmetic. Univerſ. Cap. 1. Not. *b*.

Caput Primum.

Et prodit $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$ &c. Ubi notandum, quòd circa finem operis eos omnes terminos negligo, quorum dimenſiones tranſcenderent dimenſiones ultimi termini, ad quem cupio quotientem ſolummodo produci, puta $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

9. Poteſt etiam ordo terminorum inverti ad hunc modum; x^2+a^2. Et radix erit $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}$ &c.

Sic ex a^2-x^2 radix eſt $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Et ex $x-x^2$ eſt $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$ &c.

Et ex a^2+bx-x^2 eſt $a + \frac{bx}{2a} - \frac{x^2}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}$ – &c.

Et ex $\frac{1+ax^2}{1-bx^2}$ eſt $\frac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6}$ &c. Factâque inſuper diviſione, fit

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{1}{2}b\,x^2 & +\frac{3}{8}b^2\,x^4 & +\frac{5}{16}b^3\,x^6 & \&c. \\ +\frac{1}{2}a & +\frac{1}{4}ab & +\frac{3}{16}ab^2 & \\ & -\frac{1}{8}a^2 & -\frac{1}{16}a^2b & \\ & & +\frac{1}{16}a^3 & \end{array}$$

10. Operationes verò per debitam præparationem non rarò abbreviari poſſunt; ut in allato exemplo, ad extrahendam $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}$, ſi non eadem fuiſſet numeratoris ac denominatoris forma, utrumque multiplicaſſem per $\sqrt{1-bx^2}$, & ſic prodiiſſet $\frac{\sqrt{1\,{+a \atop -b}\,x^2+abx^4}}{1-bx^2}$; et reliquum opus perficeretur extrahendo radicem numeratoris tantùm, ac dividendo per denominatorem.

11. Ex hiſce, credo, manifeſtum eſt, quo pacto radices aliæ poſſunt extrahi, et quælibet compoſitæ quantitates, quibuſcunque radicibus vel denominatoribus perplexæ; ut hîc videre eſt, $x^3 + \frac{\sqrt{x-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx-\sqrt{2x-x^{\frac{2}{3}}}}}$, in ſeries infinitas ſimplicium terminorum reduci.

CAPUT SECUNDUM.

De affectarum Æquationum reductione.

PROPOSITIS verò affectis Æquationibus, modus, quo radices earum ad hujuſmodi ſeries poſſint reduci, obnixiùs explicari debet;

RESOLUTIO NUMEROSA

bet; idque cùm earum doctrina, quam hactenus in numeris exposuerunt Mathematici, per ambages (superfluis etiam operationibus adhibitis) tradatur, ut in specimen operis in speciebus non debeat adhiberi. Imprimis itaque Numerosam affectarum æquationum Resolutionem compendiosè tradam; dein Speciosam similiter explicabo.

2. Proponatur æquatio $y^3-2y-5=0$, resolvenda; et sit 2 numerus, utcunque inventus, qui minùs quàm decimâ sui parte differt à radice quæsitâ. Tum pono $2+p=y$, et pro y substituo $2+p$ in æquationem; et inde nova prodit $p^3+6p^2+10p-1=0$, cujus radix p exquirenda est, ut quotienti addatur. Nempe, neglectis p^3+6p^2 ob parvitatem, $10p-1=0$, sive $p=0,1$ ad veritatem proximè accedet. Scribo itaque 0,1 in quotiente, & suppono $0,1+q=p$, et hunc ejus fictitium valorem, ut antè, substituo, et prodit $q^3+6,3q^2+11,23q+0,061=0$. Et cùm $11,23q+0,061=0$, veritatem appropinquet, sive ferè sit $q=-0,0054$ (dividendo nempe 0,061 per 11,23 donec tot eliciantur figuræ quot loca primis figuris hujus et principalis quotientis exclusivè intercedunt, quemadmodum hîc duo sunt inter 2 & 0,005) scribo $-0,0054$, in inferiori parte quotientis, siquidem negativa sit; et supponens $-0,0054+r=q$, hunc ut priùs substituo. Et sic operationem ad placitum produco, pro more subjecti diagrammatis.

	$+2,10000000$ $-0,00544852$ $2,09455148$ &c.
$2+p=y$ y^3 $-2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0,1+q=p$ $+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ $-p$	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$ $+0,06 \quad +1,2 \quad +6,$ $+1, \quad +10,$ $-1,$
Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$ q^3 $+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$-0,0000001\cancel{5}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{6}\cancel{4}+0,000\cancel{0}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{8}r-\cancel{0},\cancel{0}1\cancel{6}\cancel{2}r^2+r^3$ $+0,000183\cancel{7}\cancel{0}\cancel{8} \quad -0,068\cancel{0}\cancel{4} \quad +\cancel{6},\cancel{3}$ $-0,060642 \quad +11,23$ $+0,061$
Summa	$+0,0005416 \quad +11,162r$
$-0,00004852+s=r$	

Opus verò sub fine, præsertim in æquationibus plurium dimensionum, hâc methodo multùm abbreviabitur. Determinato quousque velis radicem extrahi, tot loca post primam figuram coefficientis penulti-

mi

Caput Secundum.

mi termini æquationum, in dextrâ parte diagrammatis resultantium, adnumera, quot supersunt loca in quotiente complenda, et subsequentes decimales neglige. In ultimo verò termino decimales post tot plura loca neglige, quot in quotiente complentur loca decimalia. Inque antepenultimo termino neglige omnes post tot pauciora loca. Et sic deinceps arithmeticè progrediendo per intervallum istud locorum; sive quod perinde est, tot figuras passim elidendo, quot in penultimo termino; modò depressissima earum loca sint in arithmeticâ progressione juxta seriem terminorum; aut circulis compleri subintelligantur, ubi res aliter eveniat. Sic in exemplo jam posito, si cupiam ut quotiens ad octavum tantùm decimalem locum compleatur; inter substituendum, $00054+r$ pro q, ubi quatuor loca decimalia in quotiente complentur, ac totidem supersunt complenda, potui figuras in inferioribus quinque locis omisisse, quas eapropter lineolâ transversim notavi; imo primum terminum r^3, etsi coefficientem, 99999 habuisset, potui tamen penitus omisisse. Expunctis itaque figuris istis, pro subsequente operatione prodit summa $0{,}0005417+11{,}162r$; quæ, per divisionem adusque præscriptum terminum peractam, dat $-0{,}00004852$ pro r, quod quotientem ad optatam periodum complet.

Denique negativam partem quotientis ab affirmativâ subduco, et oritur $2{,}09455148$ quotiens absoluta.

3. Præterea notandum est, quòd, sub initio operis, si dubitarem an $0{,}1=p$ ad veritatem satis accederet, vice $10p-1=0$ finxissem $6p^2+10p-1=0$, et ejus radicis nihilo propioris primam figuram in quotiente scripsissem. Et hoc modo secundam vel etiam tertiam quotientis figuram explorare convenit, ubi in æquatione secundariâ, circa quam versaris, quadratum coefficientis penultimi termini non sit decies majus, quàm factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi. Quinimo laborem plerumque minues, præsertim in æquationibus plurimarum dimensionum, si figuras omnes quotienti addendas hoc modo (id est, extrahendo minorem radicum ex tribus ultimis terminis æquationis ejus secundariæ) quæras. Sic enim figuras duplo plures in quotiente quâlibet vice lucraberis.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

De Speciosâ Æquationum Resolutione.

HIS in numeris sic ostensis, consimiles operationes in speciebus explicandæ restant, de quibus convenit sequentia prænoscere.

I. Quòd è speciebus coefficientibus aliqua præ reliquis (si sint plures) insignienda sit, ea nempe, quæ est, aut fingi potest esse, omnium longè minima, vel maxima, vel datæ quantitati vicinissima: cujus rei causa est, ut ob ejus dimensiones, in numeratoribus vel denominatoribus terminorum quotientis, perpetim auctas, illi termini continuò minores, et inde quotiens radici propinquior evadat; sicut antè de specie x, in exemplis reductionum per divisionem et extractionem radicum, manifestum esse potest. Pro ilthâc verò specie in sequentibus ut plurimùm usurpabo etiam x vel z, quemadmodum et y, p, q, r, s, &c. pro specie radicali extrahendâ.

II. Siquando fractiones complexæ, vel surdæ quantitates, in æquatione propositâ, vel pòst in operatione occurrant, tolli debent per methodos analystis satis notas. Quemadmodum si habeatur $y^3+\frac{b^2}{b-x}y^2-x^3=0$, multiplico per $b-x$, et ex facto $by^3-xy^3+b^2y^2-bx^3+x^4=0$, valorem y elicio. Vel possum fingere $y\times\overline{b-x}=v$, et sic scribendo $\frac{v}{b-x}$ pro y, orietur $v^3+b^2v^2-b^3x^3+3b^2x^4-3bx^5+x^6=0$: dein, extractâ radice v, divido quotientem per $b-x$ ut obtineatur valor y. Item si proponatur $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}=0$, fingo $y^{\frac{1}{2}}=v$, et $x^{\frac{1}{3}}=z$; et sic, scribendo v^2 pro y, et z^3 pro x, oritur $v^6-z^3v+z^4=0$; quâ æquatione resolutâ, restituo y et x. Scilicet radix invenietur, $v=z+z^3+6z^5$ &c. et, restitutis y et x, orietur $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}+x+6x^{\frac{5}{3}}$ &c. et quadrando $y=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}+13x^2$ &c.

Ad eundem modum siquæ sint negativæ dimensiones ipsorum x & y, tollo, multiplicando per easdem x & y. Sic habito $x^3+3x^2y^{-1}-2x^{-1}-16y^{-3}=0$, multiplico per x & y^3; oriturque $x^4y^3+3x^3y^2-2y^3-16x=0$. Et habito $x=\frac{aa}{y}-\frac{2a^3}{y^2}+\frac{3a^4}{y^3}$, duco in y^3, et oritur $xy^3=a^2y^2-2a^3y+3a^4$. Et sic de cæteris.

III. Æquatione sic præparatâ, opus ab inventione primi termini

mini quotientis initium ſumit; de quâ, ut et conſimili ſubſequentium terminorum inventione, hæc eſto Regula generalis, cùm ſpecies indefinita (x vel z) parva eſſe fingitur, ad quem caſum cæteri dúo caſus ſunt reducibiles.

E terminis, in quibus ſpecies radicalis (y, p, q vel r, &c.) non reperitur, ſelige depreſſiſſimum reſpectu dimenſionum indefinitæ ſpeciei (x vel z, &c.) dein alium terminum, in quo ſit alia ſpecies radicalis, ſelige; talem nempe, ut progreſſio dimenſionum utriuſque præfatæ ſpeciei, à termino priùs aſſumpto ad hunc terminum continuata, quàm maximè poteſt deſcendat, vel minimè aſcendat. Et ſiqui ſint alii termini, quorum dimenſiones cum hâc progreſſione, ad arbitrium continuatâ, conveniant, eos etiam ſelige. Deinque ex his ſelectis terminis tanquam nihilo æqualibus quære valorem dictæ ſpeciei radicalis, et quotienti appone.

2. Cæterùm ut hæc Regula magis eluceſcat, placuit inſuper ope ſequentis diagrammatis exponere. Deſcripto angulo recto BAC, latera ejus BA, AC, divido in partes æquales, et inde normales erigo diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia quadrata vel parallelogramma, quæ concipio denominata eſſe à dimenſionibus ſpecierum x et y, prout vides in fig. I. inſcriptas.

Fig. 1.

B	x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	
	x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	
	x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	
	x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5	
A	0	y	y^2	y^3	y^4	y^5	C

Fig. 2.

Deinde cùm æquatio aliqua proponitur, parallelogramma, ſingulis ejus terminis correſpondentia, inſignio notâ aliquâ. Et Regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis parallelogrammis applicatâ, quorum unum ſit humillimum in columnâ ſiniſtrâ juxta AB, et alia ad Regulam dextrorſum ſita, cæteraque omnia, non contingentia Regulam, ſupra eam jaceant: ſeligo terminos æquationis per parallelogramma contingentia regulam deſignatos, et inde quæro quantitatem quotienti addendam.

3. Sic ad extrahendam radicem y ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma, hujus terminis reſpondentia, ſigno

no notâ aliquâ $*$, ut vides in Schem. 2. Dein applico regulam DE ad inferiorem è locis fignatis in finiftrâ columnâ, eamque ab inferioribus ad fuperiora dextrorfum gyrare facio, donec alium fimiliter, vel fortè plura, è reliquis fignatis locis cœperit attingere; videoque loca fic attacta effe x^3, x^2y^2 et y^6. E terminis itaque $y^6-7a^2x^2y^2+6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (et infuper fi placet reductis ad $v^6-7v^2+6=0$, ponendo $y=v\sqrt{ax}$) quæro valorem y; et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$ et $-\sqrt{2ax}$: quorum quemlibet pro initio quotientis accipere liceat, prout è radicibus quampiam extrahere decretum eft. Resolutio Speciosa.

Sic ex $y^5-by^2+9bx^2-x^3=0$, feligo $-by^2+9bx^2$, et inde obtineo $+3x$ pro initiali termino quotientis.

Et ex $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$. Seligo $y^3+a^2y-2a^3$, et radicem ejus, $+a$, fcribo in quotiente.

Et ex $x^2y^5-3c^4xy^2-c^5x^2+c^7=0$. Seligo $x^2y^5+c^7$, quod exhibet $-\sqrt[5]{\frac{c^7}{x^2}}$ pro initio quotientis. Et fic de cæteris.

4. Cæterùm invento hoc termino, fi is contingat effe negativæ poteftatis, æquationem per eandem indefinitæ fpeciei poteftatem deprimo, eò, ut non opus fit inter folvendum deprimere; et infuper ut Regula de fuperfluis terminis elidendis, mox tradenda, aptè poffit adhiberi. Sic propofito $8z^6y^3+az^6y^2-27a^9=0$; cujus quotiens exordiri debet à $\frac{3a^3}{2z^2}$, deprimo per zz; ut fiat, $8z^4y^3+az^4y^2-27a^9z^{-2}=0$, antequam folutionem ineo.

5. Subfequentes quotientum termini eâdem methodo ex æquationibus fecundariis, inter operandum prodeuntibus, eruuntur; fed ut plurimùm leviori curâ: res enim peragi folet, dividendo depreffiffimum è terminis, cum indefinitè parvâ fpecie (x, xx, x^3, &c.) abfque fpecie radicali (p, q, r, &c.) affectis, per quantitatem, quâcum fpecies illa radicalis, unius tantùm dimenfionis, abfque alterâ indefinitâ fpecie, afficitur; et exitum fcribendo in quotiente. Sic in exemplo fequente, termini $\frac{x}{4}$, $\frac{x^2}{64a}$, $\frac{131x^3}{512a^2}$, &c. eliciuntur dividendo a^2x, $\frac{1}{16}ax^2$, $\frac{131}{128}x^3$ &c. per $4aa$.

6. His præmiffis, reftat ut praxin Refolutionis exhibeam.

Sit itaque $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, æquatio refolvenda; et ex e terminis $y^3+aay-2a^3=0$, æquatione fictitiâ juxta tertium è præ-

2 miffis,

miſſis, elicio $y-a=0$, et ſcribo $+a$ in quotiente. Deinde cùm $+a$ non accuratè valeat y, pono $a+p=y$, et pro y, in terminis æquationis in margine ſcriptis, ſubſtituo $a+p$, terminoſque reſultantes (p^3+3ap^2+axp &c.) rurſum ſcribo in margine; ex quibus iterum, juxta tertium è præmiſſis, excerpo terminos $+4a^2p+a^2x=0$ pro æquatione fictitiâ; quæ cùm exhibeat $p=-\frac{1}{4}x$, pono $-\frac{1}{4}x$ in quotiente. Præterea cùm $-\frac{1}{4}x$ non accuratè valet p, ſcribo $-\frac{1}{4}x+q=p$, et pro p, in terminis marginalibus, ſubſtituo $-\frac{1}{4}x+q$, terminoſque reſultantes ($q^3-\frac{3}{4}xq^2+3aq^2$ &c.) iterum ſcribo in margine; ex quibus denuò, juxta Regulam præfatam, ſeligo terminos $4a^2q-\frac{1}{16}ax^2=0$, pro æquatione fictitiâ; quæ cùm exhibeat $q=\frac{x^2}{64a}$, ſcribo $+\frac{x^2}{64a}$ in quotiente. Porro cùm $\frac{x^2}{64a}$ non accurate valeat q, pono $\frac{x^2}{64a}+r=q$, et pro q, in terminis marginalibus, ſubſtituo $\frac{x^2}{64a}+r$, et ſic opus ad placitum produco, prout indicat ſubjectum diagramma.

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$$

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$$

$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$
	$+a^2y$	$+a^3+a^2p$
	$+axy$	$+a^2x+axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{1}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x+4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2+axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	q^3	$*$
	$-\frac{3}{4}xq^2$	$*$
	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\left(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

7. Quòd ſi quotientem ad certam uſque periodum produci cupiam, ut x nempe, in ultimo ejus termino, ultra datum dimenſionum numerum non aſcendat, terminos inter ſubſtituendum ſemper omitto, quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei Regula eſto, quòd poſt primum terminum, ex quâlibet quantitate in margine collaterali reſultantem, non addantur plures dextrorſum, quàm iſtius primo

mò resultantis termini dimensio à periodicâ, sive maximâ dimensione quotientis deficit gradibus. Ut in hoc exemplo, si cupiam ut quotiens (sive x in quotiente) ad quatuor tantùm dimensiones ascendat, omitto omnes terminos post x^4, & post x^3 pono unicum tantùm. Terminos itaque post notam $*$ delendos esse concipe: et opere sic continuato, donec ultimò ad terminos $\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3 + 4a^2r - \frac{1}{2}axr + \frac{9}{32}x^2r$ deveniatur, in quibus p, q, r vel s, &c. residuum radicis extrahendæ, sit unicæ tantùm dimensionis; tot terminos $\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ per divisionem elicies, quot, ad complendum quotientem, deesse videbis. Atque ita tandem obtinebitur $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$. Resolutio Speciosa.

8. Plenioris illustrationis gratiâ, dedi aliud exemplum, resolvendo $\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - z = 0$; ubi proponitur inventio quotientis ad quintam tantùm dimensionem, terminique superflui post notam (&c.) negliguntur.

$y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z + p = y$	$+\frac{1}{5}y^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}y^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$ &c.
	$+\frac{1}{3}y^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$ &c.
	$-\frac{1}{2}y^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$ &c.
	$+ y$	$+ z + p$
	$- z$	$- z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+ zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$ &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$ &c.
	$+ z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$ &c.
	$+ z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$- zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+ p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

9. Atque ita si cupiam æquationem $\frac{63y^{11}}{2816} + \frac{35}{1152}y^9 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{1}{6}y^3 + y - z = 0$, adusque nonam tantùm dimensionem quotientis resolvi, ante opus initum negligo terminum $\frac{63}{2816}y^{11}$; deinde, inter operandum, negligo etiam omnes terminos post z^9, post z^7 pono unicùm, ac duos tantùm post z^5; eò quòd percipio quotientem ubique per gradus binarum unitatum (hoc modo z, z^3, z^5, &c.) debere ascendere. Tandemque prodit $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$.

10. Et hinc patet artificium, quo æquationes in infinitum affectæ, vel utcunque multis, numerovè infinitis terminis constantes, possunt solvi. Scilicet omnes termini ante opus initum debent negligi, in quibus dimensio speciei indefinitè parvæ, non

 affectæ

CAPUT TERTIUM.

affectæ cum radicali specie, transcendit maximam dimensionem in quotiente desideratam; vel ex quibus, substituendo pro radicali specie primum terminum quotientis, ope tessellatæ tabulæ inventum, non nisi ejusmodi transcendentes termini possunt emergere. Sic in exemplo novissimo terminos omnes supra y^9, quamvis infinitè progrederentur, omisissem. Et sic in hâc æquatione

$$0 = \begin{cases} -8 + z^2 - 4z^4 + 9z^6 - 16z^8 \ \&c. \\ +y \text{ in } z^2 - 2z^4 + 3z^6 - 4z^8 \ \&c. \\ -y^2 \text{ in } z^2 - z^4 + z^6 - z^8 \ \&c. \\ +y^3 \text{ in } z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8 \ \&c. \end{cases}$$

ut radix cubica ad quatuor tantùm dimensiones ipsius z extrahatur, omitto omnes in infinitum terminos post $+y^3$ in $z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6$, et post $-y^2$ in $z^2 - z^4 + z^6$, et post $+y$ in $z^2 - 2z^4$, et post $-8 + z^2 - 4z^4$. Et hanc tantùm æquationem, $\frac{1}{3}z^6y^3 - \frac{1}{2}z^4y^3 + z^2y^3 - z^6y^2 + z^4y^2 - z^2y^2 - 2z^4y + z^2y - 4z^4 + z^2 - 8 = 0$, resolvendam sumo, siquidem $2z^{-\frac{2}{3}}$ (primus nempe quotientis terminus) pro y in reliquâ æquatione, per $z^{\frac{4}{3}}$ depressâ, substitutus, dat plures ubique quàm quatuor dimensiones.

11. Quæ de altioribus æquationibus dixi, ad quadraticas etiam applicari possunt. Quemadmodum si hujus

$$0 = \begin{cases} yy \\ -y \text{ in } a + x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} \ \&c. \\ + \frac{x^4}{4a^2} \end{cases}$$

radicem ad usque periodum x^6 desiderem, mitto terminos in infinitum post $-y$ in $a + x + \frac{x^2}{a}$; et isthanc tantùm, $y^2 - ay - xy - \frac{x^2}{a}y + \frac{x^4}{4a^2} = 0$ (sive id fiat hâc lege; $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2a} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^3}{2a}}$, ut solet, sive expeditiùs per methodum de affectis æquationibus jam traditam) resolvo: et exit $y = \frac{x^4}{4a^3} - \frac{x^5}{4a^4} *$, ultimo desiderato termino existente nullo.

12. Postquam verò radices ad convenientem periodum extractæ sunt, possunt aliquando ex analogiâ seriei observatâ, ad placitum produci. Sic hanc $z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c. (radicem æquationis infinitæ $z = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$ &c.) perpetuò produces, dividendo ultimum

ultimum terminum per hos ordine numeros, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Et hanc, $z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ &c. dividendo per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, &c. Et hanc $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. multiplicando per hos $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, &c. Et ſic in aliis ([b]). RESOLUTIO SPECIOSA.

13. Cæterùm in inventione primi termini quotientis, et nonnunquam ſecundi tertiive, difficultas etiamnum enodanda ſupereſt. Poteſt enim valor ejus, ſecundum præcedentia quæſitus, eſſe ſurda, ſive inextricabilis, radix æquationis multipliciter affectæ. Quod cùm accidit, modò non ſit inſuper impoſſibilis, illum literâ aliquâ deſignabis, dein operabere tanquam ſi cognitum haberes. Quemadmodum in exemplo $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$, ſi radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, fuiſſet ſurda, vel ignota; finxiſſem quamlibet b pro eâ ponendam eſſe, et reſolutionem (puta ad tertiam dimenſionem quotientis) ut ſequitur perfeciſſem.

$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$. Sit $cc = 3b + a^2$.		
$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{a^5b^3x^3}{c^{10}}$ &c.		
$b + p = y$	$+y^3$ $+axy$ $+aay$ $-x^3$ $-2a^3$	$+b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$ $+abx + axp$ $+aab + aap$ $-x^3$ $-2a^3$
$\frac{-abx}{cc} + q = p$	p^3 $+3bp^2$ $+axp$ $+ccp$ $-x^3$ $+abx$	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c. $+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}$ $\frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c. $-\frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$ $-abx + ccq$ $-x^3$ $+abx$
$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}\Big)\ \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6}\ \Big(\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8}$ &c.		

Scribens b in quotiente, ſuppono $b+p=y$, & pro y ſubſtituo ut vides: unde prodit $p^3 + 3p^2b +$ &c. rejectis terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quòd b ſupponitur radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $\frac{-abx}{3b^2 + a^2}$ quotienti apponendum, & $\frac{-abx}{3b^2 + a^2} + q$ ſubſtituendum pro p.

([b]) Vide Analyſ. per Æquat. Infinit. Cap. VIII.

 Brevitatis

CAPUT TERTIUM.

Brevitatis autem gratiâ fcribo cc pro $3b^2+a^2$, cavendo tamen ut $3bb+aa$ reftituatur, ubi terminos fic abbreviari poffe percipiam. Completo opere, affumo numerum aliquem pro a, et hanc $y^3+a^2y-2a^3=0$, ficut de numerali æquatione oftenfum fuprà, refolvo, et quemlibet ejus radicem, modò tres haberet, pro b fubftituo. Vel potius hujufmodi æquationes à fpeciebus, ut poffum, libero, præfertim ab indefinitâ; idque pro more quam volui innuere, pag. 399, lin. 6 & 7; et pro cæteris tantùm, fiquæ fuperfint indelebiles, pono numeros. Sic $y^3+a^2y-2a^3=0$, liberabitur ab a dividendo radicem per a, fietque $y^3+y-2=0$, cujus inventa radix ducta in a fubftitui debet pro b.

14. Hactenus indefinitam fpeciem fuppofui parvam effe. Quòd fi datæ quantitati vicina fupponatur, pro indefinitè parvâ differentiâ, pono fpeciem aliquam, et hâc fubftitutâ, folvo ut antè. Quemadmodum in $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-a-x=0$, cognito vel ficto x effe ejufdem propè quantitatis ac a, pono z differentiam inter ea; et fcribendo $a+z$ vel $a-z$ pro x, orietur $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y-$ vel $+z=0$, folvendum ut in præcedentibus.

15. Sin autem fpecies illa fupponatur indefinitè magna, pro reciproco ejus indefinitè parvo, pono fpeciem aliquam; quâ fubftitutâ folvo ut antè. Sic habito $y^3+y^2+y-x^3=0$: ubi x cognofcitur, vel fingitur effe valdè magnum, pro reciprocè parvo $\frac{1}{x}$ pono z; et fubftituto $\frac{1}{z}$ pro x, orietur $y^3+y^2+y-\frac{1}{z^3}=0$, cujus radix eft $\frac{1}{z}-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}z+\frac{7}{81}z^2+\frac{14}{729}z^4$ &c. et x fi placet reftituto, fit $y=x-\frac{1}{3}-\frac{2}{9x}+\frac{7}{81x^2}+\frac{14}{729x^4}$ &c.

16. Siquando ex aliquâ harum trium fuppofitionum res non omnino, aut non commodè, fuccedat, ad aliam recurri poteft. Sic in $y^4-x^2y^2+xy^2+2y^2-2y+1=0$, cùm primus terminus obtineri deberet, fingendo $y^4+2y^2-2y+1=0$, quæ tamen nullam admittit poffibilem radicem, tento quid fiet aliter; quemadmodum fi fingam x parùm differre à $+2$, five effe $2+z=x$, fubftituendo $2+z$ vice x prodibit $y^4-z^2y^2-2zy^2-2y+1=0$, et quotiens exordietur ab $+1$. Vel fi fingam x indefinitè magnam effe, five $\frac{1}{x}=z$, obtinebitur $y^4-\frac{y^2}{z^2}+\frac{y^2}{z}+2y^2-2y+1=0$, et $+z$ pro initio quotientis.

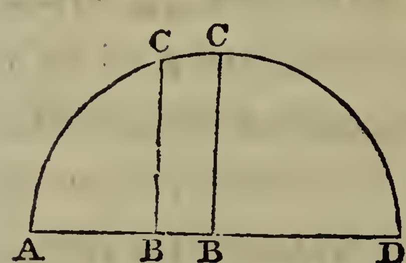
Et hâc ratione ſecundum varias hypotheſes procedendo, licebit variis modis extrahere, ac deſignare radices. RESOLUTIO SPECIOSA.

17. Quòd ſi cupias explorare, quot modis id poteſt fieri, tentabis quænam quantitates, pro indefinitâ ſpecie in æquationem propoſitam ſubſtitutæ, efficient diviſibilem per y + vel − aliquâ quantitate, vel per y ſolùm. Id quod, verbi gratiâ, in æquatione $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$, eveniet ſubſtituendo $+a$, vel $-a$, vel $-2a$, vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$, &c. pro x. Atque ita poſſis commodè ſupponere quantitatem x parùm ab $+a$, vel $-a$, vel $-2a$, vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$, differre, et inde radicem propoſitæ æquationis tot modis extrahere. Imo et fortaſſe tot aliis modis fingendo differentias iſtas eſſe indefinitè magnas. Quinetiam ſi aliam atque aliam è ſpeciebus radicem definientibus pro indefinitâ adhibeas, poſſis aliis adhunc fortaſſe modis propoſitum conſequi; et etiamnum aliis, ſubſtituendo valores quâcunque ratione fictos (quales ſunt $az+bz^2$, $\frac{a}{b+x}$, $\frac{a+cz}{b+z}$, &c.) pro indefinitâ ſpecie, et in æquatione reſultante operando ſicut in præcedentibus.

18. Cæterùm ut concluſionum veritas conſtet, quotientes nempe ſic extractas, dum producuntur, ita propriùs ad radicem accedere, ut minùs tandem quâvis datâ quantitate differant, adeoque in infinitum productas non omnino differre: perpende, quòd quantitates in ſiniſtrâ columnâ dextræ partis diagrammatum, ſunt ultimi termini æquationum, quarum p, q, r, s, &c. exiſtunt radices; et inde quòd, ipſis evaneſcentibus, illæ p, q, r, s id eſt differentiæ inter quotientem, et quæſitam radicem ſimul evaneſcunt: adeoque quotiens tunc non differt à radice. Quamobrem ſub initio operis, ſi terminos in dictâ columnâ ſeſe omnes deſtruere videas, conclude quotientem, eatenus extractam, eſſe juſtam radicem. Sin aliter, videbis tamen terminos, in quibus indefinitè parva ſpecies eſt pauciorum dimenſionum, id eſt, longè maximos, è columnâ iſtâ perpetuò tolli; ut tandem non reſtant niſi datâ quâvis quantitate minores, et proinde non majores nihilo, cùm opus infinitè producitur. Quare Quotiens infinitè extracta fiet etiam juſta radix.

19. Etſi denique ſpecies, quas hactenus, perſpicuitatis gratiâ, ſuppoſui indefinitè parvas eſſe, quantumvis magnæ ſupponantur, tamen

tamen veræ erunt quotientes, ut minùs citò ad juſtam radicem convergant, quemadmodum ex analogiâ rei conſtet. Sed hîc radicum termini, maximæque et minimæ quantitates ſpectandæ veniunt: nam infinitarum cum finitis æquationibus communia ſunt hujuſmodi ſymptomata. Radix autem in his maxima fit vel minima, quando maxima vel minima eſt differentia ſummæ affirmativorum terminorum à ſummâ negativorum, ac terminatur, cùm indefinita quantitas, quam ideo parvam eſſe non immeritò finxi, non poteſt major ſumi, quin magnitudo radicis in infinitum proſiliet; hoc eſt, fiet impoſſibilis: verbi gratiâ, poſito ACD ſemicirculo ſuper diametro AD deſcripto, et BC ordinatim applicata. Dic $AB = x$, $BC = y$, $AD = a$. Et erit $y = (\sqrt{ax - x^2}) = \sqrt{ax} - \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c. ut ſuprà. Fit ergo BC, ſive y,



maxima cùm $\sqrt{ax}$ maximè ſuperat omnes $\frac{x}{2a}\sqrt{ax} + \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} + \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; id eſt, cùm ſit $x = \frac{1}{2}a$; terminabitur autem cùm ſit $x = a$: quia ſi ſumas x majorem quàm a ſumma omnium terminorum $-\frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$ &c. erit infinita. Eſt et alius terminus, cùm ponitur $x = 0$, propter impoſſibilitatem radicalis $\sqrt{-ax}$; quibus terminis correſpondent ſemicirculi limites A et D.

CAPUT QUARTUM.

Doctrina Fluxionum.

HACTENUS de modis computandi, quorum poſthac frequens erit uſus. Jam reſtat, ut, in illuſtrationem Artis Analyticæ, tradam aliquot Problematum ſpecimina, qualia præſertim natura Curvarum miniſtrabit. Sed imprimis obſervandum venit, quòd hujuſmodi difficultates poſſunt omnes ad hæc duo tantùm Problemata reduci, quæ circa ſpatium motu locali, utcunque accelerato vel retardato, deſcriptum ponere licebit.

I. Spatii longitudine continuò (ſive ad omne tempus) datâ, Celeritatem Motûs ad tempus propoſitum invenire.

II. Celeritate

II. Celeritate Motûs continuò datâ, longitudinem descripti spatii ad tempus propositum invenire. Doctrina Fluxionum.

Sic in æquatione $xx = y$. Si y designat spatii longitudinem, ad quodlibet tempus quod aliud spatium x uniformi celeritate $\dot{x}$ crescendo mensurat et exhibet, descriptam: tunc $2\dot{x}x$ designabit celeritatem, quâ spatium y, ad idem temporis momentum, describi pergit; et contrà: et hinc est, quòd in sequentibus considerem quantitates, quasi generatæ essent per incrementum continuum, ad modùm spatii quod mobile percurrendo describit.

2. Cùm autem Temporis nullam habemus æstimationem, nisi quatenus id per æquabilem motum localem exponitur et mensuratur, et præterea cùm quantitates ejusdem tantùm generis inter se conferri possunt, et earum incrementi et decrementi celeritates inter se; eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam: sed è propositis quantitatibus, quæ sunt ejusdem generis, aliquam æquabili fluxione augeri fingam, cui cæteræ tanquam tempori referantur, adeoque cui nomen temporis analogicè tribui mereatur. Si quando itaque vocabulum Temporis in sequentibus occurrat (quemadmodum perspicuitatis et distinctionis gratiâ nonnunquam intertexui) eo nomine non Tempus formaliter spectatum subintelligi debet; sed illa alia quantitas, cujus æquabili incremento, sive fluxione, tempus exponitur et mensuratur.

3. Quantitates autem quas ut sensim crescentes indefinitè considero, quo distinguam ab aliis quantitatibus, quæ in æquationibus quibuscunque pro determinatis et cognitis habendæ sunt ac initialibus literis a, b, c, &c. designantur, posthac denominabo Fluentes, ac designabo finalibus literis v, x, y et z. Et celeritates, quibus singulæ à motu generante fluunt et augentur, quas possim fluxiones vel simpliciter celeritates vocitare, designabo literis $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$; nempe pro celeritate quantitatis v ponam $\dot{v}$, et sic pro celeritatibus aliarum quantitatum x, y et z ponam $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ respectivè.

4. His præmissis, è vestigio rem aggredior; imprimis duorum jam modo propositorum Problematum solutionem exhibiturus.

PROB.

Problema Primum.

PROBLEMA PRIMUM.

Relatione quantitatum Fluentium inter ſe datâ, Fluxionum relationem determinare.

SOLUTIO.

Æquationem, quâ data relatio exprimitur, diſpone ſecundum dimenſiones alicujus fluentis quantitatis, puta x, ac terminos ejus multiplica per quamlibet Arithmeticam progreſſionem; ac deinde per $\frac{\dot{x}}{x}$. Et hoc opus in quâlibet fluenti quantitate ſeorſim inſtitue. Dein omnium factorum ſummam pone nihilo æqualem, et habes æquationem deſideratam (c).

5. Exemp. 1. Si quantitatum x et y relatio ſit $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, terminos primò ſecundum x, ac deinde ſecundum y diſpoſitos multiplico ad hunc modum.

$$\begin{array}{llllll} \text{Mult.} & x^3 & -\; ax^2 & +axy-y^3 & & \\ \text{per} & \frac{3\dot{x}}{x} & \frac{2\dot{x}}{x} & \frac{\dot{x}}{x} & 0 & \\ \text{fit} & 3\dot{x}x^2 & -\,2\dot{x}ax & +\dot{x}ay & -\;* & \end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll} \text{Mult.} & -\;y^3 & +axy & -axx & \\ & & & +\;x^3 & \\ \text{per} & \frac{3\dot{y}}{y} & \frac{\dot{y}}{y} & 0 & \\ \text{fit} & -\,3\dot{y}y^2 & +ax\dot{y} & * & \end{array}$$

Et factorum ſumma eſt $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$: æquatio quæ dat relationem inter fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{y}$. Nempe ſi aſſumas x ad arbitrium, æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ dabit y. Quibus determinatis erit $\dot{x}:\dot{y}::3y^2-ax:3x^2-2ax+ay$.

6. Exemp. 2. Si quantitatum x, y et z, relatio ſit $2y^3+x^2y-2cyz+3yz^2-z^3=0$

$$\begin{array}{lll} \text{Mult.} & 2y^3+x^2y & -z^3 \\ & -2czy & \\ & +3z^2y & \\ \text{per} & \frac{2\dot{y}}{y}\;.\;0 & -\frac{\dot{y}}{y} \\ \text{fit} & 4\dot{y}y^2\;\;* & +\frac{\dot{y}z^3}{y} \end{array}
\quad
\begin{array}{lll} \text{Mult.} & x^2y+2y^3 & \\ & -2cyz & \\ & +3yz^2 & \\ & -\;z^3 & \\ \text{per} & \frac{2\dot{x}}{x}\;. & 0 \\ \text{fit} & 2\dot{x}xy+ & * \end{array}
\quad
\begin{array}{ll} \text{Mult.} & -z^3+3yz^2-2cyz+x^2y \\ & \qquad\qquad\qquad +2y^3 \\ \text{per} & \frac{3\dot{z}}{z}\;.\;\frac{2\dot{z}}{z}\;.\;\frac{\dot{z}}{z}\;.\;0 \\ \text{fit} & -3\dot{z}z^2+6\dot{z}yz-2c\dot{z}y\;* \end{array}$$

Quare fluendi celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ relatio eſt $4\dot{y}y^2+\frac{\dot{y}z^3}{y}+2\dot{x}xy-3\dot{z}z^2+6\dot{z}yz-2c\dot{z}y=0$.

(c) Vide Librum de Quad. Curv. Prop. I.

7. Cæterùm

6. Cæterùm cùm tres ſint hîc fluentes quantitates x, y & z, deberet alia inſuper æquatio dari, quâ relatio inter ipſas, ut et inter earum fluxiones, penitus determinetur. Quemadmodum ſi ponitur $x+y-z=0$; exinde fluxionum alia relatio juxta regulam erit $\dot{x}+\dot{y}-\dot{z}=0$. Confer jam haſce cum præcedentibus æquationibus, eliminando quamlibet è tribus quantitatibus, et quamlibet etiam è tribus earum fluxionibus, et reliquorum relationes penitius determinatas obtinebis. INVENTIO FLUXIONUM.

8. Siquando in æquatione propoſitâ inſint fractiones complexæ, aut ſurdæ quantitates, pro ſingulis pono totidem literas, eaſque fingens deſignare quantitates fluentes, operor ut antè. Dein ſupprimo et extermino literas aſcriptitias, ut hîc videre eſt.

9. EXEMP. 3. Si quantitatum x et y relatio ſit $yy-aa-x\sqrt{aa-xx}$: pro $x\sqrt{aa-xx}$ ſcribo z; et inde habeo duas æquationes $y^2-a^2-z=0$, et $aaxx-x^4-z^2=0$: quarum prior ut antè dabit $2\dot{y}y-\dot{z}=0$, pro relatione celeritatum $\dot{y}$ et $\dot{z}$; et poſterior dabit $2a^2\dot{x}x-4\dot{x}x^3-2\dot{z}z=0$, ſive $\frac{aa\dot{x}x-2\dot{x}x^3}{z}=\dot{z}$, pro relatione celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{z}$. Jam $\dot{z}$ ſuppreſſo, fiet $2\dot{y}y-\frac{aa\dot{x}x+2\dot{x}x^3}{z}=0$: dein reſtituto $x\sqrt{aa-xx}$ pro z, habebitur $2\dot{y}y-\frac{aa\dot{x}+2\dot{x}x^2}{\sqrt{aa-xx}}=0$, relatio inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$, quæ quærebatur.

10. EXEMP. 4. Si $x^3-ay^2+\frac{by^3}{a+y}-x^2\sqrt{ay+x^2}=0$ deſignat relationem inter x et y: pono $z=\frac{by^3}{b+y}$, et $v=x^2\sqrt{ay+x^2}$, et inde nactus ſum tres æquationes, $x^3-ay^2+z-v=0$, $az+yz-by^3=0$, et $ax^4y+x^6-vv=0$. Prima dat $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\dot{z}-\dot{v}=0$. Secunda dat $a\dot{z}+\dot{z}y+\dot{y}z-3b\dot{y}y^2=0$, et tertia dat $4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4-2\dot{v}v=0$, pro relationibus celeritatum $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$. Ipſorum vero $\dot{z}$ et $\dot{v}$ valores per ſecundam ac tertiam inventos (nempe $\frac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}$ pro $\dot{z}$, et $\frac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}$ pro $\dot{v}$) ſubſtituo in primam, et oritur $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\frac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}-\frac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}=0$. Et vice z et v reſtitutis valoribus $\frac{by^3}{a+y}$ et $x^2\sqrt{ay+xx}$, prodit æquatio quæſita, $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\frac{3ab\dot{y}y^2+2b\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2}-\frac{4a\dot{x}xy+6\dot{x}x^3+a\dot{y}xx}{2\sqrt{ay+xx}}=0$, quâ relatio celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ deſignatur.

11. Quo pacto in aliis caſibus operandum eſt, quemadmodum

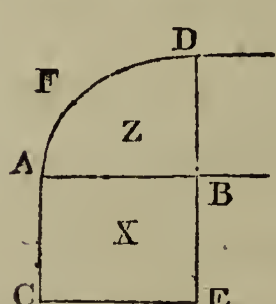
PROBLEMA PRIMUM.

cùm in æquatione propofitâ reperiuntur furdi denominatores, radicales cubicæ, radicales intra radicales, ut $\sqrt{ax+\sqrt{aa-xx}}$ aut alii ejufmodi perplexi termini, ex his credo manifeftùm effe.

12. Quinimo fi in æquatione quantitates involventur, quæ nullâ ratione geometricâ determinari et exprimi poffunt, quales funt Areæ vel Longitudines curvarum; tamen relationes fluxionum haud fecus inveftigantur, prout in exemplo fequente conftabit.

Præparatio in Exempl. 5.

13. Pono BD ordinatam effe in angulo recto ad AB, et quòd ADH fit Curva, quæ per relationem inter AB et BD, æquatione quâlibet exhibitam, definitur. AB vero dicatur x, et curvæ area ADB ad unitatem applicata dicatur z. Dein erige perpendiculum AC æquale unitati, et per C due CE parallelam AB et occurrentem BD in E, et concipiendo has duas fuperficies, ADB & ACEB, genitas effe per motum rectæ BED, manifeftum erit, quòd earum fluxiones (hoc eft fluxiones quantitatum $1 \times z$ & $1 \times x$, five quantitatum z & x) funt inter fe ut BD et BE, lineæ generantes. Eft ergo $\dot{z} : \dot{x} :: \mathrm{BD} : \mathrm{BE}$, five 1; adeoque $\dot{z} = \dot{x} \times \mathrm{BD}$.



14. Et hinc fit, quòd z in æquatione quâlibet defignante relationem inter x et aliam quamvis fluentem quantitatem y involvi poteft, et tamen fluxionum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ relatio nihilo minùs invenire.

15. EXEMP. 5. Quemadmodum fi proponatur $zz+axz-y^4=0$, pro defignandâ relatione inter x et y, ut et $\sqrt{ax-xx}=\mathrm{BD}$, pro curvâ determinandâ, quæ proin erit circulus: æquatio $zz+axz-y^4=0$, ficut in præcedentibus, dabit $2\dot{z}z+a\dot{z}x+a\dot{x}z-4\dot{y}y^3=0$, pro relatione celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$. Et præterea, cùm fit $\dot{z}=\dot{x}\times\mathrm{BD}$ five $=\dot{x}\sqrt{ax-xx}$, pro eo fubftitue hunc valorem, et orietur $\overline{2\dot{x}z+a\dot{x}x}\sqrt{ax-xx}+a\dot{x}z-4\dot{y}y^3=0$ æquatio definiens relationem celeritatum $\dot{x}$ et $\dot{y}$.

16. DEMONSTR. Fluentium quantitatum momenta (i. e. earum partes indefinitè parvæ, quarum additamento per fingula

temporis

temporis indefinitè parva ſpatia augentur) ſunt ut fluendi celeritates. Quare ſi cujuſvis, ut x, momentum per factum ex ejus celeritate $\dot{x}$, et infinitè parvâ quantitate o (i. e. per $\dot{x}$o) deſignetur, cæterorum v, y, z momenta per $\dot{v}$o, $\dot{y}$o, $\dot{z}$o, deſignabuntur, ſiquidem $\dot{v}$o, $\dot{x}$o, $\dot{y}$o, & $\dot{z}$o. Sunt inter ſe ut $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$. Inventio Fluxionum.

Jam cùm quantitatum fluentium (ut x & y) momenta (ut $\dot{x}$o & $\dot{y}$o) ſint additamenta infinitè parva, quibus illæ quantitates, per ſingula temporis infinitè parva intervalla, augentur; ſequitur, quòd quantitates illæ x et y, poſt quodlibet infinitè parvum temporis intervallum, futuræ ſunt $x+\dot{x}o$, et $y+\dot{y}o$. Et inde æquatio, quæ relationem quantitatum fluentium ad omne tempus indifferenter deſignat, æquè deſignabit relationem inter $x+\dot{x}o$, et $y+\dot{y}o$, ac inter x et y: adeo ut $x+\dot{x}o$ et $y+\dot{y}o$ pro quantitatibus iſtis, vice x et y, in dictam æquationem ſubſtitui poſſunt.

Detur itaque quælibet æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=o$, et ſubſtitue $x+\dot{x}o$ pro x, et $y+\dot{y}o$ pro y, et emerget.

$$\left.\begin{array}{llll} x^3+3\dot{x}ox^2 & +3\dot{x}^2oox & +\dot{x}^3o^3 & \\ -ax^2-2a\dot{x}ox- & a\dot{x}^2oo & & \\ +axy+\ a\dot{x}ox+ & a\dot{y}ox & +a\dot{x}\dot{y}oo & \\ -y^3\ \ -3\dot{y}oy^2 & -3\dot{y}^2ooy & -\dot{y}^3o^3 & \end{array}\right\} = o$$

Jam ex hypotheſi ſunt $x^3-ax^2+axy-y^3=o$; quibus deletis, et reliquis terminis per o diviſis, reſtabunt $3\dot{x}x^2+3\dot{x}^2ox+\dot{x}^3oo-2a\dot{x}x-a\dot{x}\dot{x}o+a\dot{x}y+a\dot{y}x+a\dot{x}\dot{y}o-3\dot{y}y^2-3\dot{y}^2oy-\dot{y}^3oo=o$. Et inſuper, cùm o ſupponitur eſſe infinitè parvum, eò ut momenta quantitatum deſignare poſſit; termini per illud multiplicati, reſpectu cæterorum, nihil valebunt. Rejicio itaque, et reſtat $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=o$, ut ſuprà in Exempl. 1.

Hinc obſervare eſt, quòd termini non multiplicati per o ſemper evaneſcent, ut et illi multiplicati per o pluſquam unius dimenſionis: et quòd reliquorum terminorum, per o diviſorum, ea ſemper erit forma, quam juxta regulam habere debent. Id quod volui oſtendere.

17. Et hoc monſtrato, cætera, quæ regula involvit, facilè conſequentur; quemadmodum quòd in æquatione propoſitâ plures fluentes quantitates involvi poſſunt, et quòd termini non modò

PROBLEMA SECUNDUM. per numerum dimenſionum quantitatum fluentium, ſed per quaſlibet alias Arithmeticas Progreſſiones multiplicari poſſunt; dummodo in operatione, juxta quamlibet fluentem quantitatem, ſit eadem terminorum differentia, et progreſſio ſecundum eundem cujuſque dimenſionum ordinem diſponatur ([d]). Et his conceſſis, quæ præterea in exemplis 3, 4 & 5, docentur per ſe manifeſta ſunt.

PROBLEMA SECUNDUM.

18. *Expoſitâ æquatione Fluxiones quantitatum involvente relationem quantitatum inter ſe invenire.*

Solutio Particularis.

CUM hoc Problema ſit præcedentis converſum, contrario modo ſolvi debet: utpote terminos per $\dot{x}$ multiplicatos diſponendo ſecundum dimenſiones ipſius x, dividendoque per $\frac{\dot{x}}{x}$, ac dein per progreſſionem; atque idem opus in terminis per $\dot{v}$, $\dot{y}$ vel $\dot{z}$ multiplicatis inſtituendo, et reſultantium ſummam, rejectis terminis redundantibus, ponendo æqualem nihilo.

19. EXEMPL. Sic expoſitâ æquatione $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$; operor ad hunc modum.

Divido	$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y$	divido	$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$
per $\frac{\dot{x}}{x}$ & fit	$3x^3 - 2ax^2 + axy$	per $\frac{\dot{y}}{y}$ fit	$-3y^3 \quad + ayx$
dein div. per	$3 \quad . \quad 2 \quad . \quad 1$	div. per	$3 \quad . \quad 1$
et fit	$x^3 \quad - ax^2 \quad + axy$	fit	$-y^3 \quad + axy$

Et ſumma $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, erit relatio deſiderata quantitatum

([d]) NIMIRUM ſi Æquationem quamlibet propoſitam, puta $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, in quantitatem $x^m y^n$ multiplicaveris, tranſmutaveris in hanc aliam; $x^{m+3}y^n - ax^{m+2}y^n + ax^{m+1}y^{n+1} - x^m y^{n+3} = 0$ quæ eaſdem quas prior illa quantitatum x, y inter ipſas relationes, alio licet modo, exprimet.

Jam ex tranſmutatâ, multiplicationem membrorum cum ſeriebus illis arithmeticis, quas tranſmutatæ indices conſtituunt, inſtituendo, hanc elicies fluxionum æquationem: $\overline{m+3}\,y^n x^{m+2}\dot{x} - \overline{m+2}.\,ay^n x^{m+1}\dot{x} + \overline{m+1}.\,ay^{n+1}x^m\dot{x} - my^{n+3}x^{m-1}\dot{x} - \overline{n+3}.\,x^m y^{n+2}\dot{y} + \overline{n+1}.ax^{m+1}y^n\dot{y} - n.ax^{m+2}y^{n-1}\dot{y} + nx^{m+3}y^{n-1}\dot{y} = 0.$

Quæ membris ejus omnibus à quantitate $x^m y^n$ diviſis, in hanc mutabitur; $\overline{m+3}.\,x^2\dot{x} - \overline{m+2}.ax\dot{x} + \overline{m+1}.ay\dot{x} - my^3x^{-1}\dot{x} - \overline{n+3}y^2\dot{y} + \overline{n+1}ax\dot{y} - nax^2y^{-1}\dot{y} + nx^3y^{-1}\dot{y} = 0$: quam minori quidem negotio è datâ deduxiſſes, ſi datam, ſecundum indices literæ x primùm, tum literæ y, ordinatm, in ſeries, primùm $m+3.\ m+2.\ m+1.\ m$, tum $n+3.\ n+2.\ n+1.\ n$, multiplicâſſes, et reliqua peregiſſes ex præceptis Newtoni. Hæc autem æquatio, fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ relationes mutuas

tum x et y. Ubi obfervandum venit, quòd etfi terminus axy bis refultavit, tamen non pono bis in hâc fummâ, $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ fed redundantem terminum rejicio. Et fic ubicunque terminus aliquis bis refultat, aut fæpiùs, fi de pluribus fluentibus quantitabus agitur, femel tantùm in fummâ terminorum fcribo. INVENTIO FLUENTIUM.

20. Sunt et aliæ circumftantiæ, quas artificis ingenio pro re natâ obfervandas effe remitto; nam fupervacaneum effet his multa verba impendere; fiquidem Problema non femper poteft hoc artificio folvi. Addo tamen, quòd poftquam artifex relationem fluentium quantitatum hâc methodo adeptus eft, fi juxta Prob. 1. poteft regredi ad expofitam æquationem fluxiones involventem, rectè operatus eft; fin fecùs vitiosè. Sic in exemplo propofito, ubi æquationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ adeptus fum, fi relatio inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$ ope primi Problematis viciffim inde requiratur, obtinebitur æquatio expofita $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$. Unde conftat æquationem $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, rectè inventam fuiffe. At fi æquatio $x\dot{x} - \dot{x}y + \dot{y}a = 0$, exponeretur, et inde præfcriptâ methodo elicerem $\frac{1}{2}x^2 - xy + ay = 0$, pro relatione inter x et y, vitiofa foret operatio; fiquidem exinde per Prob. 1. viciffim produceretur $\dot{x}x - \dot{x}y - \dot{y}x + \dot{y}a = 0$, quæ differt ab æquatione primò expofitâ.

21. Hæc itaque perfunctoriè notata prætermittens, folutionem generalem aggredior.

Preparatio in Generalem Solutionem.

Et imprimis obfervandum eft, quòd in expofitâ æquatione fymbola fluxionum, cùm fint quantitates diverfi generis à quantitatibus quarum funt fluxiones, in fingulis terminis debent ad

mutuas æquè exprimit, licet alio quidem modo, ac fimplicior illa, quam è datâ, multiplicando in feries quas datæ indices conftituunt, deducere licet; quæ hæc erit, $3x\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$.

Similiter in omni cafu, five in feries quas poteftatum indices conftituunt, five in illas quas conftituunt iidem indices datis quibufvis quantitatibus, m, n aucti, æquationem propofitam multiplices, & reliqua, quæ Newtonus præcepit, exfequaris, idem planè effeceris. Æquationes varias quidem efformaveris, fed quæ variis modis idem omnes fignificabunt; luculentè tamen aliæ, aliæ magis obfcurè. *Colfon ad Locum.*

Cæterùm rationem hanc inutiliter implicitam, quâ initio ufus eft, Newtonus poftea meritò repudiavit; multiplicationibus in feries indicum contentus. Cùm reverâ multiplicationibus illis in indices datis quantitatibus auctos vix aliud efficiatur, nifi ut æquatio fluxionalis, ex occultâ quafi æquationis propofitæ multiplicatione, formâ implicatiore prodeat. *Vide Wilfon. Appendix to Robins's Works.*

æque-

PROBLEMA SECUNDUM.

æque-multas dimenſiones aſcendere [e]. Et ubi res aliter ſe habet; alia alicujus fluentis quantitatis Fluxio ſubintelligi debet eſſe unitas, per quam termini depreſſiores toties multiplicantur, ut in omnibus ſymbola fluxionum ad eundem dimenſionum gradum aſcendant. Quemadmodum ſi exponitur æquatio $\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-xx=0$, tertiæ alicujus fluentis quantitatis, ut z, fluxio $\dot{z}$ ſubintelligi debet eſſe unitas; per quam primus terminus $\dot{x}$ ſemel, et ultimus xx bis multiplicetur, ut fluxiones inibi ad æque-multas dimenſiones, ac in ſecundo termino, $\dot{x}\dot{y}x$, aſcendant: quaſi expoſita æquatio ex hâc $\dot{z}\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-\dot{z}\dot{z}x^2=0$ derivata fuiſſet, ponendo $\dot{z}=1$. Et ſic in æquatione $\dot{y}x=yy$ debes imaginari $\dot{x}$ eſſe unitatem, per quam terminus yy multiplicatur.

22. Æquationes autem, in quibus duæ tantùm ſunt fluentes quantitates, quæ ad æque-multas dimenſiones paſſim aſcendunt, ſemper poſſunt ad talem formam reduci, ut ex unâ parte habeatur ratio fluxionum (velut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ vel $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ &c.) et ex alterâ parte valor ejus rationis ſimplicibus terminis algebraicis deſignatus, ſicut hîc videre eſt: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=2+2x-y$. Et ubi æquationibus præcedens particularis ſolutio non ſatisfacit, requiritur ut ad hanc formam reducas.

23. Quamobrem cùm in illius rationis valore terminus aliquis à compoſitâ quantitate denominetur, vel ſit radicalis, vel ſi ratio illa ſit æquationis radix affectæ: reductio vel per diviſionem, vel extractionem radicis, vel æquationis affectæ reſolutionem, inſtitui debet; prout in ſuperioribus oſtenſum eſt.

24. Quem-

(e) NIMIRUM huic *Fluxionis* vocabulo Newtonus duas ferè res ſubjecit: magnitudinum mutabilium mutandi Celeritates, et Magnitudines cujuſcunque generis, quibus celeritates illæ geometricè exhibeantur. Priore quidem ſenſu, qui primarius eſt, Fluxiones diverſi generis ſunt res, ac quantitates illæ, quarum Fluxiones ſunt. Quæ verò poſteriore ſenſu magnitudines Geometricæ Fluxiones dici ſolent, eas ſanè in eodem genere ſumi, in quo ipſarum ſint Fluentes, nihil vetat. Quanquam verò notis fluxionum algebraicis hæ ſæpiùs ſignificari exiſtimandæ ſunt, quàm celeritates illæ, quas repræſentant; in omni tamen Æquatione Fluxionali, ex quâ Fluentium relationes eliciendæ ſint, oportet membra ſingula notis fluxionum pariter implicari: proinde ac ſi magnitudinum fluentium, atque illarum, quæ fluendi celeritates exponant, genus neceſſariò diverſum eſſet. Aliter enim æquatio relationes Fluxionum mutuas non purè exprimet; ſed permiſtè quodammodo magnitudinum quibus geometricè fluxiones exponantur, harum, inquam, permiſtè inter ipſas relationes et cum fluentibus. Ut æquatio $b^2\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-ax^2=0$, relationes quidem indicat, quæ rectis fortè $\dot{x}, \dot{y}$ inter ipſas, et cum aliâ rectâ x, intercedant; minimè verò illas, quæ, nullâ tertiæ x ratione habitâ, duarum $\dot{x}, \dot{y}$ ſint peculiares. Itaque hujuſmodi æquatio non eſt verè Fluxionalis.

24. Quemadmodum ſi exponitur $\dot{y}a - \dot{y}x - \dot{x}a + \dot{x}x - \dot{x}y = 0$: hæc imprimis reductione vel fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a-x}$, vel $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{a-x}{a-x+y}$. Et in priori caſu, ſi terminum $\frac{y}{a-x}$, à compoſitâ quantitate $a-x$ denominatum, reduco ad infinitam ſeriem ſimplicium terminorum, $\frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. dividendo numeratorem y per denominatorem $a-x$, obtinebo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. cujus ope relatio inter x et y determinanda eſt. INVENTIO FLUENTIUM.

25. Sic expoſitâ $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}xx$, ſive $\frac{\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + xx$; et ulteriori reductione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + xx}$; radicem quadraticam è terminis $\frac{1}{4} + xx$ extraho; et obtineo infinitam ſeriem $\frac{1}{2} + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$ &c. quam pro $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ ſubſtituendo, prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8$ &c. vel $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -x^2 + x^4 - 2x^6 + 5x^8$ &c. prout $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ additur vel ſubducitur à $\frac{1}{2}$.

26. Atque ita ſi exponitur $\dot{y}^3 + ax\dot{x}^2\dot{y} + a^2\dot{x}^2\dot{y} - \dot{x}^3x^3 - 2\dot{x}^3a^3 = 0$, ſive $\frac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3} + ax\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + aa\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - x^3 - 2a^3 = 0$, extraho radicem cubicam affectam, et prodit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ &c. prout videre eſt Cap. III. § 6.

27. Cæterùm hîc obſervandum venit, quòd terminos ſolummodo pro compoſitis habeo, qui ex parte fluentium quantitatum componuntur. Terminos ubi nulla eſt, niſi ex parte datarum quantitatum, compoſitio, pro ſimplicibus habeo: ſiquidem ad ſimplices reduci poſſunt, fingendo æquales eſſe aliis datis. Sic

nalis. Verè quidem Fluxionalis eſſet, ſi rectarum $\dot{y}$, $\dot{x}$, eas relationes purè exprimeret, quæ ex eo illis intervenerint, quòd earum celeritatum proportiones, quibus celeritatibus rectæ mutabiles y, x mutantur, inter ſe ſemper ſervent. Has verò purè ſi exprimerit, nullam planè æquatio illa indicaret rectæ $\dot{y}$, vel $\dot{x}$, ad illam x relationem; quæ inde unde diximus nulla quidem naſci poteſt; ſiquidem Motûs celeritas et res mota genere ſint alieniſſima. At verò ex æquatione non verè fluxionali mutuas fluentium relationes eruere fruſtra aggreſſus eris, niſi artificio aliquo ad formam verè fluxionalem priùs ea revocata ſit. Sanè ſi pro æquatione, $b^2\dot{x} + \dot{x}\dot{y}x - ax^2 = 0$, hanc aliam ſumas, $b^2\dot{x}\dot{z} + b\dot{x}\dot{y}x - \frac{ax^2\dot{z}\dot{z}}{b} = 0$, quæ, poſito utramque b, z unitati æqualem eſſe, in illam priorem migraverit, ex hâc quidem trium x, y, z relationes mutuas, viâ mox tradendâ, explorare liceat, et per æquationem quandam exponere. Tum ſi illius z ad illam x, vel ad illam y, vel ad duas x, y ſimul, relationes aliæ per æquationem aliam, vel datam vel pro arbitrio fingendam, exprimantur, ex duabus æquationibus tertia utique exſiſtet, quâ duæ x, y quomodo inter ſe affectæ ſint, nullâ tertiæ z ratione habitâ, indicatum erit.

quantitates

PROBLEMA SECUNDUM.

quantitates $\frac{ax+bx}{c}$, $\frac{x}{a+b}$, $\frac{bcc}{ax+bx}$, $\frac{b^4}{ax^2+bx^2}$, $\sqrt{ax+bx}$ &c. pro ſimplicibus; habeo ſiquidem ad ſimplices $\frac{\varepsilon x}{c}$, $\frac{x}{\varepsilon}$, $\frac{bcc}{\varepsilon x}$, $\frac{b^4}{\varepsilon x^2}$, $\sqrt{\varepsilon x}$, ſive $\varepsilon^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ &c. reduci poſſunt, fingendo eſſe $a+b=\varepsilon$.

28. Præterea, quo fluentes quantitates à ſe invicem clariùs diſtinguantur, Fluxionem quæ, in Numeratore rationis diſponitur, ſive antecedentem rationis, haud impropriè Relatam quantitatem nominare poſſum, et alteram ad quam refertur, Correlatam; ut et fluentes quantitates iiſdem reſpectivè nominibus inſignire. Et quo ſequentia promptiùs intelligantur, poſſis imaginari Correlatam quantitatem eſſe Tempus, vel potiùs quamvis æquabiliter fluentem quantitatem, quâ tempus exponitur et menſuratur; et alteram, ſive Relatam quantitatem, eſſe Spatium, quod mobile, utcunque acceleratum vel retardatum, in illo tempore tranſigit: et quod Problematis intentio eſt, ut è celeritate motûs ad omne tempus datâ, ſpatium, in toto tempore tranſactum, determinetur.

29. Cæterùm Æquationes, reſpectu hujus Problematis, in tres ordines diſtingui convenit.

1. In quibus duæ quantitatum Fluxiones et alterutra tantùm Fluens quantitas involvuntur.

2. In quibus duæ involvuntur fluentes quantitates unà cum Fluxionibus earum.

3. Quæ plures duabus quantitatum Fluxionibus complectuntur.

Et his præmiſſis Problematis confectionem ſecundum hoſce tres caſus aggrediar.

SOLUTIONIS CASUS PRIMUS.

30. Fluentem quantitatem, quam unicè æquatio complectitur, ſuppone Correlatam eſſe, et æquatione perinde diſpoſitâ (hoc eſt faciendo ut ex unâ parte habeatur fluxionis alterius ad hujus fluxionem ratio, et valor ejus in ſimplicibus terminis ex alterâ) multiplica valorem rationis fluxionum per Correlatam quantitatem; dein ſingulos ejus terminos divide per numerum dimenſionum, quibus illa quantitas inibi afficitur; et quod oritur valebit alteram fluentem quantitatem.

31. Sic expositâ $\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}xx$, suppono x esse correlatam quan- INVENTIO FLUENTIUM.
titatem; et, æquatione perinde reductâ, habebitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1+x^2-x^4+2x^6$, &c. Jam duco valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ in x, et oritur $x+x^3-x^5+2x^7$, &c. quos terminos sigillatim per numerum dimensionum divido, et exitum $x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{7}x^7$, &c. pono $= y$. Et isthâc æquatione desiderata relatio inter x et y determinatur.

32. Sic habitâ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}$, &c. prodibit $y = ax-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{192a}+\frac{131x^4}{2048a^2}$, &c. pro determinandâ relatione inter x & y.

33. Et sic æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^{\frac{1}{2}}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}$, dat $y = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+2ax^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Nam valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ duc in x, et fit $\frac{1}{xx}-\frac{1}{x}+ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$, sive $x^{-2}-x^{-1}+ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$. Quibus terminis per numerum dimensionum divisis, emergit valor assignatus y.

3. Ad eundem modum æquatio $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2b^2c}{\sqrt{ay^3}}+\frac{3y^2}{a+b}+\sqrt{by+cy}$ dat $x = -\frac{4b^2c}{\sqrt{ay}}+\frac{y^3}{a+b}+\frac{2}{3}\sqrt{by^3+cy^3}$. Nam valore $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ ducto in y, oritur $\frac{2b^2c}{\sqrt{ay}}+\frac{3y^3}{a+b}+\sqrt{by^3+cy^3}$, sive $2b^2ca^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{a+b}y^3+\sqrt{b+c}\times y^{\frac{3}{2}}$. Et inde prodit valor x, dividendo per numerum dimensionum cujusque termini.

35. Atque ita $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = z^{\frac{2}{3}}$ dat $y=\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}$. Et $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ab}{cx^{\frac{1}{3}}}$ dat $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$. At æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ dat $y = \frac{a}{0}$. Nam $\frac{a}{x}$ ductum in x fit a; quo per numerum dimensionum (qui nullus est) diviso, prodit $\frac{a}{0}$, quantitas infinita pro valore y.

36. Quamobrem siquando consimilis terminus, cujus denominator involvit correlatam quantitatem unius tantùm dimensionis, in valore $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ reperiatur, pro correlatâ quantitate substitue summam vel differentiam inter eandem et aliam quamvis datam quantitatem, pro arbitrio assumptam. Nam quantitatum fluentium juxta prodeuntem æquationem eadem erit inter se fluendi relatio, ac juxta æquationem primò expositam; et infinita quantitas Relata hoc pacto parte infinitâ diminuetur, et evadet finita, sed terminis tamen numero infinitis constans.

37. Æquatione itaque $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ expositâ, si pro x scribam $b+x$,

PROB. II. quantitatem b pro lubitu aſſumens, prodibit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b+x}$; factâque diviſione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$, &c. Et inde Regula, ut in ſuperioribus, dabit $y = \frac{ax}{b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$, &c. relationem inter x et y.

38. Sic etiam habitâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2}{x} + 3 - xx$; ſi, propter terminum $\frac{2}{x}$, ſcribam $1+x$ pro x, emerget $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2}{1+x} + 2 - 2x - xx$; terminoque $\frac{2}{1+x}$ in infinitam ſeriem, $2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4$, &c; redacto, erit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 4 - 4x + x^2 - 2x^3 + 2x^4$, &c. Adeoque juxta regulam obtinebitur $y = 4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5$, &c. relatio inter x et y.

39. Atque ita ſi proponitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$, quia terminum x^{-1} (ſive $\frac{1}{x}$) ineſſe video, tranſmuto x; quemadmodum pro eo ſubſtituendo $1-x$; et oritur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x}$. Terminus autem $\frac{1}{1-x}$ valet $1 + x + x^2 + x^3$, &c. Et $\sqrt{1-x}$ valet $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$ &c. adeoque $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ſive $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3, \&c.}$ valet $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$, (g) &c. Quamobrem (valoribus hiſce ſubſtitutis) erit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{8}x^3$, (g) &c. Et inde per regulum fit $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{32}x^4$, (g) &c. Et ſic in aliis.

40. Hujuſmodi etiam tranſmutatione Fluentis quantitatis æquatio in aliis caſibus nonnunquam commodè reduci poterit. Quemadmodum ſi exponitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c^2x}{c^3 - 3c^2x + 3cx^2 - x^3}$; pro x ſcribo $c-x$; et obtineo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c^3 - c^2x}{x^3}$, ſive $\frac{c^3}{x^3} - \frac{c^2}{x^2}$, et inde per regulam $y = -\frac{c^3}{2x^2} + \frac{c^2}{x}$. At harum tranſmutationum uſus in ſequentibus magis elucefcet.

SOLU-

(f) Hæc ad Calculorum fidem emendata promo: Codices MSS. habent $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x^3$ &c, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + 2x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{27}{16}x^3$ &c. $y = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{64}x^4$ &c. Vitioſè quidem. Nam

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + ,$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ,$$

Ergo

SOLUTIONIS CASUS SECUNDUS.

INVENTIO FLUENTIUM.

Præparatio.

41. Hæc itaque de æquationibus involventibus unicam tantùm fluentem quantitatem. Cùm verò utraque involvitur, Æquatio imprimis ad præſcriptam formam redigenda eſt; efficiendo ſcilicet, ut ex unâ parte habeatur fluxionum ratio æqualis aggregato ſimplicium terminorum ex alterâ.

42. Et præterea ſiquæ ſunt in æquationibus, ſic reductis, fractiones, quæ denominantur à fluenti quantitate, à denominatoribus iſtis liberari debent, per tranſmutationem ejus fluentis quantitatis paulo antè commemoratam.

43. Sic expoſitâ æquatione $\dot{y}ax-\dot{x}aa-\dot{x}xy=0$, ſive $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{a}+\frac{a}{x}$ (propter terminum $\frac{a}{x}$) aſſumo b ad arbitrium, et pro x vel ſcribo $b+x$, vel $b-x$, vel $x-b$. Quemadmodum ſi ſcribam $b+x$, fiet $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{a}+\frac{a}{b+x}$. Adeoque termino $\frac{a}{b+x}$ in infinitam ſeriem, per diviſionem, reducto, erit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{a}+\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{ax^2}{b^3}-\frac{ax^3}{b^4}$ &c.

44. Et ad eundem modum expoſitâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=3y-2x+\frac{x}{y}-\frac{2y}{x^2}$, ſi (propter terminos $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{x^2}$) ſcribam $1-y$ pro y, et $1-x$ pro x, orietur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1-3y+2x+\frac{1-x}{1-y}+\frac{2y-2}{1-2x+x^2}$. Terminus autem $\frac{1-x}{1-y}$, per infinitam diviſionem, dat $1-x+y-xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3$, &c. ac terminus $\frac{2y-2}{1-2x+xx}$, per ſimilem diviſionem, dat $2y-2+4xy-4x+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4$, &c. Quare eſt $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-3x+3xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3$, &c. $+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4$, &c.

$$\text{Ergo } \frac{1}{\sqrt{1-x}}+1-x=2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{11}{8}x^2+\tfrac{21}{16}x^3+,$$

$$\text{Sed } \sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-,$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-x}-\sqrt{1-x}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+2x+\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{11}{8}x^3+,$$

$$\text{Et } y=x+x^2+\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{11}{32}x^4+,$$

Cæterum hæ ſeries, ſicut alia nonnulla, quæ apud Colſonum et Editores exteros mendoſa ſunt, rectè ſe habent in editione alterâ Londinenſi, formâ minore, anonymo interprete; quæ tamen typothetarum erroribus tota ſcatet.

Prob. II.

REGULA.

45. Æquatione, cùm opus eſt, ſic præparatâ, terminos ordina juxta dimenſiones fluentium quantitatum, ponendo imprimis non affectos Relatâ quantitate ; dein affectos minimâ ejus dimenſione, & ſic deinceps. Terminos etiam, in his ſingulis claſſibus, juxta dimenſiones alterius Correlatæ quantitatis pariter diſpone; eoſque in prima claſſe (i. e. quos relata quantitas non afficit) ſcribe in ſerie collaterali dextrorſum pergente, et cæteros in ſeriebus deſcendentibus in ſiniſtrâ columnâ, prout indicant ſubſequentia diagrammata. Opere ſic inſtituto, primum ſive depreſſiſſimum è terminis in primâ claſſe duc in Correlatam quantitatem, divideque per numerum dimenſionum, et in quotiente pro initiali termino valoris Relatæ quantitatis repone. Hunc deinde in æquationis terminos, in ſiniſtrâ columnâ diſpoſitos, pro relatâ quantitate ſubſtitue, et è terminis proximè depreſſiſſimis ſecundum quotientis terminum, eâdem ratione, quâ primum, elicies. Et eâdem operatione, ſæpiùs repetitâ, quotientem ad arbitrium producere poſſis. Sed res exemplo clariùs patebit.

46. Exempl. I. Exponatur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$, cujus terminos, $1 - 3x + x^2$, non affectos Relatâ quantitate, y, vides in ſupremâ ſerie collateraliter diſpoſitos ; cæteroſque y et xy, in ſiniſtrâ columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$ $+xy$	$* + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$ $* \quad * + x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$
Summa	$1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$
$y =$	$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$

Et imprimis terminum initialem, 1, duco in Correlatam quantitatem x, fitque x ; quam per numerum dimenſionum 1 diviſum repono in ſubſcriptâ quotiente. Dein hoc termino pro y in marginalibus ſubſtituto, vice $+y$ et $+xy$, obtineo x & x^2 ; quos è regione dextrorſum ſcribens, ex omnibus excerpo depreſſiſſimos terminos, $-3x$ & $+x$; quorum aggregatum, $-2x$, ductum in x fit $-2x^2$, et per numerum dimenſionum, 2, diviſum dat $-x^2$ pro ſecundo termino valoris y in quotiente. Hoc proinde termino ad complendum valorem y in marginalibus $+y$ & xy adſcito, oriuntur præterea $-xx$ & $-x^3$, terminis priùs oriundis, $+x$ & $+xx$, adnectendi. Quo facto, iterum terminos proximè depreſſiſſimos, $+x^2 - x^2$ & $+x^2$, in unam ſummam, x^2, colligo; et inde, ut priùs, tertium terminum, $\frac{1}{3}x^3$, in valore y reponendum elicio.

INVENTIO FLUENTIUM.

ȝio. Iterumque $\frac{1}{3}x^3$ in marginalium terminorum valores adſcito, è proximè depreſſiſſimis $\frac{1}{3}x^3$ & $-x^3$, in unum aggregatis, elicio $-\frac{1}{6}x^4$ quartum terminum valoris y. Et ſic in infinitum.

47. EXEMPL. 2. Ad eundem modum, ſi relationem inter x & y, habitâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$ &c. cujus terminorum ſeries infinitè progredi ſubintelligitur, determinare oportet; pono 1 in capite, reliquoſque terminos in ſiniſtrâ columnâ, et opus deinde proſequor pro more adjuncti diagrammatis.

	$+1$						
$+\frac{y}{a}$	*	$+\frac{x}{a}$	$+\frac{x^2}{2a^2}$	$+\frac{x^3}{2a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{xy}{a^2}$	*	*	$+\frac{x^2}{a^2}$	$+\frac{x^3}{2a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^2y}{a^3}$	*	*	*	$+\frac{x^3}{a^3}$	$+\frac{x^4}{2a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^3y}{a^4}$	*	*	*	*	$\frac{x^4}{a^4}$	$+\frac{x^5}{2a^5}$	&c.
$+\frac{x^4y}{a^5}$	*	*	*	*	*	$+\frac{x^5}{a^5}$	&c.
Summa	1	$+\frac{x}{a}$	$+\frac{3x^2}{2a^2}$	$+\frac{2x^3}{a^3}$	$+\frac{5x^4}{2a^4}$	$+\frac{3x^5}{a^5}$	&c.
	$y = x$	$+\frac{x^2}{2a}$	$+\frac{x^3}{2a^2}$	$+\frac{x^4}{2a^3}$	$+\frac{x^5}{2a^4}$	$+\frac{x^6}{2a^5}$	&c.

Ubi propoſitum eſt mihi elicere valorem y aduſque ſex dimenſiones x; et eâ de causâ terminos omnes, quos propoſito nihil conducere prævideo, inter operandum miſſos facio; ſicut innuit nota &c. quam ſeriebus interciſis adnexui.

48. EXEMPL. 3. Pari methodo ſi proponitur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4$ &c. $+ 6x^2y - 6x^2 + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4 + 12x^5y - 12x^5$ &c. et valorem y ad uſque ſeptem dimenſiones x eruere inſtitutum eſt, terminos, ut in adjuncto diagrammate, in ordinem redigo, et operor ſicut in præcedentibus; hoc tantùm excepto, quòd cùm hîc, in ſiniſtrâ columnâ, y non tantùm unius, ſed etiam duarum ac trium dimenſionum exiſtit, vel etiam plurium, prout valorem y ultra gradum x^7 extrahere ſtatuam; ſubjicio quadratum et cubum valoris y catenus gradatim productum, ut cùm in valoribus marginalium terminorum dextrorſum gradibus inſcribuntur, termini tot dimenſionum emergant, quot ad ſequentem operationem.

	$-3x$	$-6x^2$	$-8x^3$	$-10x^4$	$-12x^5$	$-14x^6$	&c.
$+3xy$	*	*	$-\frac{9}{2}x^3$	$-6x^4$	$-\frac{75}{8}x^5$	$-\frac{273}{16}x^6$	&c.
$+6x^2y$	*	*	*	$-9x^4$	$-12x^5$	$-\frac{75}{4}x^6$	&c.
$+8x^3y$	*	*	*	*	$-12x^5$	$-16x^6$	&c.
$+10x^4y$ &c.	*	*	*	*	*	$-15x^6$	&c.
$+y^2$	*	*	*	$+\frac{9}{4}x^4$	$+6x^5$	$+\frac{107}{5}x^6$	&c.
$-xy^2$	*	*	*	*	$-\frac{9}{4}x^5$	$-6x^6$	&c.
$+y^3$ &c.	*	*	*	*	*	$-\frac{27}{8}x^6$	&c.
Summa	$-3x$	$-6x^2$	$-\frac{25}{2}x^3$	$-\frac{91}{4}x^4$	$-\frac{333}{8}x^5$	$-\frac{367}{5}x^6$	

$$y = -\tfrac{3}{2}x^2 - 2x^3 - \tfrac{25}{8}x^4 - \tfrac{91}{20}x^5 - \tfrac{111}{16}x^6 - \tfrac{367}{35}x^7 \text{ \&c.}$$
$$y^2 = +\tfrac{9}{4}x^4 + 6x^5 + \tfrac{107}{5}x^6 \text{ \&c.}$$
$$y^3 = -\tfrac{27}{8}x^6 \text{ \&c.}$$

PROB. II. nem requiri percipio. Et hâc methodo prodit tandem $y = -\frac{3}{2}x^2 - 6x^3 - \frac{25}{8}x^4$ &c. æquatio desiderata. Qui valor cùm sit negativus, patet alterum è quantitatibus x et y decrescere dum altera increscit. Atque idem pariter concludi debet, cùm fluxionum altera affirmativa sit, et altera negativa.

49. EXEMPL. 4. Haud secus cùm Relata quantitas fractis dimensionibus afficitur, possis valorem ejus extrahere.

Veluti si proponitur $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{2}y - 4y^2 + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$, ubi x in termino $2yx^{\frac{1}{2}}$ (sive $2y\sqrt{x}$) fractâ dimensione, $\frac{1}{2}$, afficitur: ejus $x^{\frac{1}{2}}$ valorem è valore x paulatim elicio, extrahendo nempe radicem quadraticam, sicut in inferiori parte diagrammatis videre est; eò ut in marginalis termini $2yx^{\frac{1}{2}}$ valorem gradatim transferri et inseri possit. Et sic tandem adipiscor æquationem $x = \frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c. quâ x respectu y indefinitè determinatur. Et sic in aliis quibuscunque casibus operari licet.

	$+\frac{1}{2}y. - 4y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$
$2yx^{\frac{1}{2}}$ $-\frac{4}{5}x^2$	$*. + y^2. * - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^4$ &c. $*. \quad *. * \quad * \quad * - \frac{1}{20}y^4$ &c.
Summa	$+\frac{1}{2}y. - 3y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} * + 4y^{\frac{7}{2}} - \frac{41}{20}y^4$ &c.
	$x = +\frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} * + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c. $x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - y^2 + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ &c. $x^2 = \frac{1}{16}y^4$ &c.

50. Cæterùm dixi hasce solutiones infinitis modis præstari posse. Et hoc fiet, si non tantùm initialem quantitatem supremæ seriei, sed et aliam quamvis datam quantitatem, pro primo termino quotientis ad arbitrium assumas; ac deinde opereris ut in præcedentibus. Sic in primo præcedentium exemplorum; si pro primo termino valoris y assumas 1, et pro y, in terminis marginalibus ($+y$ et $+xy$) substituas, reliquamque operationem, cujus specimen adjunxi, sicut in præcedentibus prosequaris, ipsius y alius exurget valor $1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$ $+xy$	$+1 + 2x \quad * \quad + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c. $* + x + 2x^2 \quad * \quad + x^4$ &c.
Summa	$+2 \quad * + 3x^2 + x^3 + \frac{5}{4}x^4$
	$y = 1 + 2x \quad * + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$ &c.

51. Et sic etiam alius atque alius exurget, assumendo 2, 3, vel alium quemvis numerum pro primo ejus termino. Vel si symbolum aliquod, ut a, pro illo termino indefinitè designando usurpes, eâdem operandi methodo, quam hîc etiam designatam habes,

	$+1 - 3x + x^2$
$+y$ $+xy$	$+a + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$ &c. $+ ax + ax^2 + \frac{2}{3}ax^3$ &c. $* + ax + x^2 - x^3$ &c. $+ ax^2 + ax^3$
Summa	$+1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$ $+a + 2ax + 2ax^2 + \frac{5}{3}ax^3$
$y = a$	$+x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$ &c. $+ax + ax^2 + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4$

habes, elicies tandem $y = a + x + ax - x^2 + ax^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}\,\hat{a}\,x^3$ &c. Quâ inventâ, poſſis pro a ſubſtituere, 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$, aut quemvis numerum, et ſic relationem inter x et y modis infinitis obtinere. INVENTIO FLUENTIUM.

52. Et nota, quòd ubi quantitas elicienda afficitur fractâ dimenſione, ut in præcedentium exemplorum quarto vides, convenit plerumque unitatem, vel alium quemvis aptum numerum, pro primo ejus termino adhibere. Imo hoc neceſſe eſt, ubi radix, ad fractæ illius dimenſionis valorem obtinendum, propter negativum ſignum, nequit aliâs extrahi; ut et ubi nulli ſunt termini in primâ ſive capitali claſſe reponendi, ex quibus initialis ille terminus eliciatur.

53. Sic tandem hoc moleſtiſſimum et omnium difficillimum Problema, ubi duæ tantùm fluentes quantitates, unà cum earum fluxionibus, in æquatione comprehenduntur, abſolvi. Sed præter generalem methodum, quâ omnes difficultates complexus ſum, ſunt aliæ plerumque contractiores, quibus opus aliquando ſublevari poſſit, et quarum aliqua ſpecimina ex abundanti perſtringere, fortè non erit ingratum.

54. (I) Siquando itaque quantitas elicienda ſit alicubi negatæ dimenſionis, non eſt abſolutè neceſſarium, ut æquatio propterea ad aliam formam reducatur. Sic enim expoſitâ æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{y} - x^2$, ubi y eſt unius negatæ dimenſionis, poſſim equidem ad aliam formam reducere, veluti ſcribendo $1 + y$ pro y; ſed expeditior erit ſolutio, quam in annexo diagrammate deſignatam habes; ubi aſſumpto 1 pro initio valoris y, cæteros ejus terminos ut in præcedentibus extraho; et interea valorem $\frac{1}{y}$ exinde per diviſionem, paulatim inſtitutam, elicio, et inſero in valorem marginalis termini.

	$* \; * - xx$
$\frac{1}{y}$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$ &c.
Summa	$1 - x + \frac{1}{2}xx$
$y = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$ &c.	
$\frac{1}{y} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2$ &c.	

55. (II) Neque ſemper opus eſt ut alterius fluentis quantitatis dimenſiones ſint paſſim affirmativæ. Nam ex æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3 + 2y - \frac{yy}{x}$, abſque termini $\frac{yy}{x}$ reductione præſcriptâ, emerget $y = 3x - \frac{3}{2}x^2 - 4x^3$ &c.

56. Et

PROB. II.

	$-\frac{1}{xx}+\frac{1}{x}$
$-y$	$* \quad -\frac{1}{x}$
Summa	$-\frac{1}{xx} \quad \text{o}$
$y=\frac{1}{x}$	

56. Et ex $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = y + \frac{1}{x} - \frac{1}{xx}$, opere ad modum annexi ſpeciminis inſtituto, emerget $y=\frac{1}{x}$.

57. Ubi obiter nota, quòd inter modos infinitos quibus quælibet æquatio reſolvi poteſt, ſæpenumero contingit, aliquos eſſe, qui ad finitum valorem quantitatis eliciendæ, ſicut in allato ſpecimine, finiuntur; et quos haud difficile eſt invenire, ſi pro primo valoris termino ſymbolum aliquod aſſumatur: et, reſolutione peractâ, conſulatur de ſymboli illius quantitate; quâ valor elicitus evadat finitus.

58. (III) Porro ſi valor y ex æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{2x} + 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$ eliciendus ſit, id ſine aliquâ reductione termini $\frac{y}{2x}$ non incommodè fiet; fingendo, pro more analytico, datum eſſe quod quæritur. Utpote pro primo termino valoris ejus effingo $2ex$, aſſumendo $2e$ pro numerali coefficiente, quæ nondum innoteſcit. Et hunc $2ex$ pro y in termino marginali $\frac{y}{2x}$ ſubſtituens, prodit e quem ſcribo ad dextram; et ſumma $1+e$ dabit $x+ex$ pro eodem primo termino valoris y, quem priùs deſignaveram termino $2ex$. Pono itaque $2ex=x+ex$ et inde elicio $e=1$. Adeoque valoris y primus terminus ($2ex$) eſt $2x$.

	$1-2x+\frac{1}{2}xx$
$\frac{y}{2x}$	$e+fx+gxx+hx^3$
Summa	$+1-2x+\frac{1}{2}x^2+hx^3$ $+e+fx+gxx$
Hypotheticè	$y=2ex+2fx^2+2gx^3+2hx^4$ &c.
Conſequenter	$y=+x-x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}hx^4$ $+ex+\frac{1}{2}fx^2+\frac{1}{3}gx^3$
Revera	$y=2x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}x^3$

Ad eundem modum, pro ſecundo termino deſignando, effictum $2fx^2$ uſurpo; et inde tandem eruo $-\frac{2}{3}$ pro valore f, adeoque $-\frac{4}{3}xx$ pro ſecundo termino. Et ſic effictus g in tertio termino valebit $\frac{1}{10}$, at h in quarto valebit o: et proinde, cùm nullos præterea terminos ſupereſſe video, concludo opus finitum eſſe, et y valere $2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3$ præciſè.

59. Ad eundem fere modum ſi eſſet $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3y}{4x}$, effinge $y=ex^s$, ubi e ignotam coefficientem, et s numerum dimenſionum ſimiliter ignotum denotet. Et ex^s pro y ſubſtituto, prodibit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3ex^{s-1}}{4}$,

$\frac{3ex^{s-1}}{4}$, et inde rursus $y = \frac{3ex^s}{4s}$. Conferantur jam valores y, et videbis esse $\frac{3e}{4s} = e$, adeoque $s = \frac{3}{4}$ et e indefinitum. Quare assumpto utcunque e erit $y = ex^{\frac{3}{4}}$. INVENTIO FLUENTIUM.

60. (IV) Ad hæc nonnunquam opus ab altissimâ dimensione æquabilis quantitatis inchoari potest, et ad depressiores continuò pergere. Veluti si detur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$; et ab altissimo termino $2x$ opus inchoetur; disponendo capitalem seriem in ordine præcedentibus contrario, emerget tandem $y = xx + 4x - \frac{1}{x}$ &c. prout in appositâ operandi formâ videre est.

	$+2x+3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$
$+\frac{y}{xx}$	$* + 1 + \frac{4}{x} * - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$ &c.
Summa	$2x+4- * +\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$
	$y = x^2 + 4x * - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}$ &c.

Et hîc in transitu notari potest, quòd inter operandum potuit inter terminos, $4x$ et $-\frac{1}{x}$, pro intermedio deficienti termino, quælibet data quantitas inseri, et sic valor y modis infinitis extrahi.

61. (V) Siqui præterea sint fracti dimensionum Relatæ quantitatis indices, ad integros reduci possunt, fingendo quantitatem illam, suâ fractâ dimensione affectam, esse alii cuilibet tertiæ fluenti quantitati æqualem; et substituendo tum illam quantitatem, tum fluxionem ejus, ab illâ fictâ æquatione oriundam, pro Relatâ quantitate et ejus fluxione.

62. Quemadmodum si exponitur æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$, ubi Relata quantitas fracto dimensionis indice $\frac{2}{3}$ afficitur; assumptâ ad arbitrium fluenti quantitate z, fingo esse $y^{\frac{1}{3}} = z$, sive $y = z^3$; et fluxionum relatio juxta Prob. 1. erit $\dot{y} = 3\dot{z}zz$. Quare substituto $3z^2\dot{z}$ pro $\dot{y}$, ut et z^3 pro y, ac z^2 pro $y^{\frac{2}{3}}$, emerget $\frac{3\dot{z}z^2}{\dot{x}} = 3xz^2 + z^3$, sive $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = x + \frac{1}{3}z$; ubi z supplet vices Relatæ quantitatis. Postquam verò valor z eo nomine eruitur, utpote $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{216}x^4 + \frac{1}{3240}x^5$ &c. pro z restitue $y^{\frac{1}{3}}$, et habebis desideratam relationem inter x et y: nempe $y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{216}x^4$ &c. Et cubis partium utrobique positis erit $y = \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{24}x^7 + \frac{7}{864}x^8$ &c (h).

(h) Emendavi calculis suadentibus.

PROB. II. 63. Pari ratione si detur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy}$ sive $= 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$; fingo $z = y^{\frac{1}{2}}$ sive $z^2 = y$, et inde per Prob. 1. elicio $2z\dot{z} = \dot{y}$: et consequenter $\frac{2z\dot{z}}{\dot{x}} = 2z + x^{\frac{1}{2}}z$, sive $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Adeoque per casum priorem hujus est z, $(y^{\frac{1}{2}}) = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, et partibus quadratis $y = x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Sin valorem y modis infinitis desideres, fac $z = c + x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, assumpto utcunque initiali termino c; et erit y (z^2) æqualis $c^2 + 2cx + \frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Ast hæc nimis officiosè tractare videor, siquidem rarissimè usui esse possunt.

SOLUTIONIS CASUS III.

64. Problematis, ubi tres vel plures quantitatum fluxiones æquatio complectitur, resolutio brevi absolvitur: scilicet inter duas quaslibet istarum quantitatum relatio (ubi ex statu quæstionis non determinatur) quælibet effingi debet, et earum fluxionum exinde quæri; eò ut alterutra, unà cum ejus fluxione, ex æquatione expositâ exterminari possit. Quâ de causâ, si trium insunt quantitatum fluxiones, unica effingenda est æquatio; ac duæ si insunt quatuor, et sic porro; ut exposita æquatio in aliam tandem æquationem transformetur, cui non insint plures duabus: et hâc deinde ut suprà resolutâ, reliquarum quantitatum relationes eruentur.

65. Sic æquatione $2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$ expositâ; quo quantitatum x, y, et z (quarum fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ æquatio complectitur) relationes inter se obtineam, relationem inter duas quaslibet ut x et y pro lubitu effingo: puta quòd sit $x = y$, vel $2y = a + z$, vel $x = yy$ &c. Sit autem $x = yy$, et inde erit $\dot{x} = 2\dot{y}y$; quare scriptis $2\dot{y}y$ pro $\dot{x}$, et yy pro x, exposita æquatio transformabitur in $4\dot{y}y - \dot{z} + \dot{y}y^2 = 0$. Et inde relatio inter y & z emerget $2yy + \frac{1}{3}y^3 = z$. Ubi si x pro yy, et $x^{\frac{3}{2}}$ pro y^3 vicissim scribatur, prodibit etiam $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

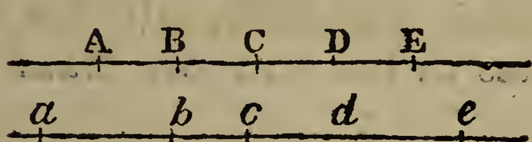
Adeoque inter modos infinitos quibus x, y et z ad invicem referuntur, unus his æquationibus, $x = yy$, $2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = z$, et $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, designatus investigatur.

Demonstratio.

Demonſtratio.

66. Problema tandem confecimus, ſed demonſtratio ſupereſt. Et in tantâ rerum copiâ ne per nimias ambages è propriis fundamentis ſyntheticè derivetur, ſufficiat per analyſin ſic breviter indicare. Scilicet æquatione quâlibet expoſitâ, poſtquam opus ad finem perduxeris, experiri eſt, quòd ex elicitâ æquatione expoſita viciſſim (per Prob. 1.) eruetur. Et proinde quantitatum relatio in elicitâ æquatione exigit relationem fluxionum in expoſitâ, et contrâ: ſicut oſtendendum erat. Sic æquatione $\dot{y}=x$ expoſitâ, elicietur $y=\frac{1}{2}x^2$, et inde viciſſim (per Prob. 1.) $\dot{y}=\dot{x}x$, ſive $=x$, quandoquidem $\dot{x}$ ſupponitur eſſe 1. Et ſic ex $\dot{y}=1-3x+y+x^2+xy$ provenit $y=x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$ &c ([i]). Et inde viciſſim (per Prob. 1) $\dot{y}=1-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5$ &c. Qui duo valores ipſius $\dot{y}$ conveniunt, ut patet, ſubſtituendo $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5$ &c. pro y in priori. Inventio Fluentium.

67. Cæterum in æquationum reductione adhibui operationem, de quâ præterea rationem reddere oportet: eſtque tranſmutatio fluentis quantitatis per connexionem cum quantitate datâ. Sunto AE et *ae* lineæ utrinque infinitæ, per quas mobilia duo è longinquo trajiciantur, ſimul attingentia locos A et *a*, B et *b*, C et *c*, D et *d*, &c. Et ſit B punctum à cujus diſtantiâ rei mobilis in AE motus æſtimetur, ita ut −BA, BC, BD, BE ſucceſſivè ſint fluentes quantitates, quando mobile ſit in locis A, C, D, E. Sitque *b* conſimile punctum in alterâ lineâ: et erunt −BA ac −*ba* contemporaneæ fluentes quantitates, ut et BC ac *bc*, BD ac *bd*, BE ac *be*, &c. Quòd ſi vice punctorum B & *b*, ſubſtituantur A & *c*, ad quæ tanquam quieſcentia motus referantur, tunc o & − *ca*, AB & −*bc*, AC & o, AD & *cd*, AE & *ce*, &c. erunt contemporaneæ fluentes quantitates. Mutantur itaque fluentes quantitates additione et ſubtractione datarum AB & *bc*, ſed non mutantur quoad motûs celeritatem et fluxionis mutuum reſpectum: nam ejuſdem longitudinis ſunt partes contemporaneæ, AB & *ab*, BC et *bc*, CD et *cd*, DE et *de*, in utroque caſu. Et ſic in æquationibus, quibus hæ quantitates deſignantur, partes contemporaneæ



([i]) Per § 46. hujus Capitis, poſitâ $\dot{x}=1$.

PROB. II. quantitatum non ideo mutantur, quòd earum abfoluta longitudo datâ aliquâ augeatur vel minuatur. Unde conftat propofitum: nam Problematis hujus fcopus propriè non alius eft, quàm contemporaneas partes, five abfolutarum quantitatum (v, x, y, aut z) contemporaneas differentias, datâ fluendi ratione defcriptas determinare. Et perinde eft cujufnam fint abfolutæ longitudinis quantitates illæ, dummodo contemporaneæ five correfpondentes earum differentiæ cum expofitâ fluxionum relatione conveniant.

68. Poteft et hujus rei ratio fic algebraicè reddi. Proponatur $\dot{y}=\dot{x}xy$, et finge $x=1+z$, eritque (per Prob. I.) $\dot{x}=\dot{z}$. Adeoque pro $\dot{y}=\dot{x}xy$ fcribi poteft $\dot{y}=\dot{x}y+\dot{x}zy$. Jam cùm fit $\dot{x}=\dot{z}$, patet quantitates x et z, etfi non fint ejufdem longitudinis, pariter tamen fluere refpectu ipfius y, et pares habere partes contemporaneas. Quidni itaque iifdem fymbolis denotem, quæ fluendi ratione conveniunt, et, ad contemporaneas differentias determinandas, vice $\dot{y}=\dot{x}xy$ ufurpem $\dot{y}=\dot{x}y+\dot{x}zy$.

69. Jam denique quo pacto partes contemporaneæ, ex æquatione quantitates involvente, inveniri poffunt, per fe manifeftum eft. E. G. Sit $y=\frac{1}{x}+x$ æquatio. Et cùm fit $x=2$ erit $y=2\frac{1}{2}$; cùm verò fit $x=3$, erit $y=3\frac{1}{3}$; ergo dum x fluit à 2 ad 3, y fluit à $2\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{3}$. Adeoque partes in hoc tempore tranfactæ funt $(3-2)\ 1$, et $(3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2})\ \frac{5}{6}$.

Jactis hifce fequentium fundamentis, ad Problemata magis particularia jam tranfeo.

CAPUT QUINTUM.

PROB. III.

Determinare Maximas et Minimas.

1. QUANTITAS ubi Maxima eft vel Minima, in illo momento nec profluit nec refluit. Nam fi profluit, id arguit minorem fuiffe, et ftatim majorem fore, quàm jam eft: et contrà fi refluit. Quamobrem fluxionem ejus per Prob. I. quære, et pone nullam effe.

2. Ex-

2. EXEMPL. I. Si maxima quantitas x in æquatione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 3$ defideretur; quantitatum x et y fluxiones quære, et prodibit, $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$: pofitoque $\dot{x} = 0$ reftabit, $-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, five $3y^2 = ax$. Cujus ope poffis alterutram, x vel y, in æquatione primariâ exterminare, et per æquationem reftantem determinare alteram, et utramque deinde per $3y^2 + ax = 0$. De Maximis et Minimis.

3. Perinde eft hæc operatio, ac fi multiplicâffes terminos propofitæ æquationis per numerum dimenfionum alterius fluentis quantitatis y. Unde prodit Huddeniana notiffima regula, quòd ad obtinendam maximam aut minimam Relatam quantitatem, æquatio juxta dimenfiones Correlatæ quantitas difponi debet, et per quamlibet Arithmeticam progreffionem multiplicari. Aft cùm neque hæc regula ad æquationes furdis quantitatibus affectas, neque ulla alia hactenus, quòd fciam, evulgata, abfque prævia reductione, fe extendat: ejus rei accipe fequens exemplum.

4. EXEMPL. 2. Si maxima quantitas y in æquatione $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$ determinanda eft; ipfarum x et y, fluxiones quære, et emerget $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{a^2 + 2ay + y^2} - \frac{4a\dot{x}xy + 6\dot{x}x^3 + a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$: Et cùm ex hypothefi fit $\dot{y} = 0$, neglige terminos in $\dot{y}$ ductos, (id quod inter operandum ad minuendum laborem antea fieri potuit) cæterofque per $\dot{x}x$ divide, et reftabit $3x - \frac{2ay + 3xx}{\sqrt{ay+xx}} = 0$, factâque reductione exurget, $4ay + 3xx = 0$, cujus ope poffis utramvis quantitatem x vel y ex æquatione primò propofitâ exterminare, ac deinde ex æquatione refultante, quæ cubica erit, valorem alterius elicere.

5. *Ex hoc Problemate fequentium refolutio petenda eft.*

I. In dato Triangulo aut fegmento cujufvis Curvæ, maximum rectangulum infcribere.

II. Maximam vel Minimam rectarum ducere, quæ inter datum punctum, et Curvam pofitione datam interjacent. Sive à dato puncto ad curvam ducere perpendiculum.

III. Maximam vel Minimam rectarum ducere, quæ per datum punctum

punctum transeuntes interjacent aliis duabus, sive rectis sive curvis lineis.

IV. A puncto intra Parabolam dato rectam ducere, quæ parabolam omnium obliquissimè secabit. Et idem in aliis curvis facere.

V. Curvarum Vertices, Maximas aut Minimas latitudines, Puncta in quibus partes circumactæ se decussant, determinare.

VI. Curvarum puncta invenire, ubi maximè aut minimè curvantur.

VII. Invenire minimum angulorum in quibus rectæ ad diametros suas in datâ Ellipsi ordinatim applicantur.

VIII. Ellipsium, per data quatuor puncta transeuntium, vel minimam definire, vel eam quæ ad formam circularem maximè accedit.

IX. Amplitudinem sphæricæ superficiei determinare, quam lux è longinquò fluens, postquam ab anteriori hemisphærio refracta fluit, illustrat in posteriori.

Et hujusmodi alia permulta faciliùs excogitari possunt, quàm (propter computandi fastidium) resolvi.

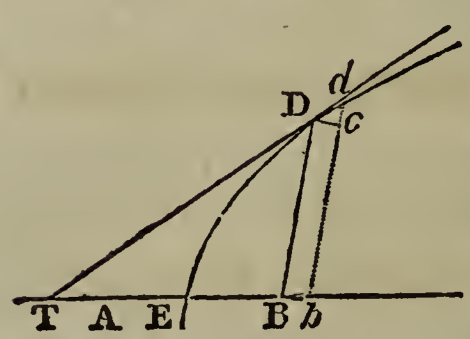
CAPUT SEXTUM.

PROB. IV.

Curvarum Tangentes ducere.

MODUS I.

1. TANGENTES pro variis relationibus curvarum ad rectas variè ducuntur. Et imprimis esto BD recta in dato angulo ad aliam rectam, AB tanquam basin ordinata, et ad curvam ED terminata. Et moveatur hæc ordinata, per infinitè parvum spatium, ad locum *bd*; ita ut momento *cd* augeatur, dum AB augetur momento B*b*, cui D*c* æqualis est. Jam producatur D*d*, donec cum AB in T conveniat, et hæc tanget curvam in D vel *d*:



eruntque

eruntque triangula dcD, DBT similia. Adeoque TB : BD :: DC : cd. De Tangentibus Ducendis.

2. Cùm itaque relatio BD ad AB, in æquatione quâlibet pro curvâ determinandâ, exponitur, quære relationem fluxionum (per Prob. I.) et cape TB ad BD in ratione fluxionis AB ad fluxionem BD, ac TD tanget curvam in D.

3. Exempl. I. Nominatâ AB, x; et BD y; esto earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Et fluxionum relatio erit $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+a\dot{y}x=0$. Adeoque $\dot{y}:\dot{x}::3xx-2ax+ay:3yy-ax::$ BD(y) : BT. Ergo BT $=\frac{3y^3-axy}{3x^2-2ax+ay}$. Dato itaque puncto D, et inde DB et AB, sive y et x; dabitur longitudo BT, quâ tangens DT determinatur.

4. Potest autem hæc operandi methodus sic concinnari. Æquationis expositæ terminos fac esse nihilo æquales: per proprium numerum dimensionum ordinatæ quantitatis multiplica, et exitum colloca in numeratore: dein terminos ejusdem æquationis per proprium numerum dimensionum basis multiplica, et exitum, per basin divisum, colloca in denominatore valoris BT. Et illam BT cape ad partes adversus A, si valor ejus sit affirmativus, aut versus A si sit negativus.

$$\begin{array}{c} 0\;.\;0\;.\;1\;.\;3 \\ x^3-ax^2+axy-y^3=0 \\ 3\;.\;2\;.\;1\;.\;0 \end{array}$$

5. Sic æquatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, per superiores numeros multiplicata dat $axy-3y^3$ pro numeratore; et per inferiores multiplicata, ac divisa per x, dat $3x^2-2ax+ay$ pro denominatore valoris BT.

6. Sic æquatio $y^3-by^2-cdy+bcd+dxy=0$ (quæ designat parabolam secundi generis, cujus beneficio Des Cartes construxit æquationes sex dimensionum,) primâ fronte dat $\frac{3y^3-2by^2-cdy+dxy}{dy}$ sive $\frac{3y^2}{d}-\frac{2by}{d}-c+x=$ BT.

7. Et sic $a^2-\frac{r}{q}x^2-y^2=0$ (quæ designat Ellipsin cujus centrum A) dat $\frac{-2yy}{-\frac{2r}{q}x}$ sive $\frac{qyy}{rx}=$ BT. Et sic in aliis.

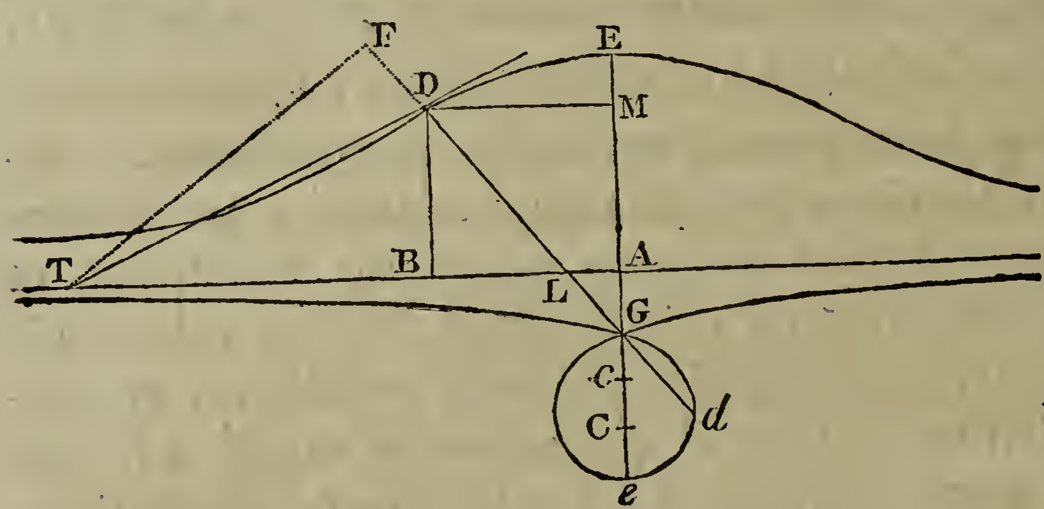
8. Et nota, quòd nihil interest cujusnam quantitatis sit angulus ordinationis ABD.

Ast hæc regula se ad æquationes surdis quantitatibus affectas, curvasque

 curvasque mechanicas non extendit. In istis casibus ad fundamentalem methodum recurrendum est (k).

8. EXEMPL. 2. Esto $x^3 - ay^2 + b\frac{y^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay+x^2} = 0$ æquatio designans relationem inter AB & BD; et per Prob. I. relatio fluxionum erit $3\dot{x}x^2 - 2ay\dot{y} + \frac{3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{a+2ay+y^2} - \frac{4a\dot{x}xy + 6\dot{x}x^3 + a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. Atque adeo est $3x^2 - \frac{4axy+6x^3}{2\sqrt{ay+x^2}} : 2ay + \frac{3aby^2+2by^3}{aa+2ay+y^2} - \frac{axx}{2\sqrt{ay+x^2}}$ $(::\dot{y}:\dot{x})$ :: BD : BT.

9. EXEMPL. 3. Sit ED Conchoides Nichomedea, polo G, asymptoto AT, et intervallo LD descripta. Sitque GA $= b$, LD $= c$, AB $= x$, et BD $= y$. Et propter similia triangula DBL et DMG, erit LB:BD :: DM : MG. $\sqrt{cc-yy} : y :: x : b+y$. Adeoque $\overline{b+y} \times \sqrt{cc-yy} = yx$. Nactus hanc



æquationem fingo $\sqrt{cc-yy} = z$. Et sic duas æquationes, $bz + yz = yx$, et $zz = cc - yy$ habeo: quarum ope fluxiones quantitatum x, y et z (per Prob. I.) quæro. Et è primâ prodit $b\dot{z} + y\dot{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$; ac è secundâ $2\dot{z}z = -2\dot{y}y$, sive $\dot{z}z + \dot{y}y = 0$. E quibus extermínato $\dot{z}$, oritur $-\frac{b\dot{y}y}{z} - \frac{\dot{y}y^2}{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$. Quâ resolutâ (l) fit $y : z - \frac{by}{z} - \frac{y^2}{z} - x$ $(::\dot{y}:\dot{x})$ :: BD : BT. Cùm ergo BD sit y, erit BT $= z - x - \frac{by+y^2}{z}$. Hoc est, $-$BT $=$ AL $+ \frac{\text{BD} \times \text{GM}}{\text{BL}}$. Ubi signum $-$ ipsi BT præfixum denotat punctum T ad partes *adversus* A capiendum esse.

SCHOLIUM.

10. Et hinc obiter inventio puncti disterminantis concavam et convexam partem Conchoidis prodit. Nempe cum AT sit omnium minima, erit D ejusmodi punctum. Esto itaque AT $= v$, et

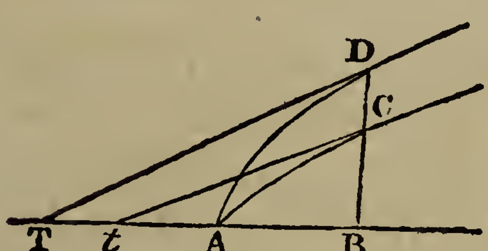
(k) § 1 & 2. traditam.
(l) In Analogiam scilicet.

cùm

cùm ſit $BT = -z + x + \frac{by+y^2}{z}$, erit $v = -z + 2x + \frac{by+y^2}{z}$. Ubi, ad opus abbreviandum, pro x ſubſtitue $\frac{bz+yz}{y}$ valorem è ſuperioribus erutum, et fiet $\frac{2bz}{y} + z + \frac{by+y^2}{z} = v$. Unde per Prob. I. fluxionibus $\dot{v}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ quæſitis, et per Prob. III. ſuppoſitâ $\dot{v} = 0$, emerget $\frac{2b\dot{z}}{y} - \frac{2b\dot{y}z}{yy} + \dot{z} + \frac{b\dot{y}+2\dot{y}y}{z} - \frac{b\dot{z}y+\dot{z}yy}{zz} = \dot{v} = 0$. In hâc denique ſubſtitue $-\frac{\dot{y}y}{z}$ pro $\dot{z}$, et $cc-yy$ pro zz, valores $\dot{z}$ et zz è ſuperioribus petendos, et, factâ reductione, obtinebitur $y^3 + 3by^2 - 2bc^2 = 0$. Cujus æquationis conſtructione dabitur y, ſive AM; et per M acta MD ipſi AB parallela incidet in punctum flexûs contrarii, D. De Tangentibus Ducendis.

11. Præterea ſi Curva Mechanica eſt, cujus tangentem ducere oportet, quantitatum fluxiones, ut in Exemp. 5. Prob. I. quærendæ ſunt, cæteraque ut in præcedentibus peragenda.

12. Exempl. 4. Sunto AC et AD duæ Curvæ, quibus recta BCD, ad baſin AB in dato angulo applicata, occurrit in C et D; et (per Prob. I. præparat. ad Exemplum 5) erit $\dot{z} = \dot{x} \times BC$. Jam



ſit AC Circulus, aut curva quævis nota, et ad alteram curvam, AD, definiendam, exponatur quævis æquatio, cui z intexta eſt; veluti $zz + axz = y^4$. Et, per Prob. I. erit $2\dot{z}z + ax\dot{z} + a\dot{x}z = 4\dot{y}y^3$. Et ſcripto $\dot{x} \times BC$ pro $\dot{z}$, fiet $2\dot{x}z \times BC + ax\dot{x} \times BC + a\dot{x}z = 4\dot{y}y^3$. Adeoque $2z \times BC + ax \times BC + az : 4y^3 \; (: : \dot{y} : \dot{x}) : : BD : BT$. Quamobrem ſi ex naturâ curvæ AC detur ordinata BC, et area ACB, ſive z, dabitur punctum T, per quod tangens DT tranſibit.

13. Ad eundem modum ſi $3z = 2y$ ſit æquatio ad curvam AD, erit $3\dot{z}$ (ſive $3\dot{x} \times BC$) $= 2\dot{y}$. Adeoque $3CB : 2 \; (: : \dot{y} : \dot{x}) : : BD : BT$. Et ſic in aliis.

14. Exempl. 5. Sit $AB = x$, $BD = y$, ut antè; et Curvæ cujuſvis AC longitudo ſit z; ductâque ad eam tangente, ct, erit $Bt : Ct : : \dot{x} : \dot{z}$ ſive $\dot{z} = \frac{\dot{x} \times Ct}{Bt}$.

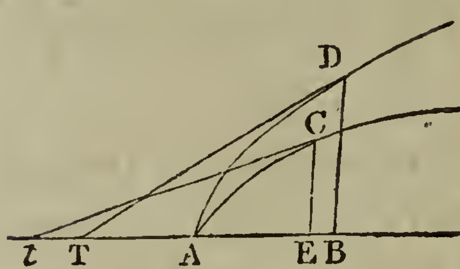
15. Jam ad aliam Curvam AD, cujus tangens ducenda eſt, detur quælibet æquatio, in quâ z involvitur; puta ſi $z = y$, erit

 $\dot{z} = \dot{y}$.

CAPUT VI. $\dot{z}=\dot{y}$. Adeoque Ct : Bt $(::\dot{y}:\dot{x})$ :: BD : BT. Invento autem T age DT tangentem.

16. Sic poſito $xz=yy$, erit $\dot{x}z+\dot{z}x=2\dot{y}y$, et pro $\dot{z}$ ſcripto $\frac{\dot{x}\times Ct}{Bt}$, emerget $\dot{x}z+\frac{\dot{x}x\times Ct}{Bt}=2\dot{y}y$; quare eſt $z+\frac{x\times Ct}{Bt}:2y::$ BD : BT.

17. EXEMPL. 6. Sit AC Circulus aut alia quævis nota curva, quam tangat Ct; et ſit AD alia curva cujus tangentem DT ducere oportet, et quæ definitur aſſumendo AB = arcui AC, et (CE ac BD in dato angulo ad AB ordinatis) referendo BD ad CE vel AE in æquatione aliquâ. Dic ergo AB vel AC$=x$, BD$=y$, AE$=z$, & CE$=v$, et patet $\dot{v}$, $\dot{x}$ & $\dot{z}$ fluxiones ipſarum CE, AC & AE, eſſe inter ſe ut ſunt CE, Ct & Et. Adeoque $\dot{x}\times\frac{CE}{Ct}=\dot{v}$, & $\dot{x}\times\frac{Et}{Ct}=\dot{z}$.

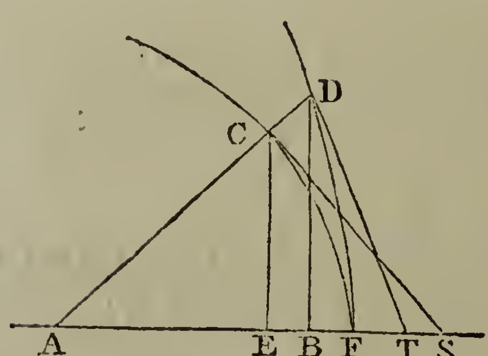


Detur jam quælibet æquatio ad definiendam curvam AD, veluti $y=z$, et erit $\dot{y}=\dot{z}$. Adeoque Et : Ct $(::\dot{y}:\dot{x})$ :: BD : BT.

Vel detur $y=z+v-x$, et erit $\dot{y}=(\dot{z}+\dot{v}-\dot{x})=\dot{x}\times\frac{CE+Et-Ct}{Ct}$. Adeoque CE$+Et-Ct$: Ct $(::\dot{y}:\dot{x})$ :: BD : BT.

Vel denique detur $ayy=v^3$, et erit $2a\dot{y}y\ (=3\dot{v}v^2)=3\dot{x}\times v^2\frac{CE}{Ct}$. Adeoque $3vv\times$CE : $2ay\times$Ct :: BD : BT.

18. EXEMPL. 7. Sit FC Circulus quem tangat CS; ſitque FD curva, quæ definitur aſſumendo quamvis relationem applicatæ DB ad FC, arcum quem DA, ad centrum ducta, intercipit. Et demiſsâ CE in circulo applicatâ, dic AC vel AF$=1$, AB$=x$, BD$=y$, AE$=z$, CE$=v$, CF$=t$: et erit $\dot{t}z=(\dot{t}\times\frac{CE}{CS})=\dot{v}$ (m), et $-\dot{t}v\ (=\dot{t}\times\frac{-ES}{CS})=\dot{z}$ (n). Ubi pono $\dot{z}$ negativè, quòd AE diminuitur dum EC augetur. Eſt inſuper AE : EC :: AB : BD, adeoque $zy=vx$, et inde per Prob. 1. $\dot{z}y+\dot{y}z=\dot{v}x+\dot{x}v$. Et hæc, exterminatis $\dot{v}$, $\dot{z}$ & v, faciunt $\dot{y}x-\dot{t}y^2-\dot{t}x^2=\dot{x}y$.



19. Definiatur jam Curva DF æquatione quâvis, à quâ valor $\dot{t}$, hîc ſubſtituendus, deduci poſſit: puta ſit $t=y$ (æquatio ad Primam Quadraticem) et per Prob. 1. erit $\dot{t}=\dot{y}$. Adeoque $\dot{y}x-\dot{y}y^2-\dot{y}x^2=\dot{x}y$. Unde

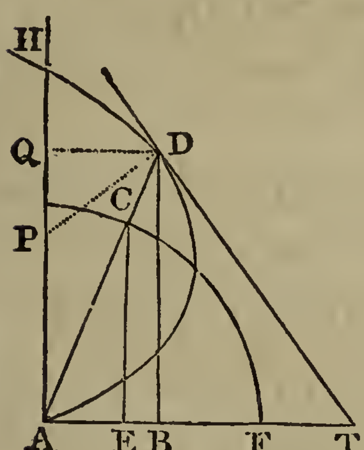
(m) Nempe cùm ſit fluxio arcûs ad fluxionem ſinûs ut radius ad ſinum complementi (Excerpt. IV. ex Epiſt. not. (l) Cor.) cùmque propter angulos ad C, E rectos ſit CS : CE = AC : AE = 1 : z.

$y:xx$

$y : xx+yy-x$ $(: : \dot{y} : -\dot{x}) : :$ BD (y) : BT. Quare BT $= x^2 + y^2 - x$. Et AT $= xx + y^2 = \frac{\overline{AD}|^2}{AF}$. De Tangentibus Ducendis.

20. Ad eundem modum, ſi ſit $tt = by$, proveniet $2\dot{t}t = b\dot{y}$; et inde AT $= \frac{b}{2t} \times \frac{\overline{AD}|^2}{AF}$. Et ſic in aliis.

21. Exempl. 8. Quòd ſi AD ſumatur æqualis arcui FC, exiſtente ADH Spirali Archimedeâ; tum, ſtantibus jam poſitis linearum nominibus, eſt (propter angulum ABD rectum) $xx + yy = tt$. Et

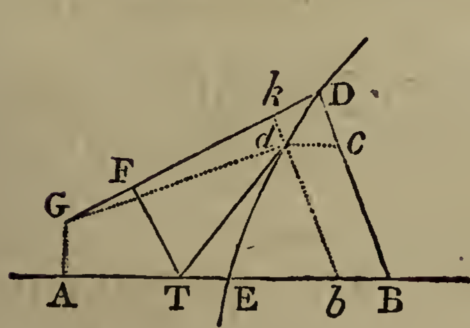


inde (per Prob. 1.) $\dot{x}x + \dot{y}y = \dot{t}t$. Eſt etiam AD : AC : : BD : CE, adeoque $tv = y$, et inde per Prob. 1. $\dot{t}v + \dot{v}t = \dot{y}$. Denique eſt fluxio arcûs FC ad fluxionem rectæ CE, ut AC ad AE, ſive ut AD ad AB, hoc eſt $\dot{t} : \dot{v} : : t : x$, et inde $\dot{t}x = \dot{v}t$. Confer jam inventas æquationes, et videbis eſſe $\dot{t}v + \dot{t}x = \dot{y}$, et inde $\dot{x}x + \dot{y}y \, (= \dot{t}t) = \frac{\dot{y}t}{v+x}$. Atque adeo, completo parallelogrammo ABDQ, ſi fiat QD : QP $(: :$ BD : BT $: : \dot{y} : -\dot{x}) : : x : y - \frac{t}{v+x}$, hoc eſt, ſi capiatur AP $= \frac{t}{v+x}$, erit PD ad Spiralem perpendicularis.

22. Ex his opinor ſatis manifeſtum eſt, quo pacto Curvarum omnium Tangentes ducendæ ſunt. Attamen non abs re erit, ſi præterea confectionem problematis, ubi Curvæ aliis quibuſcunque modis ad rectas referuntur, oſtenderem; ut è pluribus methodis facillima et ſimpliciſſima ſemper poſſit adhiberi.

MODUS II.

23. Sit D punctum in Curvâ, à quo ſubtenſa DG ducitur ad

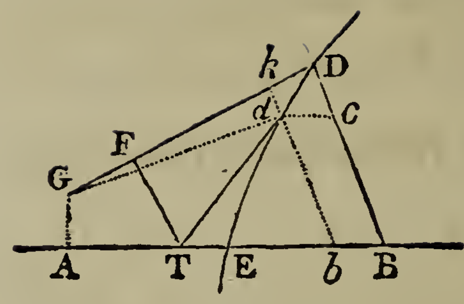


datum punctum G, ac DB, in dato quovis angulo, ordinatur ad baſin AB. Punctum verò D per infinitè parvum intervallum, Dd, in curvâ fluat, inque GD, ſumatur Gk æqualis Gd, et compleatur parallelogrammum dbBC. Et erunt Dk ac Dc contemporanea momenta ipſarum GD et BD, quibus nempe diminuuntur, dum D transfertur ad d. Jam Dd rectâ producatur, donec

(n) Nempe cùm ſit fluxio arcûs ad fluxionem ſinus complementi ut radius ad ſinum, (Excerpt. ex Epiſt. not. (k) § 5.) et propter angulos ad C, E rectos ſit CS : SE = AC : CE. 1 : v.

 cum

CAPUT VI.



cum AB conveniat in T; et ab iſto T ad ſubtenſam GD demittatur perpendiculum TF, et erunt trapezia Dcdk ac DBTF ſimilia, adeoque DB : DF :: DC : Dk.

24. Cùm itaque relatio BD ad GD in æquatione quâlibet, pro curvâ definiendâ, exponitur, quære relationem fluxionum, et cape FD ad DB in ratione fluxionis GD ad fluxionem BD; dein ab F erige perpendiculum FT, quod cum AB concurrat in T, et acta TD curvam tanget in D. Cape autem DF verſus G ſi ſit affirmativa; ſin ſecus, cape ad contrarias partes.

25. EXEMPL. I. Dic GD$=x$ et BD$=y$, et eſto earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Eritque fluxionum ratio $3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=0$. Atque adeo $3x^2-2ax+ay:3y^2-ax(::\dot{y}:\dot{x})::$ DB (y) : DF. Eſt ergo DF $=\frac{3y^3-axy}{3x^2-2ax+ay}$. Adeoque dato quolibet in curvâ puncto D, et inde BD et GD, ſive y et x, dabitur punctum F : unde ſi normalem FT erigas, ad ejus concurſum cum baſi AB ducta DT curvam tanget.

26. Et hinc patet Regulam perinde ac in priori caſu concinnari poſſe. Scilicet æquationis expoſitæ terminos omnes ad eaſdem partes diſpone, et ſigillatim per dimenſiones ordinatæ y multiplica, et exitum colloca in numeratore: dein terminos ejus ſigillatim per dimenſiones ſubtenſæ x multiplica, et exitum, per ſubtenſam illam x diviſum, colloca in denominatore valoris DF. Illamque DF cape ad partes contra G ſi ſit affirmativa, ſin ſecus, cape ad eaſdem partes. Et nota, quòd nihil interſit quanto intervallo punctum G diſtat à baſi AB, ſi fortè diſtat, neque quinam ſit angulus ordinationis ABD.

27. Sic æquatio ſuperior $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, primâ fronte dat $axy-3y^3$ pro numeratore, et $3x^2-2ax+ay$ pro denominatore valoris DF.

28. Sic etiam $a+\frac{b}{a}x-y=0$ (quæ æquatio eſt ad conicam ſectionem (°) dat $-y$ pro numeratore et $\frac{b}{a}$ pro denominatore valoris DF, quæ ideo erit $=-\frac{ay}{b}$.

29. Et

(°) Nimirum quæ umbilicum habeat punctum G; directricem, rectam quandam poſitione datam cum

29. Et sic in Conchoide (ubi res expeditiùs absolvitur quàm ante) posito GA $=b$, LD $=c$, GD $=x$ et BD $=y$, (vid. Fig. Ex. 3. Mod. I.) DE TANGENTIBUS DUCENDIS.

erit $\begin{matrix} \text{BD}:\text{DL}::\text{GA}:\text{GL} \\ y:c::b:x-c \end{matrix}$. Adeoque $xy-cy=cb$, sive $xy-cy-cb=0$.

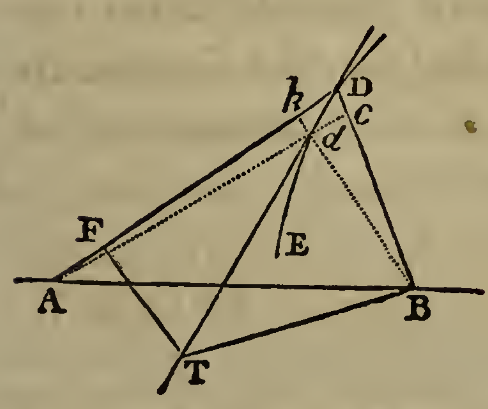
Quæ æquatio juxta regulam dat $\frac{xy-cy}{y}$, hoc est $x-c=$ DF. Produc ergo GD ad F, ut sit DF $=$ LG, et ad F erige normalem FT occurrentem asymptoto AB in T, et acta DT Conchoidem tanget.

30. Siquando compositæ quantitates in æquatione reperiantur, ad methodum generalem recurrendum est, nisi ubi malueris æquationem reducere.

31. EXEMPL. 2. Si detur æquatio $\overline{b+y}\times\sqrt{cc-yy}=yx$ pro relatione inter GD et BD (fig. præced.) determinandâ, fluxionum relationem juxta Prob. I. quære. Utpote ficto $\sqrt{cc-yy}=z$, æquationes $bz+yz=yx$, et $cc-yy=zz$ habebis; et inde fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, relationes $b\dot{z}+y\dot{z}+\dot{y}z=\dot{y}x+y\dot{x}$, et $-2\dot{y}y=2\dot{z}z$. Et exterminatis $\dot{z}$ et z, orietur $\dot{y}\sqrt{cc-yy}-\frac{b\dot{y}y+\dot{y}y^2}{\sqrt{cc-yy}}-\dot{y}x=\dot{x}y$. Est ergo $y:\sqrt{cc-yy}-\frac{by+yy}{\sqrt{cc-yy}}-x\,(::\dot{y}:\dot{x})::$ BD (y) : DF.

MODUS III.

32. Præterea si Curva ad duas subtensas AD et BD referatur, quæ à datis punctis A ac B ductæ ad curvam conveniunt: concipe punctum illud D per infinitè parvum spatium Dd in curvâ profluere. Et in AD et BD, cape A$k=$ Ad et B$c=$ Bd. Et erunt kD & cD contemporanea momenta linearum AD et BD. Cape jam DF ad BD in ratione momenti Dk ad momentum Dc (i. e. in ratione fluxionis lineæ AD ad fluxionem lineæ BD) et erige perpendicula BT, FT, concurrentia in T; eruntque trapezia DFTB ac Dkdc similia, et perinde diagonalis DT curvam tanget.



33. Per æquationem itaque, quâ relatio inter AD et BD definitur, quære relationem fluxionum ope Prob. I. Et cape FD ad BD in eâdem ratione.

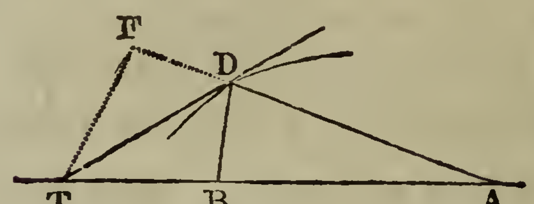
cum rectâ AB, positione datâ, parallelam. Hamilton. Con. Lib. II. Prop. 11.

34. Ex-

34. Exempl. Poſito AD$=x$ et BD$=y$, ſit earum relatio $a+\frac{ex}{d}-y=0$, quæ æquatio eſt ad Ellipſes ſecundi generis, quarum proprietates ad lucem refringendam Des-Cartes in Lib. II. Geometriæ docuit. Et fluxionum relatio erit $\frac{e\dot{x}}{d}-\dot{y}=0$. Eſt itaque $e:d\,(::\dot{y}:\dot{x})$ BD : DF.

35. Et pari ratione ſi $a-\frac{ex}{d}-y=0$, erit $e:-d::$ BD : DF. In priori caſu, cape DF verſus A, et ad contrarias partes in poſteriori.

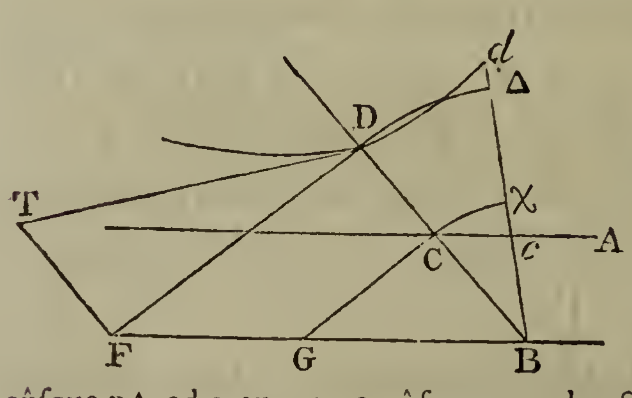
36. Corol. 1. Hinc ſi $d=e$ (quo caſu curva evadit conica ſectio) erit DF$=$DB. Et inde triangula DFT, DBT, æqualia, angulusque FTB à tangenti biſecabitur.



37. Corol. 2. Hinc etiam quæ Des-Cartes de his Curvis circa refractiones, haud abſque circuitu, demonſtravit, per ſe manifeſta ſunt: ſiquidem DF ac DB (quæ ſunt in datâ ratione d ad e) reſpectu ſinûs totius DT ſint ſinus angulorum DTF ac DTB, id eſt, incidentiæ radii AD in ſuperficiem curvæ, et reflectionis vel refractionis ejus DB. Eſtque par ratio de refractionibus conicarum ſectionum, ſi modò punctorum A vel B alterutrum infinitè diſtare concipiatur.

38. Perfacile eſt hanc Regulam pro more præcedentium concinnare, et pluribus exemplis donare; quinimo ubi Curvæ aliis quibuſcunque modis ad rectas referuntur, et ad præcedentes formas haud commodè reduci poſſunt, perfacile eſt alias Regulas, ad harum exemplar, pro re natâ excogitare.

MODUS



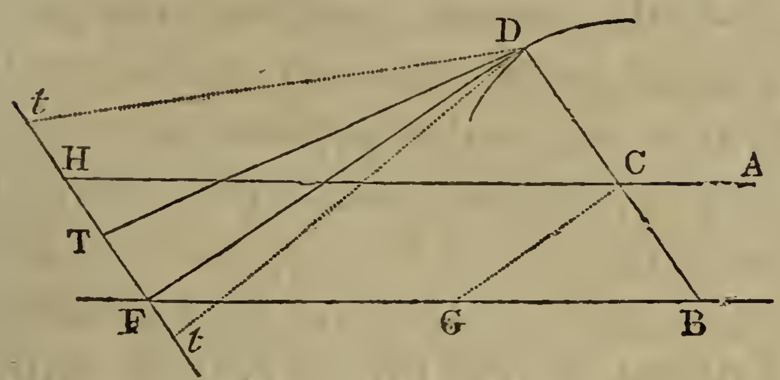
(p) Puta rectam mobilem BCD in locum Bcd perveniſſe. Centro B radiis BC, BD ſcribantur arcus circulares Cχ, DΔ qui rectæ Bd in punctis χ, Δ occurrant. Per D ductam puta rectam DT, quæ curvam illam, ad quam terminari intelligitur recta mobilis BD, in puncto D contingat; & per C ducatur CG cum rectâ DF parallela. Fluxio rectæ BD ad fluxionem rectæ BC rationem habet eam, quæ prima eſt naſcentis Δd ad naſcentem $c\chi$. Sed ratio Δd ad $c\chi$ componitur è rationibus illius Δd ad arcum DΔ arcûſque DΔ, ad arcum Cχ arcûſque Cχ, ad rectam χc. Sed arcus DΔ eſt ad arcum Cχ ut recta BD ad rectam BC. Quare ratio rectæ Δd ad rectam $c\chi$ componitur è rationibus illius Δd ad arcum DΔ, rectæque DB, ad CB, arcûſque Cχ ad rectam χc. Naſcentis autem Δd ad arcum naſcentem DΔ prima ratio eadem eſt quæ rectæ FT ad rectam FD. Et arcûs naſcentis Cχ ad naſcentem rectam χc prima ratio eadem eſt quæ rectæ GC ad rectam CB, ſive rectæ FD ad DB. Naſcentis igitur $d\Delta$ ad naſcentem χc ratio prima, ſive ratio fluxionis rectæ BD ad fluxionem rectæ BC, componitur è rationibus

tionibus

MODUS IV.

De Tangentibus Ducendis.

39. Quemadmodum si rectæ BD circa datum punctum B revolventis, punctum D sit ad Curvam aliquam, et C sit intersectio ejus cum rectâ AC positione datâ, habeaturque relatio inter BC et BD quâcunque æquatione designata; age BF parallelam AC, eique occurrat DF normalis ad BD. Et ad DF itidem erige normalem FT, et cape in ratione ad BC, quam habet fluxio ipsius BD ad fluxionem ipsius BC. Acta DT curvam tanget (p).



MODUS V.

40. Sin dato puncto A, æquatio relationem inter AC ac BD designat, duc CG parallelam DF, et cape FT in ratione ad BG, quam habet fluxio BD ad fluxionem AC (q).

MODUS VI.

41. Vel denique si æquatio relationem inter AC et CD definit: conveniant AC et FT in H, et cape HT in ratione ad BG quam habet fluxio CD ad fluxionem AC (r). Et sic in aliis.

tionibus rectæ FT ad rectam FD, rectæque BD ad rectam BC, rectæque FD ad rectam BD; hoc est è rationibus rectæ FT ad rectam FD, rectæque FD ad rectam BD, rectæque BD ad rectam BC. Verum ex iisdem componitur rectarum FT, BC inter ipsas ratio. Quare $\dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}} = FT : BC$. Atque ex his satis patet veritas constructionis à Newtono præscriptæ.

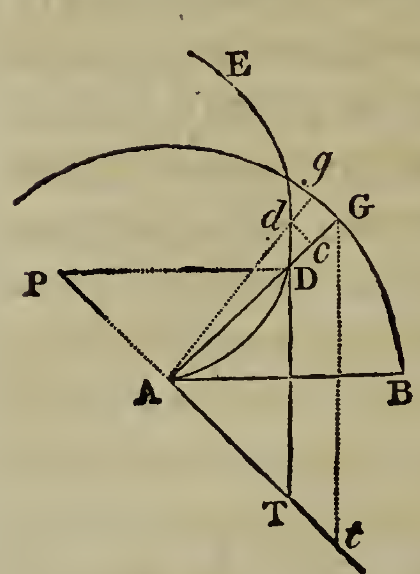
(q) Manentibus quæ modò constructa sunt, fluxio rectæ BC ad fluxionem rectæ AC rationem habebit eam quæ prima est nascentis χc ad nascentem cc: sive eam quam recta BC habet ad BG. Jam cùm ex iis quæ suprà sunt ostensa, sit $\dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}} = FT : BC$, et ex mox ostensis sit $\dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{AC}} = BC : BG$, erit ex æquo $\dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{AC}} = FT : BG$.

(r) Cum sit $FT : BC = \dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}}$ (not. p) et æquales sint FH, BC, erit $FT : FH = \dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{BC}}$. Invertendo et convertendo $FH : HT = \dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{BC}} - \dot{\overline{BD}}$. Sed $\dot{\overline{BC}} - \dot{\overline{BD}} = \dot{\overline{CD}}$. (Geometr. Flux. Th. v.) Quare $FH : HT = \dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{CD}}$. Invertendo $HT : FH = \dot{\overline{CD}} : \dot{\overline{BC}}$. Sed $FH : FT = \dot{\overline{BC}} : \dot{\overline{BD}}$ (not. r) et $FT : BG = \dot{\overline{BD}} : \dot{\overline{AC}}$ (not. q). Quare ex æquo $HT : BG = \dot{\overline{CD}} : \dot{\overline{AC}}$.

Caput VI.

MODUS VII. De Spiralibus.

42. Haud secus absolvitur Problema, ubi Curvæ non ad rectas, sed ad alias Curvas lineas, uti solent Mechanicæ, referuntur. Sit BG circuli peripheria, in cujus semidiametro AG, dum circa centrum A convolvitur, moveatur utcunque punctum D, et Spiralem ADE describat. Et concipe Dd esse partem curvæ infinitè parvam, per quam D fluit; et in AD cape AC=Ad, et erunt cD ac Gg contemporanea momenta rectæ AD et peripheriæ BG. Duc ergo At parallelam rectæ cd, id est perpendicularem rectæ AD, et cum eâ tangens DT conveniat in T. Eritque cD : cd : : AD : AT. Sit insuper Gt parallela tangenti, et erit cd : Gg (: : Ad vel AD : AG) : : AT : At.



43. Quare expositâ quâcunque æquatione, quâ relatio BG ad AD definitur, quære rationem fluxionum per Prob. 1; et cape At in illâ ratione ad AD: eritque Gt tangenti parallela.

44. Exemplum 1. Dictis BG$=x$, et AD$=y$, fit earum relatio $x^3-ax^2+axy-y^3=0$. Et ope Prob. 1. emerget $3x^2-2ax+ay : 3y^2-ax$ $(: : \dot{y} : \dot{x})$: : AD : At : : AP : AG. Puncto t sic invento, duc Gt eique parallelam DT, et illa curvam tanget.

45. Exempl. 2. Si sit $\frac{ax}{b}=y$ (quæ æquatio est ad Spiralem Archimedeam) erit $\frac{a\dot{x}}{b}=\dot{y}$. Adeoque $a : b\,(: : \dot{y} : \dot{x})$: : AD : At. Unde obiter si TA producatur ad P, ut sit AP : AB : : $a : b$, PD ad curvam recta erit ([f]).

46. Exempl. 3. Si $xx=by$, erit $2\dot{x}x=b\dot{y}$, adeoque $2x{:}b$::AD:At. Et sic Tangentes ad quascunque Spirales nullo negotio determinari possunt.

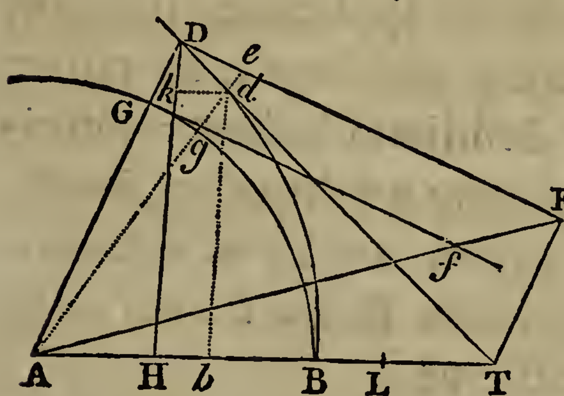
MODUS

([f]) Puta enim eductam esse DP ad angulos cum helice, hoc est, cum tangente ejus DT rectos. Et propter angulos ad A rectos, erit PA ad AD ut AD ad AT. (El. vi. 8.) Ratio autem AD ad AT componitur è rationibus illius AD ad At et At ad AT; sive è rationibus a ad b et AG vel AB ad AD. Quare PA ad AD rationem habet eam, quæ componitur è rationibus a ad b et AB ad AD. Et ex iisdem componitur ratio rectanguli $a \times$ AB ad rectangulum $b \times$ AD. (El. vi. 23.) Erit igitur PA ad AD ut rectangulum $a \times$ AB ad rectangulum $b \times$ AD. Sed PA est ad AD ut rectangulum $b \times$ PA ad rectangulum $b \times$ AD. (El. vi. 1.) Rectangulum igitur $b \times$ PA erit ad rectangulum $b \times$ AD ut rectangulum

MODUS VIII. De Quadraticibus.

De Tangentibus Ducendis.

47. Ad hæc ſi Curva ſit ejuſmodi, ut per centrum A ductâ utcunque AGD, quæ circulo in G, curvæque in D occurrat; relatio inter arcum BG et rectam DH, quæ in dato angulo ad baſin AB ordinata eſt, æquatione quâvis definiatur: concipe punctum D per infinitè parvum intervallum ad d in curvâ moveri, et completo parallelogrammo $dbHk$, productâque Ad ad e ut ſit Ae=AD: erunt Gg arcûs BG, et Dk ordinatæ DH contemporanea momenta.



Produc jam Dd rectâ ad T, ubi cum AB conveniat (t), et demitte TF in De (u) perpendicularem; eruntque trapezia, Dkde, DHTF, ſimilia: atque adeo Dk : De : : DH : DF. Et præterea ſi Gf ad AG normalis erigatur, quæ cum AF concurrat in f, propter parallelas DF, Gf, erit De : Gg : : DF : Gf. Quamobrem ex æquo eſt DH : Gf : : Dk : Gg, hoc eſt, ut momenta ſive fluxiones linearum DH et BG.

48. Per æquationem itaque quâ relatio BG ad DH definitur, quære rationem fluxionum (per Prob. I.) et in eâ ratione cape Gf (tangentem circuli BG) ad DH. Age DF parallelam Gf, quæ cum Af productâ conveniat in F. Et ad F erige normalem FT occurrentem AB in T, et acta DT Quadratricem tanget.

49. Exempl. I. Nominatis BG=x, ac DH=y, eſto $xx=by$, et (per Prob. I.) erit $2\dot{x}x=b\dot{y}$. Adeoque $2x : b : : (\dot{y} : \dot{x}) : :$ DH : Gf. Et invento f, cætera, ut præſcriptum, eſt determinabis.

50. Cæterùm hæc Regula fortè ſic elegantior evadet; fac $\dot{x} : \dot{y} : :$ AB : AL. Dein AL : AD : : AD : AT, et DT curvam tanget. Nam propter æqualia triangula AFD, ADT eſt AD×DF=AT×DH. Adeoque AT : AD (: : DF : DH, ſive $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ Gf) : : AD : $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ AG, ſive AL (x).

51. Ex-

rectangulum $a\times$AB ad rectangulum $b\times$AD. (El. V. 11.) Rectangula igitur $\overline{b\times\text{PA}}$, $\overline{a\times\text{AB}}$ ſunt inter ſe æqualia. (El. V. 9.) Quare PA erit ad AB ut a ad b. (El. VI. 16.)

(t) Hoc eſt, produci intelligatur recta, quæ curvam in D contingit, uſque-dum cum AB conveniat. Concurſus eſto T.

(u) Hoc eſt, in tangentem arcûs circularis centro A radio AD ſcripti.

(x) Hæc ratiocinatio magis geometricè ad hunc modum concinnari poteſt. " Propter rectangula

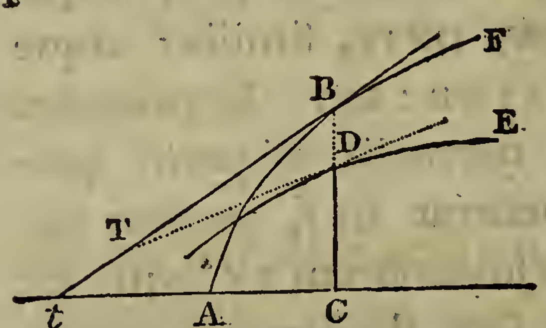
51. EXEMPL. 2. Esto $x=y$ (quæ æquatio est ad Veterum Quadraticem) et per Prob. I. $\dot{x}=\dot{y}$. Adeoque AB : AD :: AD : AT.

52. EXEMPL. 3. Esto $axx=y^3$, et erit $2a\dot{x}x=3\dot{y}y^2$. Fac ergo $3y^2 : 2ax\ (:: \dot{x} : \dot{y}) ::$ AB : AL. Dein AL : AD :: AD : AT.

53. Atque ita Tangentes aliarum Quadraticum, utcunque compositarum, possis expeditè determinare.

MODUS IX.

54. Si denique ABF sit Curva quævis data, quam tangat recta Bt, et rectæ BC, in dato angulo ad basin AC applicatæ, pars BD, inter hanc et aliam curvam DE intercepta, relationem ad curvæ portionem AB in æquatione quâcunque definitam habeat; alterius curvæ tangentem DT duces, capiendo, in hujus tangente, BT in eâ relatione ad BD, quam habet fluxio curvæ AB ad fluxionem rectæ BD.



55. EXEMPL. I. Dictis AB$=x$, et BD$=y$. Esto $ax=yy$, et per Prob. I. erit $a\dot{x}=2\dot{y}y$. Adeoque $a : 2y\ (:: \dot{y} : \dot{x}) ::$ BD : BT.

56. EXEMPL. 2. Sit $\frac{a}{b}\,x=y$ (æquatio ad Trochoidem si modò ABF sit Circulus) et erit $\frac{a}{b}\,\dot{x}=\dot{y}$. Adeoque $a : b ::$ BD : BT.

57. Et nihilo difficiliùs Tangentes, ubi ipsius BD ad AC vel ad BC relatio in æquatione quâvis exprimitur, vel ubi Curvæ aliis quibuscunque modis ad rectas, aliasve curvas, referuntur, possis ducere.

58. SUNT etiam alia non pauca Problemata, quorum solutiones ex hisce fluent. Cujusmodi sunt,

I. Invenire punctum Curvæ, ubi Tangens est ad basin, vel quamvis positione datam rectam, parallela, vel perpendicularis, vel in alio quovis angulo inclinata.

II. Invenire punctum, ubi Tangens maximè miniméve ad basin, aut

gula AD × DF, AT × DH inter se æqualia, erit AT ad AD ut DF ad DH. Præterea cùm AL sit ad AB ut $\dot{y}$ ad $\dot{x}$, ita enim factum est, cùm sit etiam $\dot{y}$ ad $\dot{x}$ ut DH ad Gf (id enim ostensum § 47.) erit AL ad AB ut DH ad Gf. Sed cùm AT sit ad AD ut DF ad DH, et AL ad AB ut DH ad Gf, ratio rectæ DF ad rectam Gf, quæ componitur e rationibus illius DF ad DH, et DH ad Gf, componetur illa quidem è rationibus rectæ AT ad rectam AD rectæque AL ad AB. Ex eisdem autem componitur ratio rectanguli AT × AL.

aut aliam poſitione datam rectam, inclinatur: hoc eſt invenire confinium flexûs contrarii. Hujus autem ſpecimen in Conchoide jam antè exhibui.

III. A dato quovis, extra Curvæ perimetrum, puncto rectam ducere, quæ cum perimetro aut angulum contactûs, aut rectum angulum, aut alium quemvis datum conficiet: hoc eſt, Tangentes vel Perpendiculares, vel aliter ad Curvam inclinatas rectas à dato quovis puncto ducere.

IV. A dato quovis intra Parabolam puncto rectam ducere, quæ maximum minimumve, quem poteſt, angulum cum perimetro ejus conficiet. Et idem de aliis curvis intellige.

V. Rectam ducere, quæ duas poſitione datas Curvas, vel eandem Curvam (ſi poteſt) in duobus punctis tangat.

VI. Curvam quamvis ſub datis conditionibus ducere, quæ aliam poſitione datam Curvam in dato puncto tanget.

VII. Luce in quamlibet curvam ſuperficiem incidente, cujuſvis radii refractionem determinare.

Horum et ſimilium Problematum confectiones, ubi non obſtat computandi tædium, non ſunt ita difficiles ut iis explicandis immorari opus ſit. Et Geometris, credo, magis gratum erit ſic tantùm recenſuiſſe.

CAPUT SEPTIMUM.

PROB. V.

Curvæ alicujus ad datum punctum Curvaturam invenire.

1. PROBLEMA cum primis elegans videtur, et ad Curvarum ſcientiam utile. In ejus autem conſtructionem generalia quædam præmittere convenit.

I. Ejuſdem Circuli eadem eſtque undique Curvatura, et inæqualium Circulorum Curvaturæ ſunt reciprocè proportionales diametris. Si alicujus diameter diametro alterius duplo minor eſt, ejus peripheriæ Curvatura erit duplo major; ſi diameter triplo minor eſt, Curvatura erit triplo major, &c.

AT × AL ad rectangulum AD × AB. (El. VI. 23.) Rectangulum igitur AT × AL erit ad rectangulum AD × AB ut DF ad G*f*, ſive ut AD ad AG vel AB; hoc eſt ut quadratum ex AD, ad rectangulum AD × AB. Rectangulum igitur AT × AL quadrato ex AD æquale eſt. (El. V. 9.) Quare AT : AD = AD : AL. (El. VI. 17.)

 II. Si

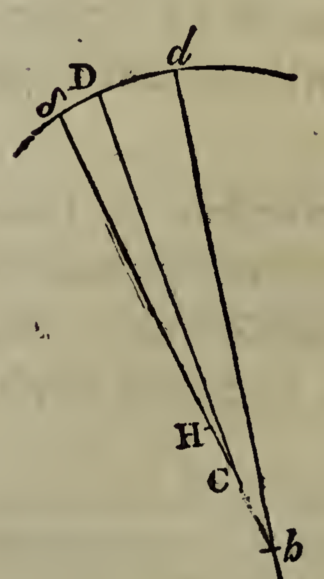
CAPUT VII. II. Si Circulus curvam aliquam ad partem concavam in dato puncto tangat, sitque talis magnitudinis, ut alius contingens circulus in angulis contactûs proximè punctum istud interscribi nequeat, Circulus ille ejusdem est curvitatis ac Curva in isto puncto contactûs. Nam circulus, qui inter curvam et alium circulum juxta punctum contactûs interjacet, minus deflectit à curvâ, ejusque curvaturam magis appropinquat, quàm ille alius circulus: et proinde curvaturam ejus maximè appropinquat, inter quem et curvam non alius quisquam potest intercedere.

III. Itaque Centrum Curvaminis, ad aliquod curvæ punctum, est centrum tangentis circuli æqualiter incurvati: et sic Radius vel semidiameter Curvaminis est pars perpendiculi ad istud centrum terminata.

IV. Et proportio curvaminis, ad diversa ejus puncta, è proportione curvaminis circulorum æquè curvorum, sive è reciprocâ proportione Radiorum curvaminis innotescit.

2. PROBLEMA itaque ad hunc locum redit, ut Radius vel Centrum Curvaminis inveniatur.

3. Concipe ergo, quòd ad tria curvæ puncta δ, D ac d, ducantur perpendicula; quarum quæ sunt ad, D et δ, conveniant in H; et quæ ad D et d, conveniant in h. Et puncto D existente medio, si major est curvitas à parte Dδ quàm Dd, erit δH minor quàm dh. Sed quo perpendicula δH ac dh propiora sunt intermedio perpendiculo, eo minùs distabunt puncta H et h, et convenientibus tandem perpendiculis, coalescent. Coalescant autem in puncto C, et erit illud C centrum curvaminis, ad curvæ punctum D, cui perpendicula insistunt. Id quod per se manifestum est.



4. Hujus autem C varia sunt symptomata; quæ ad ejus determinationem inservire possunt. Quemadmodum

I. Quòd sit concursus perpendiculorum hinc et inde à DC infinitè parùm distantium.

II. Quòd perpendiculorum finitè parum distantium intersectiones hinc et inde dirimit, ac disterminat. Ita ut quæ

quæ ſunt à parte curviori Dδ citeriùs, ad H, conveniant; et quæ ſunt ex alterâ minùs curvâ parte, Dd, remotiùs conveniant, ad h. De Radio Curvaturæ.

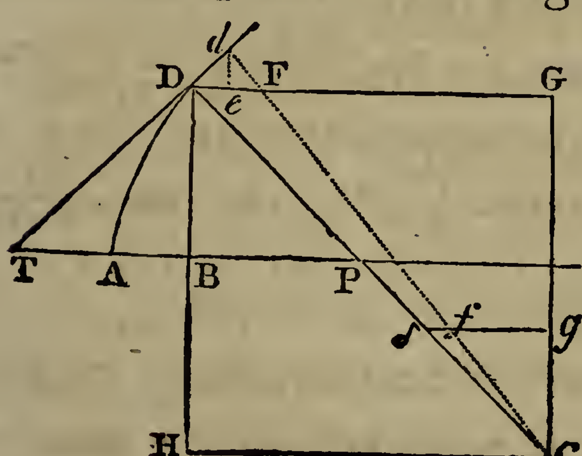
III. Si DC, dum curvæ perpendiculariter inſiſtit, moveri concipiatur, illud ejus punctum C (ſi demas motum accedendi vel recedendi à puncto inſiſtentiæ D) minimè movebitur, ſed centri motionis rationem habebit.

IV. Si centro C, intervallo DC, circulus deſcribatur, non poteſt alius deſcribi circulus qui juxta contactum interjacebit.

V. Denique ſi alterius alicujus tangentis circuli centrum, ut H, vel h, paulatim ad hujus centrum C accedat, donec tandem conveniat, tunc aliquod è punctis, in quibus circulus ille curvam ſecavit, ſimul conveniet punctum contactûs D.

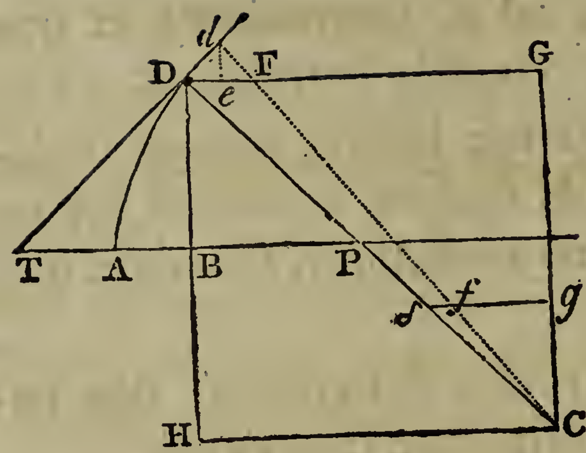
Et unumquodque horum ſymptomatum anſam præbet diverſimodè reſolvendi Problema. Nos autem primum tanquam ſimpliciſſimum eligemus.

5. Ad quodlibet curvæ punctum D, eſto DT tangens, DC perpendiculum, et C centrum curvaminis, ut antè. Sitque AB baſis, ad quam DB in angulo recto applicatur, et cui DC occurrit in P. Age DG parallelam AB, et CG perpendiculum; inque eo cape Cg cujuſlibet datæ magnitudinis; et age $g\delta$ perpendiculum, quod occurrat DC in δ. Eritque Cg : $g\delta$: : (TB : BD : :) fluxio baſis : fluxionem applicatæ. Concipe præterea punctum D per infinitè parvum intervallum Dd in curvâ promoveri. Et actis de ad DG et Cd ad curvam normalibus, quarum Cd occurrit DG in F et δg in f: erit De momentum baſis, de momentum applicatæ, ac δf contemporaneum momentum rectæ $g\delta$. Eſtque DF = De + $\frac{de \times de}{De}$. Habitis itaque horum momentorum, ſive quod perinde eſt fluxionum generantium, rationibus, habebitur ratio GC ad datam gc (quippe quæ eſt DF ad δf) et inde punctum C determinabitur.



6. Sit ergo AB = x, BD = y, Cg = 1. Et $g\delta$ = z, et erit 1 : z : : $\dot{x}$: $\dot{y}$ ſeu $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Hujus autem z momentum δf dic $\dot{z} \times o$, factum nempe

ex



ex velocitate et infinite parvâ quantitate. Eritque momentum $De = \dot{x} \times o$, $de = \dot{y} \times o$ et inde $DF = \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$. Eft ergo $cg\ (1) : CG :: (\delta f : DF) :: \dot{z}o : \dot{x}o + \frac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$. Adeoque $CG = \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}$.

7. Cùm infuper bafis fluxioni $\dot{x}$ (ad quam tanquam uniformem fluxionem cæteras referre convenit) liberum fit quamcunque velocitatem tribuere: dic effe 1. Et erit $\dot{y} = z$, et $CG = \frac{1+zz}{\dot{z}}$. Et inde $DG = \frac{z+z^3}{\dot{z}}$, ac $DC = \frac{\overline{1+zz} \times \sqrt{1+zz}}{\dot{z}}$ (y).

8. Expofitâ itaque quâvis æquatione, quâ relatio BD ad AB pro curvâ definiendâ defignetur, imprimis quære relationem inter $\dot{x}$ et $\dot{y}$ per Prob. 1. et interea fubftitue 1 pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$. Dein ex æquatione refultante per idem Prob. 1. quære relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, et interea fubftitue 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$ ut antè. Atque ita per priorem operationem obtinebis valorem z, et per pofteriorem obtinebis $\dot{z}$: quibus habitis, produc DB ad H verfus concavam partem curvæ ut fit $DH = \frac{1+zz}{\dot{z}}$; et age HC parallelam AB et perpendiculo CD occurrentem in C, eritque C centrum curvaturæ ad curvæ punctum D. Vel cùm fit $1+zz = \frac{PT}{BT}$ (z), fac $DH = \frac{PT}{\dot{z} \times TB}$, vel $DC = \frac{\overline{DP}^3}{\dot{z} \times \overline{DB}^3}$ (aa).

9. EXEMPL. 1. Sic expofitâ $ax + bx^2 - y^2 = 0$ (æquatione ad Hyperbolam cujus latus rectum eft a, ac tranfverfum $\frac{a}{b}$) emerget (per Prob. 1) $a + 2bx - 2zy = 0$ (fcriptis nempe 1 pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$ in æquatione refultante, quæ fecus foret $a\dot{x} + 2b\dot{x}x - 2y\dot{y} = 0$). Et hinc denuo prodit $2b - 2zz - 2\dot{z}y = 0$ fcriptis iterum 1 pro $\dot{x}$ et z pro

(y) $DC = \sqrt{CG^2 + DG^2}$. $CG = \frac{1+zz}{\dot{z}}$. Et $DG = CG \times z = \frac{\overline{1+zz} \times z}{\dot{z}}$.

Quare $CG^2 = \frac{\overline{1+zz}^2}{\dot{z}\dot{z}}$. Et $DG^2 = \frac{\overline{1+zz}^2 \times zz}{\dot{z}\dot{z}}$. Ergo $CG^2 + DG^2 = \frac{\overline{1+zz}^2 \times \overline{1+zz}}{\dot{z}\dot{z}}$.

Ergo $\sqrt{CG^2 + DG^2} = \frac{\overline{1+zz} \times \sqrt{1+zz}}{\dot{z}} = DC$.

(z) $PB : BT = DB^2 : BT^2 = \dot{y}\dot{y} : \dot{x}\dot{x} = zz : 1$.

Ergo

pro $\dot{y}$. Per priorem eſt $z=\frac{a+2bx}{2y}$, et per poſteriorem $\dot{z}=\frac{b-zz}{y}$. DE RADIO CURVATURÆ.
Dato itaque quovis curvæ puncto D, et per conſequentiam x et y, ex his dabuntur z et $\dot{z}$; quibus cognitis, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=$ GC, vel DH, et age HC.

10. Quemadmodum ſi definitè ſit $a=3$, et $b=1$, adeoque $3x+xx=yy$, hyperbolæ conditio: et ſi aſſumatur $x=1$, erit $y=2$, $z=\frac{5}{4}$, $\dot{z}=-\frac{9}{32}$, et DH$=-9\frac{1}{9}$. Invento H erige HC occurrentem perpendiculo DC priùs ducto. Vel quod perinde eſt, fac DH:HC (::1:z)::1:$\frac{5}{4}$, et age DC curvaminis radium.

11. Siquando computationem non admodum perplexam fore cenſeas, poſſis indefinitos valores ipſorum $\dot{z}$ et z, in $\frac{1+zz}{\dot{z}}$ valore CG ſubſtituere. Et ſic in hoc exemplo, per debitam reductionem, obtinebis DH$=y+\frac{4y^3+4by^3}{aa}$, cujus tamen DH valor per calculum negativus prodit, ſicut in exemplo numerali videre eſt. At hoc tantùm arguit DH ad partes verſus B capiendam eſſe. Nam ſi fuiſſet affirmativus, ad contrarias partes duxiſſe oporteret.

12. COROL. Hinc ſi ſignum ſymbolo $+b$ præfixum mutetur; ut fiat $ax-bxx-yy=0$, æquatio ad Ellipſin, erit DH$=y+\frac{4y^3-4by^3}{aa}$. At poſito $b=0$, ut æquatio fiat $ax-y^2=0$ ad Parabolam, erit DH$=y+\frac{4y^3}{a^2}$, indeque DG$=\frac{1}{2}a+2x$.

13. Ex hiſce facilè colligitur Radium curvaturæ cujuſvis conicæ ſectionis valere $\frac{4\overline{DP}^3}{aa}$.

14. EXEMPL. 2. Si $x^3=ay^2-xy^2$ (æquatio ad Ciſſoidem Dioclis) exponatur, per Prob. 1. imprimis obtinebitur $3x^2=2azy-2xzy-yy$; ac deinde $6x=2a\dot{z}y+2azz-2zy-2x\dot{z}y-2xzz-2zy$: adeoque $z=\frac{3xx+yy}{2ay-2xy}$, et $\dot{z}=\frac{3x-az^2+2zy+xz^2}{ay-xy}$. Dato itaque quolibet Ciſſoidis puncto,

Ergo PT : BT $=1+zz:1$. Ergo $\frac{PT}{BT}=1+zz$.

(ᵃ) DC $=\frac{1+zz\times\sqrt{1+zz}}{\dot{z}}=\frac{PT}{BT\times\dot{z}}\times\frac{\sqrt{PT}}{\sqrt{BT}}=\frac{\sqrt{PT^3}}{\dot{z}\sqrt{BT^3}}$. Sed PT : TB $=$ PT^2 : TD^2 $=$ PD^2 : DB^2.

Ergo $\frac{PT}{TB}=\frac{PD^2}{DB^2}$. Ergo $\frac{PT^3}{BT^3}=\frac{PD^6}{DB^6}$. Et $\sqrt{\frac{PT^3}{BT^3}}=\frac{PD^3}{DB^3}$. Quare DC $=\frac{PD^3}{DB^3\times\dot{z}}$.

to,

CAPUT VII. to, et inde x et y, dabuntur z & $\dot{z}$. Quibus cognitis fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=$ CG.

15. EXEMPL. 3. Si detur $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy}=xy$ æquatio ad Conchoidem, ut ſuprà; finge $\sqrt{cc-yy}=v$, et emerget $bv+yv=xy$. Jam harum prior (viz. $cc-yy=vv$) per Prob. 1. dat $-2yz=2\dot{v}v$ (ſcripto z pro $\dot{y}$) et poſterior dat $b\dot{v}+y\dot{v}+zv=y+zx$. Et ex his æquationibus ritè diſpoſitis determinantur $\dot{v}$ et z. Ut autem $\dot{z}$ præterea determinetur, è noviſſimâ æquatione extermina fluxionem $\dot{v}$, ſubſtituendo $\frac{-yz}{v}$; et emerget $-\frac{byz}{v}-\frac{yyz}{v}+zv=y+xz$. Æquatio quæ fluentes quantitates ſine aliquibus earum fluxionibus, prout exigit reſolutio Prob. 1.) complectitur. Hinc itaque per Prob. 1. elicies $-\frac{bz^2}{v}-\frac{by\dot{z}}{v}+\frac{byz\cdot\dot{v}}{vv}-\frac{2yzz}{v}-\frac{yy\dot{z}}{v}+\frac{yyz\cdot\dot{v}}{vv}+z\dot{v}+\dot{z}v=2z+x\dot{z}$; quâ æquatione in ordinem reductâ et concinnatâ, dabitur $\dot{z}$. Inventis autem z et $\dot{z}$ fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=$ CG.

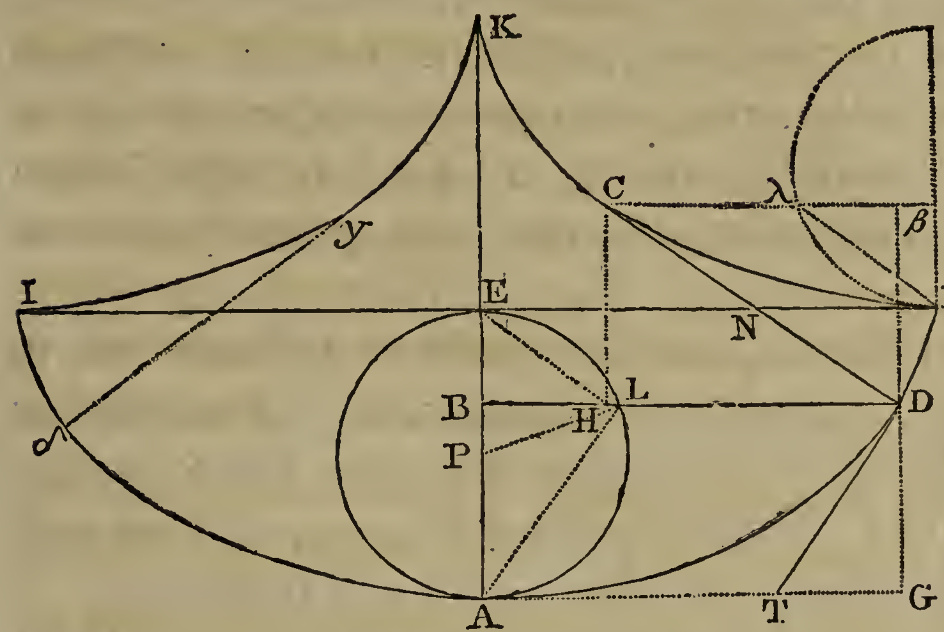
16. Si penultimam æquationem per z diviſiſſes, exinde poſtmodum, per Prob. 1. obtinuiſſes $-\frac{bz}{v}+\frac{by\dot{v}}{vv}-\frac{2yz}{v}+\frac{yy\dot{v}}{vv}+\dot{v}=2-\frac{y\dot{z}}{zz}$, æquationem priori ſimpliciorem pro determinando $\dot{z}$.

17. Dedi quidem hoc exemplum, ut modus operandi in ſurdis æquationibus conſtaret. At Conchoidis curvatura ſic breviùs inveniri potuit. Æquationis, $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy}=xy$, partibus quadratis et per yy diviſis, exurgit $\frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}\begin{matrix}+cc\\-bb\end{matrix}-2by-y^2=xx$. Et inde per Prob. 1. exoritur $-\frac{2b^2c^2z}{y^3}-\frac{2bc^2z}{y^2}-2bz-2yz=2x$; ſive $-\frac{bc^2}{y^3}-\frac{bc^2}{y^2}-b-y=\frac{x}{z}$. Et hinc denuo per Prob. 1. exoritur $\frac{3b^2c^2z}{y^4}+\frac{2bc^2z}{y^3}-z=\frac{1}{z}-\frac{x\dot{z}}{zz}$. Per priorem exitum determinatur z et per poſteriorem $\dot{z}$.

18. EXEMPL. 4. Sit ADF Trochois ad circulum ALE, cujus diameter eſt AE, accommodata; et ordinatâ BD ſecante circulum in L, dic AE $=a$, AB $=x$, BD $=y$, BL $=v$, et arcum AL $=t$, Et imprimis, ducto PL ſemidiametro, erit fluxio baſis AB ad fluxionem arcûs AL ut BL ad PL, hoc eſt, $\dot{x}$ ſive $1:\dot{t}::v:\frac{1}{2}a$. Atque adeo $\frac{a}{2v}=\dot{t}$.

19. Porro ex naturâ circuli eſt $ax - xx = vv$, et inde per Prob. I. $a - 2x = 2v\dot{v}$ ſive $\frac{a-2x}{2v} = \dot{v}$.

De Radio Curvaturæ.



20. Ad hæc ex naturâ Trochoidis eſt LD= arc. AL; adeoque $v + t = y$, et inde per Prob. I. $\dot{v} + \dot{t} = \dot{z}$.

21. Denique pro fluxionibus $\dot{v}$ & $\dot{t}$, valores hi ſubſtituantur, et emerget $\frac{a-x}{v} = z$. Unde per Prob. I. deducitur $\frac{-a\dot{v}}{vv} + \frac{x\dot{v}}{vv} - \frac{\dot{x}}{v} = \dot{z}$. Et his inventis, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}} = -$DH, et erige HC.

22. Corol. Cæterùm ex his conſectatur,

I. Quòd ſit DH=2BL, & CH=2BE, ſive quòd EF in N biſecat CD radium curvaminis. Et hoc patebit ſubſtituendo valores $\dot{z}$ et z jam inventos in æquatione $\frac{1+zz}{\dot{z}} =$ DH, et exitum probè reducendo.

II. Hinc Curva FCK, in quâ centrum curvaminis indefinitè verſatur, eſt alia huic æqualis Trochois, cujus vertices ad I et F adjacent hujus cuſpidibus. Nam circulus Fλ, æqualis ALE et ſimiliter poſitus, deſcribatur, et agatur Cβ parallela EF, circuloque occurrens in λ; et erit arcus Fλ (= arc. EL=NF) = Cλ.

III. CD quæ recta eſt ad trochoidem IAF contingit trochoidem IKF in C.

IV. Hinc, inverſis Trochoidibus, ſi ſuperioris trochoidis cuſpidi, K, pondus ad diſtantiam KA, ſive 2EA, filo appenſum innitatur, et, undulante pondere, filum ſe applicet ad trochoidis partes KF et KI, hinc inde obſiſtentes, ne in rectam diſtendatur, et cogentes, ut ad earum normam, dum digreditur à perpendiculo, paulatim deſuper inflectatur, parte CD ſub infimo contactûs puncto manente rectâ; pondus in inferioris trochoidis perimetro movebitur, utpote cui filum CD ſemper perpendiculare eſt.

 V. Eſt

CAPUT VII. V. Eſt itaque tota fili longitudo KA æqualis perimetro trochoidis KCF, ejuſque pars CD æqualis parti perimetri CF.

VI. Cùm filum circa mobile punctum C, tanquam centrum, undulando convolvitur; ſuperficies, per quam tota CD continuò trajicitur, erit ad ſuperficiem, per quam pars CN ſupra rectam IF ſimul trajicitur, ut $\overline{CD}^2$ ad $\overline{CN}^2$, hoc eſt ut 4 ad 1. Eſt itaque area CFN quarta pars areæ CFD, et area KCNE quarta pars areæ AKCD.

VII. Quinimo cùm ſubtenſa EL ſit æqualis et parallela CN, et circa immobile centrum, E, perinde ac CN circa mobile centrum C circumagitur, æquales erunt ſuperficies per quas ſimul trajiciuntur; nempe area CFN et circuli ſegmentum EL, et inde area NFD tripla erit ſegmenti iſtius, ac tota EADF tripla ſemicirculi.

VIII. Denique cùm pondus D attingit punctum F, totum filum circum Trochoidis perimetrum KCF flectetur, radio curvaminis CD manente nullo. Et proinde Trochois IAF ad ejus cuſpidem F curvior eſt quàm quilibet circulus, et cum tangente ſεF productâ conſtituit angulum contactûs infinitè majorem, quàm circulus cum rectâ poteſt conſtituere.

23. Sunt etiam anguli contactûs Trochoidalibus infinitè majores. Et illis deinceps alii infinitè majores, et ſic in infinitum, et tamen maximi ſunt infinitè minores rectilineis. Sic $xx=ay$, $x^3=by^2$, $x^4=cy^3$, $x^5=dy^4$, &c. denotant ſeriem Curvarum, quarum quælibet poſterior cum baſi conſtituit angulum contactûs infinitè majorem, quàm prior cum eâdem baſi poteſt conſtituere; eſtque angulus contactûs, quem prima $xx=ay$ conſtituit, ejuſdem generis cum circularibus; et ille, quem ſecunda $x^3=by^2$ conſtituit, ejuſdem generis cum Trochoidalibus. Et quamvis ſubſequentium anguli angulos præcedentium perpetim infinitè ſuperant, tamen anguli rectilinei magnitudinem nunquam poſſunt aſſequi.

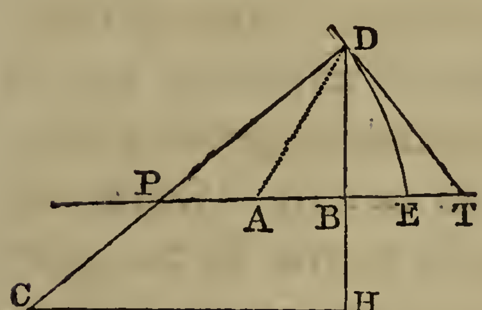
24. Ad eundem modum $x=y$, $x^2=ay$, $x^3=b^2y$, $x^4=c^3y$, &c. denotant ſeriem linearum, quarum ſubſequentium anguli ad vertices, cum baſibus confecti, ſunt angulis præcedentium perpetim infinitè minores. Quinetiam inter angulos contactûs duorum quorumlibet ex his generibus, poſſunt alia angulorum, ſe infinitè ſuperantium, intercedentia genera in infinitum excogitari.

25. Angulorum verò contactûs unum genus eſſe infinitè majus

jus alio constat, cùm unius generis Curva, utcunque magna, inter rectam tangentem et alterius generis Curvam, quantumvis parvam, juxta punctum contactûs non potest interjacere: sive cujus angulus contactûs necessariò continet alterius angulum contactûs, ut partem totius. Sic curvæ $x^4=cy^3$ angulus contactûs, quem cum basi constituit, necessariò continet angulum contactûs curvæ $x^3=by^2$. Qui verò se mutuò superare possunt anguli sunt ejusdem generis, uti de præfatis angulis Trochoidis et hujus Curvæ, $x^3=by^2$, contigit. De Angulo Contactus.

26. Ex his patet Curvas in quibusdam punctis posse infinitè rectiores esse, vel infinitè curviores, quolibet circulo; et tamen formam curvarum non ideo amittere. Sed hæc in transitu [bb].

27. Exempl. 5. Esto ED Quadratrix ad circulum centro A descriptum pertinens, ac DB ad AE normaliter demissâ, dic $AB=x$, $BD=y$, & $AE=1$. Eritque $\dot{y}x-\dot{y}y^2-\dot{y}x^2=\dot{x}y$, ut suprà Cap. VI. § 19: quæ æquatio, scriptis 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$, fit $zx-zy^2-zx^2=y$; et inde per Prob. 1. elicitur $\dot{z}x-\dot{z}y^2-\dot{z}x^2+z\dot{x}-2z\dot{x}x-2z\dot{y}y=\dot{y}$. Factâque reductione, et scriptis iterum 1 pro $\dot{x}$, et z pro $\dot{y}$, exit $\dot{z}=\frac{2z^2y+2zx}{x-x^2-y}$. Inventis autem z et $\dot{z}$, fac $\frac{1+zz}{\dot{z}}=DH$; et age HC ut suprà.



28. Si constructionem concinnare placet, perbrevem invenies: nempe ad DT duc normalem DP occurrentem AT in P, et fac esse $2AP:AE::PT:CH$.

29. Scilicet est $z=\frac{y}{x-x^2-y^2}=\frac{BD}{-BT}$; et $zy=\frac{\overline{BD}^2}{-BT}=-BP$; et $zy+x=-AP$; et $\frac{2z}{x-x^2-y^2}$ in $zy+x=\frac{2BD}{AE\times\overline{BT}^2}$ in $-AP=\dot{z}$. Præterea est $1+zz=\frac{PT}{BT}$, (utpote $=1+\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BT}^2}=\frac{\overline{DT}^2}{\overline{BT}^2}$,) adeoque $\frac{1+zz}{\dot{z}}=\frac{PT\times AE\times BT}{-2BD\times AP}=DH$. Denique est $BT:BD::DH:CH=\frac{PT\times AE}{-2AP}$. Ubi valor negativus tantùm arguit CH capiendam esse ad partes DH versus AB.

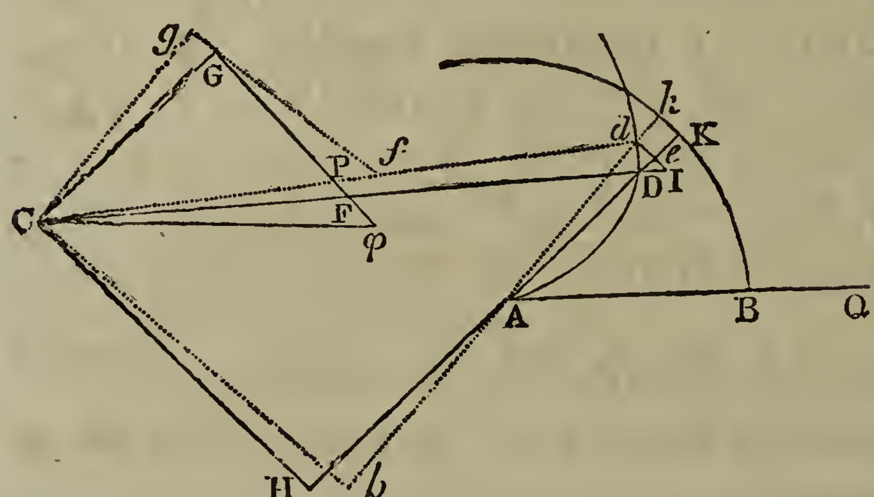
30. Eâdem methodo Spiralium, et aliarum quarumvis curvarum Curvatura calculo brevissimo determinari potest.

31. Ad Curvaturam præterea, cùm Curvæ aliis modis ad rectas referuntur, sine præviâ reductione determinandam, jam potuit

[bb] Idem argumentum auctor tractavit Princip. Lib. 1. Sect. 1. Schol.

Caput VII. hæc methodus applicari, perinde ut in determinando tangentes factum eſt. Sed cùm omnes Geometricæ Curvæ, ut et Mechanicæ (præſertim ubi definientes conditiones ad infinitas æquationes uti pòſt oſtendam reducantur) ad rectangulas ordinatas referri poſſint, videor ſatis præſtitiſſe. Qui plura deſiderat, haud difficulter proprio marte ſupplebit. Præſertim ſi in ejus rei illuſtrationem, ex abundanti, methodum pro Spiralibus adjecero.

32. Eſto BK circulus, A centrum ejus, B punctum in circumferentiâ datum, ADd Spiralis, DC perpendiculum ejus, et C centrum Curvitatis ad punctum D. Ductâque ADK rectâ, et ei parallelâ et æquali CG, ut et normali GF occurrente CD in F: dic AB vel $AK = 1 = CG$, $BK = x$, $AD = y$, et $GF = z$. Præterea concipe



punctum D per infinitè parvum ſpatium Dd in ſpirali moveri, et perinde per d agi ſemidiametrum AK, eique parallelam et æqualem Cg, et normalem gf occurrentem Cd in f. Cui etiam GF occurrit in P: produc GF ad ϕ ut ſit $G\phi = gf$, et ad AK demitte normalem de, et produc, donec cum CD conveniat ad I: et ipſarum BK, AD ac Gϕ contemporanea momenta erunt Kk, De et Fϕ; quæ proinde dicentur $\dot{x} \times o$, $\dot{y} \times o$, et $\dot{z} \times o$.

33. Jam eſt $AK : Ae(AD) :: kK : de = oy$, ubi aſſumo $\dot{x} = 1$ ut ſuprà. Item $CG : GF :: de : eD = yoz$, adeoque $yz = \dot{y}$. Præterea, $CG : CF :: de : dD (= oy \times CF) :: dD : dI = oy \times \overline{CF}^2$. Ad hæc propter ang. $PC\phi$ $(= \angle GCg) = \angle DAd$, et $\angle CP\phi$ $(= \angle CdI = \angle edD + \text{rect.}) = \angle ADd$, triangula $CP\phi$ et ADd ſunt ſimilia: et inde $AD : Dd :: CP\ (CF) : P\phi = o \times \overline{CF}^2$, unde aufer F$\phi$ et reſtabit $PF = o \times \overline{CF}^2 - o \times \dot{z}$. Denique demiſſâ CH normali ad AD, eſt $PF : dI :: CG : eH$ vel $DH = \frac{y \times \overline{CF}^2}{\overline{CF}^2 - \dot{z}}$; vel ſubſtituto $1 + zz$ pro $\overline{CF}^2$, erit $HD = \frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}}$. 34. Et

(cc) Nimirum erit $DA : DH = 1 + zz - \dot{z} : 1 + zz$ (per § 33.) Verùm ex eo quòd ſit $\dot{y}z + y\dot{z} = 0$ (§ 36) veniet $\dot{z} = \frac{-\dot{y}z}{y} = -z^2$. Unde $1 + zz - \dot{z} = 1 + 2z^2$, et $DA : DH = 1 + 2z^2 : 1 + z^2$. Rurſum

34. Et nota, quòd in hujuſmodi computationibus quantitates (ut AD et Ae) pro æqualibus habeo, quarum ratio à ratione æqualitatis non niſi infinitè parum differt. De Radio Curvaturæ.

35. Ex his autem prodit hujuſmodi Regula. Relatione inter x et y per quamlibet æquationem definitâ, quære relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$, ope Prob. I. et ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$ et yz pro $\dot{y}$. Deinde ex æquatione prodeunte quære denuò per Prob. I. relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, et iterum ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$. Prior exitus, per debitam reductionem, dabit $\dot{y}$ et z, et poſterior dabit $\dot{z}$: quibus cognitis fac $\frac{y+yzz}{1+zz-\dot{z}} =$ DH, et erige normalem HC ſpiralis perpendiculo DC, priùs ducto, occúrrentem in C; et erit C centrum curvaminis. Vel quod eodem recidit, cape CH : HD :: $\dot{z}$: 1, et age CD.

36. Exempl. 1. Si detur $ax=y$, æquatio ad Spiralem Archimedeam: erit per Prob. I. $a\dot{x}=\dot{y}$ ſive (ſcripto 1 pro $\dot{x}$ et yz pro $\dot{y}$) $a=yz$. Et hinc denuò per Prob. I. erit $0=\dot{y}z+y\dot{z}$. Quare ex dato quolibet ſpiralis puncto D, et inde longitudine AD ſive y, dabuntur $z\ (=\frac{a}{y})$ et $\dot{z}\ (=\frac{-a\dot{y}}{y^2}$ ſive $=\frac{-az}{y})$: quibus cognitis fac $1+zz-\dot{z} : 1+zz ::$ DA (y) : DH. Et $1 : \dot{z} ::$ DH : CH.

37. Et hinc facilè deducitur hujuſmodi conſtructio. Produc AB ad Q, ut ſit AB : arc. BK :: arc. BK : BQ. Et fac $\overline{\text{AB}+\text{AQ}}$: AQ :: AD : DH (cc).

38. Exempl. 2. Si $ax^2=y^3$ definit relationem inter BK et AD: obtinebis (per Prob. I.) $2a\dot{x}x=3\dot{y}y^2$, ſive $2ax=3zy^3$. Et inde rurſus $2a\dot{x}=3\dot{z}y^3+9z\dot{y}y^2$. Eſt itaque $z=\frac{2ax}{3y^3}$, et $\dot{z}=\frac{2a-9zzy^3}{3y^3}$. Quibus cognitis fac $1+zz-\dot{z} : 1+zz ::$ DA : DH. Vel opere concinnato, fac $9xx+10 : 9xx+4 ::$ AD : DH.

39. Exempl. 3. Ad eundem modum, ſi $ax^2-bxy=y^3$, determinat relationem BK ad AD, orietur $\frac{2ax-by}{bxy+3y^3}=z$, et $\frac{2a-2bzy-bz^2xy-9z^2y^3}{bxy+3y^3}=\dot{z}$. Ex quibus DH, et inde punctum C determinatur ut antè.

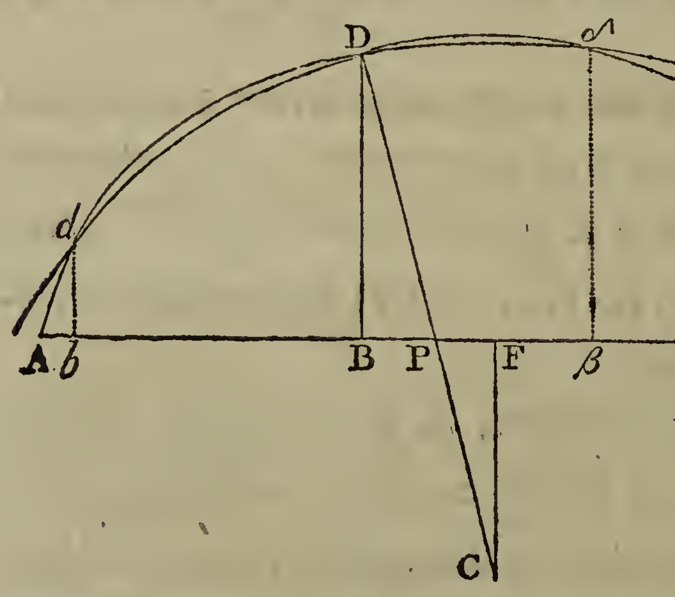
40. Et ſic aliarum quarumvis ſpiralium Curvaturam nullo negotio determinabis. Imo et ad horum exemplar Regulas pro quibuſlibet Curvarum generibus excogitare poſſis.

ſum eo quòd ſit $z=\frac{a}{y}$, et $y=ax$ (§ 36.) veniet $z=\frac{1}{x}$, et $z^2=\frac{1}{x^2}$. Unde DA : DH $= 1+\frac{2}{x^2} : 1+\frac{1}{x^2} = x^2+2 : x^2+1$. Scripto igitur QB × BA pro x^2, et AB² pro 1, et 2AB² pro 2; efficietur DA : DH = AQ × AB + AB² : AQ × AB = AQ + AB : AQ. Q. E. D.

41. Ab-

Caput VII. 41. Abſolvi tandem Problema; ſed cùm methodum adhibuerim à vulgaribus operandi modis ſatis diverſam, et ipſum problema non ſit ex eorum numero, quorum contemplatio apud Geometras increbuit: in allatæ ſolutionis illuſtrationem et confirmationem non gravabor aliam ſolutionem attingere, magis obviam et uſitatis in ducendo tangentes methodis affinem. Utpote ſi centro et intervallo quovis Circulus deſcribi concipiatur, qui Curvam quamlibet in pluribus punctis ſecet, et circulus ille contrahatur vel dilatetur, donec duo interſectionum puncta conveniant, is Curvam ibidem tanget. Et præterea ſi centrum ejus accedere vel recedere à puncto contactûs fingatur, donec tertium interſectionis punctum cum prioribus in puncto contactûs conveniat, is æquè curvus ac Curva in illo puncto contactûs evadet. Quemadmodum in ultimo quinque ſymptomatum centri curvaminis ſuprà monui, è quorum ſingulis dixi Problema diverſimodè confici potuiſſe.

42. Centro itaque C et radio CD deſcribatur circulus ſecans Curvam in punctis d, D ac δ. Et demiſſis, db, DB, $\delta\beta$ et CF ad baſin AB normalibus: dic AB$=x$, BD$=y$, AF$=v$, FC$=t$ ac DC$=s$; et erit BF$=v-x$, ac DB$+$FC$=y+t$; quorum quadratorum aggregatum æquatur quadrato DC. Hoc eſt, $t^2+v^2-2vx+x^2+y^2+2ty=s^2$. Quam ſi placet, abbreviare poſſis, fingendo $v^2+t^2-ss=$ ſymbolo cuivis q^2, et evadet $x^2-2vx+y^2+2ty+q^2=0$. Poſtquam verò t, v, et q^2 inveneris, ſi s deſideres, fac $=\sqrt{v^2+t^2-q^2}$.



43. Proponatur jam quælibet æquatio pro Curvâ definiendâ, cujus flexuræ quantitatem invenire oportet; et ejus ope alterutram quantitatem x vel y, extermina, et emerget æquatio cujus radices (db, DB, $\delta\beta$, &c. ſi extermines x, vel Ab, AB, Aβ, &c. ſi extermines y) ſunt ad interſectionum puncta (d, D, δ, &c.) Et proinde cùm ex iſtis tres evadent æquales, circulus et Curvam continget, et erit ejuſdem curvitatis ac Curva in puncto contactûs. Æquales

les autem evadent, conferendo æquationem cum aliâ totidem dimenſionum æquatione fictitiâ, cujus tres ſunt æquales radices, ut docuit Carteſius: vel expeditiùs multiplicando terminos ejus bis per arithmeticam progreſſionem. De Radio Curvaturæ.

44. Exempl. Sit $ax=y^2$, æquatio ad Parabolam; et exterminato x (ſubſtituendo nempe in æquatione ſuperiori valorem ejus $\frac{yy}{a}$) prodibit

$$\begin{array}{l} \frac{y^4}{a^2}-\frac{2v}{a}y^2+2ty+q^2=0; \\ \quad\; + \; y^2 \end{array}$$

cujus è radicibus y tres debent fieri æquales. Et in hunc finem terminos per arithmeticam Progreſſionem bis multiplico, ut hîc videre eſt. Et erit

$$\begin{array}{cccc} 4. & 2. & 1. & 0 \\ 3. & 1. & 0. & -1 \end{array}$$

$$\frac{12y^4}{aa}-\frac{4v}{a}y^2+2y^2=0$$

Sive $v=\frac{3y^2}{a}+\frac{1}{2}a$. Unde facilè colligitur eſſe $BF=2x+\frac{1}{2}a$ ut ſuprà.

45. Quamobrem dato quovis Parabolæ puncto D, duc perpendiculum DP, et in axe cape PF = 2AB, et erige normalem FC occurrentem DP in C, et erit C deſideratum centrum Curvitatis.

46. Idem in Ellipſi et Hyperbolâ præſtare poſſis, ſed calculo ſatis moleſto, et in aliis Curvis ut plurimùm faſtidioſiſſimo.

CAPUT VIII.

De Quæſtionibus quibuſdam Cognatis.

1. Ex hujus Problematis reſolutione conſectantur aliorum nonnullorum confectiones. Cujus modi ſunt,

I. Invenire punctum ubi linea datam habet curvaturam.

2. Sic in Parabolâ $ax=yy$, ſi punctum quæratur ad quod radius curvaturæ ſit datæ longitudinis f, è centro curvaturæ, ut priùs, invento, radium determinabis eſſe $\frac{z+4x}{2z}\sqrt{zz+4zx}$, quem pone æqualem f. Et factâ reductione emerget $x=-\frac{1}{4}a+\sqrt[3]{\frac{1}{16}aaf}$.

II. Invenire punctum Rectitudinis.

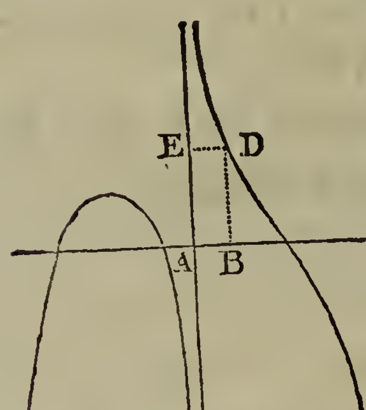
3. Punctum Rectitudinis voco, ad quod radius flexionis infinitus evadit, ſive centrum infinitè diſtans: quale eſt ad verticem Parabolæ $ax^3=y^4$. Et hoc idem plerumque limes eſt flexionis contrariæ, cujus determinationem ſuprà poſui. Sed et alia haud inelegans ex hoc Problemate ſcaturit. Nempe quo longior eſt

radius

 radius flexionis, eo minor evadit angulus DCd (fig. p. 445.) et pariter momentum $\dot{c}f$, adeoque fluxio quantitatis z unà diminuuntur, ita ut per ejus radii infinitatem prorsus evanescant. Quære ergo fluxionem $\dot{z}$ et suppone nullam esse.

4. Quemadmodum si limitem flexûs contrarii in Parabola secundi generis, cujus ope Cartesius construxit æquationes sex dimensionum, determinare oportet. Ad illam curvam æquatio est $x^3-bx^2-cdx+bcd+dxy=0$. Et hinc per Prob. I. exit $3\dot{x}x^2-2b\dot{x}x-cd\dot{x}+d\dot{x}y+dx\dot{y}=0$. Quæ, scripto I pro $\dot{x}$ et z pro $\dot{y}$, fit $3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$: unde rursus per Prob. I. exit $6\dot{x}x-2b\dot{x}+dy+d\dot{x}z+dx\dot{z}=0$. Et hæc, scripto iterum I pro $\dot{x}$, z pro $\dot{y}$, et o, pro $\dot{z}$, fit $6x-2b+2dz=0$. Jam extermina z, scribendo pro dz valorem $2b-3x$ in æquatione $3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$, et proveniet $-cd+dy=0$, sive $y=c$.

5. Quamobrem ad punctum A erige perpendiculum AE$=c$. Et per E duc ED parallelam AB, et punctum D, ubi Parabolæ partem convexo-concavam secuerit, erit in confinio flexionis contrariæ.



6. Similique methodo alia Rectitudinis puncta, quæ non interjacent partibus contrariè flexis, determinari possint. Veluti si $x^4-4ax^3+6a^2x^2-b^3y=0$ Curvam definiat, exinde per Prob. I. imprimis producetur $4x^3-12ax^2+12a^2x-b^3z=0$. Et hinc denuò $12x^2-24ax+12a^2-b^3\dot{z}=0$. Ubi suppone $\dot{z}=0$, et, factâ reductione, prodibit $x=a$. Quamobrem sume AB$=a$ et BD, normaliter erecta, curvæ in desiderato Rectitudinis puncto occurret.

III. Invenire punctum Flexûs Infiniti.

7. Quære radium curvaminis et suppone nullum esse. Sic ad Parabolam secundi generis, æquatione $x^3=ay^2$ definitam, erit radius ille CD $=\frac{4a+9x}{6a}\sqrt{4ax+9x^2}$; qui nullus evadit, cùm sit $x=0$.

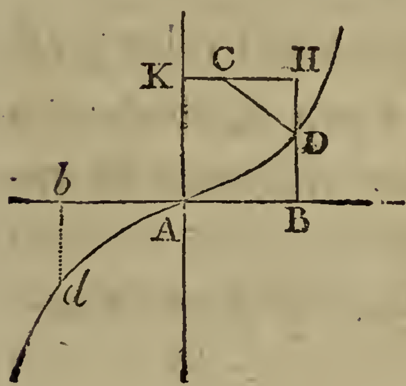
IV. Flexûs Maximi Minimive punctum determinare.

8. Ad hujusmodi puncta radius curvaturæ aut maximus aut minimus evadit. Quare centrum Curvaturæ, ad id temporis momentum, nec versus punctum contactûs neque ad contrarias partes movetur, sed penitus quiescit. Quæratur itaque fluxio radii

CD:

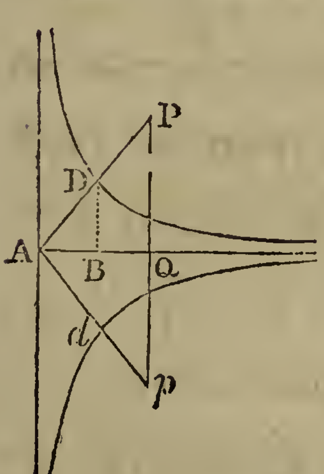
CD: vel expeditiùs quæratur fluxio alterutrius rectæ BH vel AK et fupponantur nulla. Problemata De Curvatura.

9. Quemadmodum fi de Parabolâ fecundi generis, $x^3=a^2y$, quæftio proponatur: imprimis ad Curvaturæ centrum determinandum invenies $DH=\frac{a^2+9xy}{6x}$, adeoque eft $BH=\frac{a^2+15xy}{6x}$. Dic autem $BH=v$, et erit $\frac{a^2}{6x}+\frac{5}{2}y=v$; unde juxta Prob. I. educitur $-\frac{a^2\dot{x}}{6x^2}+\frac{5}{2}\dot{y}=\dot{v}$. Jam verò $\dot{v}$, ipfius BH fluxionem, fuppone nullam effe: et infuper cùm



ex hypothefi fit $x^3=a^2y$, et inde per Prob. I. $3\dot{x}x^2=a^2\dot{y}$, pofito $\dot{x}=1$, fubftitue $\frac{3x^2}{a^2}$ pro $\dot{y}$, et emerget $45x^4=a^4$. Cape ergo $AB=\sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, et BD normaliter erecta occurret Curvæ in puncto Maximæ Curvaturæ. Vel quod perinde eft fac $AB:BD::3\sqrt{5}:1$.

10. Ad eundem modum Hyperbola fecundi generis, per æquationem $xy^2=a^3$ defignata, maximè flectitur in punctis D, *d*, quæ determinabis fumendo $AQ=1$ in bafi, et erigendo $QP=\sqrt{5}$, eique æqualem Qp ex alterâ parte, et agendo AP et A*p* quæ Curvæ occurrent in defideratis punctis D ac *d*.



V. Locum centri Curvaminis determinare, five Curvam defcribere in quâ centrum iftud perpetuò verfatur.

11. Trochoidis centrum Curvaminis in aliâ Trochoide verfari oftenfum eft.

12. Et fic Parabolæ centrum iftud in aliâ fecundi generis, quam æquatio $axx=y^3$ definit, Parabolâ verfatur, ut inito calculo facilè conftabit.

VI. Luce in quamlibet Curvam incidente, invenire Focum, five concurfum radiorum, circa quodpiam ejus punctum refractorum.

13. Curvaturam ad iftud Curvæ punctum quære, et centro radioque curvaturæ Circulum defcribe; dein quære concurfum radiorum à circulo circa iftud punctum refractorum. Nam idem erit concurfus refractorum à propofitâ Curvâ.

CAPUT VIII. VII. His addi poteſt particularis inventio Curvaturæ ad vertices Curvarum ubi normaliter ſecant baſes. Nempe punctum in quo curvæ perpendiculum cum baſi conveniens, ipſam ultimò ſecuerit, eſt centrum Curvaturæ ejus.

14. Quamobrem habitâ relatione inter baſin x et rectangulam applicatam y, et inde (per Prob. I.) relatione inter fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{y}$, valor $\dot{y}y$, ſi in eo ſcribas I pro $\dot{x}$, et fingas $y=0$, erit radius curvaturæ.

15. Sic in Ellipſi $ax-\frac{a}{b}xx=yy$, eſt $\frac{a\dot{x}}{2}-\frac{a\dot{x}x}{b}=\dot{y}y$; qui valor $\dot{y}y$, ſi ſupponas $y=0$, et conſequenter $x=0$, et ſcribas I pro $\dot{x}$, evadet $\frac{1}{2}a$ radius curvaturæ. Et ſic ad vertices Hyperbolæ et Parabolæ radius curvaturæ erit etiam dimidium lateris recti.

16. Atque ita ad Conchoiden, æquatione $\frac{b^2c^2}{xx}+\frac{2bcc}{x}+cc-2bx-bb-xx=yy$ definitam, valor $\dot{y}y$ ope Prob. I. invenietur $-\frac{b^2c^2}{x^3}-\frac{bc^2}{x^2}-b-x$. Qui, ſupponendo $y=0$, et inde $x=c$, vel $-c$, evadet $-\frac{bb}{c}-2b-c$, vel $\frac{bb}{c}-2b+c$, radius curvaturæ. Fac ergo AE : EG :: EG : EC (vid. fig. p. 432) et Ae : eG :: eG : ec, et habes curvaturæ centra, C et c, ad vertices conjugatarum Conchoidum, E et e.

PROB. VI.

Curvaturæ ad datum Curvæ alicujus punctum Qualitatem determinare.

17. Per *Qualitatem* curvaturæ intelligo formam ejus, quatenus eſt plus vel minùs inæquabilis; ſive quatenus plus vel minùs variatur in proceſſu per diverſas partes curvæ.

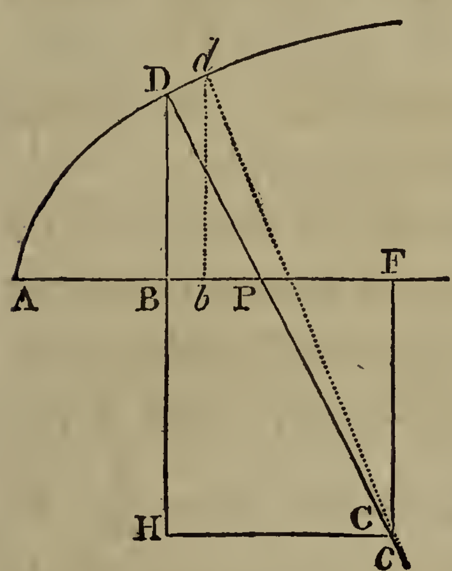
18. Sic interroganti qualis ſit Circuli curvatura, reſponderi poteſt, quòd ſit uniformis ſive invariata; et interroganti qualis ſit curvatura Spiralis, (dd) quæ deſcribitur per motum puncti D, cum acceleratâ celeritate, AD, in rectâ AK, uniformiter circa centrum A gyrante, progredientis ab A, adeo ut recta AD ad arcum BK, dato puncto, K, deſcriptum, rationem habeat numeri ad logarithmum ejus, reſponderi poteſt, quòd ſit uniformiter varia-

(dd) Vide fig. p. 440.

ta;

ta; ſive quòd ſit æquabiliter inæquabilis. Et ſic aliæ Curvæ, in ſingulis earum punctis, *aliquales* pro Curvaturæ variatione denominari poſſunt. De Qualitate Curvaturæ.

19. Quæritur itaque Curvaturæ, circa aliquod Curvæ punctum, inæquabilitas ſive variatio. Quâ de causâ animadvertendum eſt, I. Quòd ad puncta in ſimilibus curvis ſimiliter poſita ſimilis eſt inæquabilitas, ſive variatio curvaturæ. II. Et quòd momenta radiorum curvaturæ ad illa puncta ſunt proportionalia contemporaneis momentis curvarum, et fluxiones fluxionibus. III. Atque adeo quòd ubi fluxiones illæ non ſunt proportionales, diſſimilis erit inæquabilitas curvaturæ. Utpote major erit inæquabilitas, ubi major eſt ratio fluxionis radii curvaturæ ad fluxionem curvæ. Adeoque fluxionum ratio illa non immeritò dici poteſt *Index inæquabilitatis ſive variationis curvaturæ.*



20. Ad Curvæ alicujus, AD, puncta D ac d infinitè parùm diſtantia, ſunto radii curvaturæ DC, ac, dc; et exiſtente Dd momento curvæ erit Cc contemporaneum momentum radii curvaturæ, et $\frac{Cc}{Dd}$ Index inæquabilitatis curvaturæ: nempe tanta dicetur inæquabilitas illa, quantam eſſe indicat rationis illius $\frac{Cc}{Dd}$ quantitas; ſive curvatura dicetur tanto diſſimilior curvaturæ circuli.

21. Demiſſis jam ad quamlibet, AB, occurrentem DC in P, rectangulis applicatis DB ac db, dic AB$=x$; BD$=y$; DP$=t$; DC$=v$; et inde B$b=\dot{x}\times o$. Eritque C$c=\dot{v}\times o$. Et BD : DP$=$Bb : D$d=\frac{t\dot{x}o}{y}$, ac $\frac{Cc}{Dd}=\frac{\dot{v}y}{t\dot{x}}$, ſive $=\frac{\dot{v}y}{t}$ ſuppoſito $\dot{x}=1$. Quamobrem relatione inter x et y per quamlibet æquationem definitâ, et inde, juxta Prob. IV. et V. invento perpendiculo DP ſive t, et radio curvaturæ v, ejuſque radii fluxione $\dot{v}$ per Prob. I. dabitur Index inæquabilitatis curvaturæ $\frac{\dot{v}y}{t}$.

22. Exempl. I. Sit $2ax=yy$ æquatio ad Parabolam. Et per Prob. IV. erit BP$=a$, adeoque DP $=\sqrt{aa+yy}=t$. Item per Prob. V. (ee) HC$=a+2x$. Et PB : DP $=$ HC : DC $=\frac{at+2tx}{a}=v$. Jam æ-

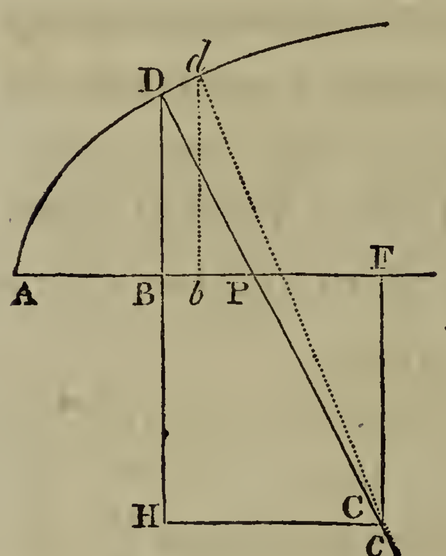
(ee) Cap. VII. § 12.

 quationes

CAPUT VIII. quationes $2ax=yy$, et $aa+yy=tt$, et $\frac{at+2tx}{a}=v$, per Prob. I. dant $2a\dot{x}=2\dot{y}y=2\dot{t}t$: et $\frac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t\dot{x}}{a}=\dot{v}$. Quibus ordinatis, et poſito $\dot{x}=1$, orientur $\dot{y}=\frac{a}{y}$; $\dot{t}=\frac{y\dot{y}}{t}=\frac{a}{t}$. Et $\dot{v}=\frac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t}{a}$. Et ſic inventis $\dot{y}$, $\dot{t}$, et $\dot{v}$, habebitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ Index inæquabilitatis curvaturæ.

23. Quemadmodum ſi in numeris definiatur $a=1$, ſive $2x=yy$, et $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\sqrt{2x}=1$; $\dot{y}=\frac{a}{y}=1$; $t=\sqrt{aa+yy}=\sqrt{2}$; $\dot{t}=\frac{a}{t}\sqrt{\frac{1}{2}}$; et $\dot{v}=\frac{a\dot{t}+2x\dot{t}+2t}{a}=3\sqrt{2}$ (ff). Adeoque $\frac{\dot{v}y}{t}=3$ indici inæquabilitis.

24. Sin autem definiatur $x=2$, erit $y=2$; $\dot{y}=\frac{1}{2}$; $t=\sqrt{5}$; $\dot{t}=\sqrt{\frac{1}{5}}$; et $\dot{v}=3\sqrt{5}$. Adeoque $\frac{\dot{v}y}{t}=6$ Index inæquabilitatis. Quamobrem inæquabilitas curvaturæ, ad punctum à quo ad axem demiſſa ordinatim applicata æquatur lateri recto Parabolæ, dupla eſt ejus ad punctum, à quo demiſſa ordinatim applicata æquatur dimidio ejuſdem lateris recti: hoc eſt, curvatura in priori caſu duplo diſſimilior eſt curvaturæ Circuli, quàm in poſteriori.



25. EXEMPL. 2. Sit $2ax-bxx=yy$, et, per Prob. IV. erit $a-bx=$ BP, et inde $aa-2abx+bbxx+yy=tt$: ſive $aa-byy+yy=tt$. Item, per Prob. V. erit DH$=y+\frac{y^3-by^3}{aa}$ (gg). Ubi ſi pro $yy-byy$ ſubſtituas $tt-aa$, evadet DH $=\frac{tty}{aa}$. Et eſt BD : DP $=$ DH : DC $=\frac{t^3}{aa}=v$. Jam, per Prob. I. æquationes $2ax-bxx=yy$; et $aa-byy+yy=tt$; et $\frac{t^3}{aa}=v$; dant $a-bx=y\dot{y}$ (hh); et $y\dot{y}-by\dot{y}=t\dot{t}$; et $\frac{3t^2\dot{t}}{aa}=\dot{v}$. Et ſic invento $\dot{v}$ dabitur $\frac{\dot{v}y}{t}$ Index inæquabilitatis curvaturæ.

26. Sic ad Ellipſin $2x-3xx=yy$, ubi eſt $a=1$, et $b=3$, ſi ſupponatur $x=\frac{1}{2}$, erit $y=\frac{1}{2}$; $\dot{y}=-1$; $t=\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\dot{t}=\sqrt{2}$; $\dot{v}=3\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3}{2}$ Indici inæquabilitatis curvaturæ. Unde patet curvaturam hujus Ellipſis, ad hîc definitum punctum D, eſſe duplo minùs inæ-

(ff) Nimirum $\frac{a\dot{t}+2x\dot{t}+2t}{a}=\dot{t}+\dot{t}+2t=2\times\overline{\dot{t}+t}=2\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}=2\frac{\sqrt{1}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}}=2\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\times 3$.

quabilem

quabilem (five duplo fimiliorem curvaturæ Circuli) quàm curvatura Parabolæ, ad illud ejus punctum, à quo ad axem demiffa ordinatim applicata æquatur dimidio ejus lateris recti. De Qualitate Curvaturæ.

27. Si conclufiones in his exemplis concinnare patet, ad Parabolam $2ax=yy$, exibit $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y}{a}$ Index inæquabilitatis. Et ad Ellipfin, $2ax-bxx=yy$, exibit Index $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y-3by}{aa}\times$ BP. Et fic ad Hyperbolam $2ax+bxx=yy$, obfervatâ analogiâ, erit index $\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3y+3by}{aa}\times$ BP. Unde patet, quòd ad diverfa puncta cujufvis conicæ fectionis, feorfim fpectatæ, curvaminis inæquabilitas eft ut rectangulum BD × BP. Et quòd ad diverfa puncta Parabolæ eft ut ordinatim applicata BD.

28. Cæterùm cùm Parabola fit fimpliciffima linearum inæquabili curvaturâ flexarum, ejufque curvaturæ inæquabilitas tam levi negotio determinatur, utpote cujus index fit $\frac{6\times \text{ordin. applicat.}}{\text{lat. rect.}}$; aliarum Curvarum curvaturæ ad curvaturam hujus non incommodè referri poffunt. Quemadmodum fi quæratur qualis fit Ellipfeos $2x-3xx=yy$ curvatura, ad illud ejus punctum, quod definitur affumendo $x=\frac{1}{2}$: quoniam index ejus (ut fuprà) fit $\frac{3}{2}$, refponderi poteft, effe fimilem curvaturæ Parabolæ $6x=yy$, ad illud ejus punctum, inter quod et axem recta $=\frac{3}{2}$ ordinatim applicatur.

29. Sic cùm lineæ Spiralis ADE jam ante defcriptæ (ii) fluxio fit ad fluxionem fubtenfæ AD in datâ quâdam ratione, puta d ad e: verfus partes concavas ejus erige ad AD normalem AP $=\frac{e}{\sqrt{dd-ee}}\times$ AD, et erit P centrum curvaturæ, et $\frac{\text{AP}}{\text{AD}}$, five $\frac{\sqrt{dd-ee}}{e}$, Index inæquabilitatis ejus. Quare Spiralis hæcce curvaturam habet ubique fimiliter inæquabilem, ac Parabola $6x=yy$ habet in illo ejus puncto, à quo demittitur ad axem ordinatim applicata $=\frac{\sqrt{dd-ee}}{e}$.

30. Et fic Index inæquabilitatis ad quodvis Trochoidis punctum D (kk) invenietur effe $\frac{\text{AB}}{\text{BL}}$. Quare curvatura ejus ad idem D tam inæquabilis eft, five tam diffimilis curvaturæ Circuli, quàm

(gg) Cap. VII. § 12.
(hh) Nimirum pofito $x=1$.
(ii) Vide fig. p. 440.
(kk) Vide fig. p. 449.

curvatura

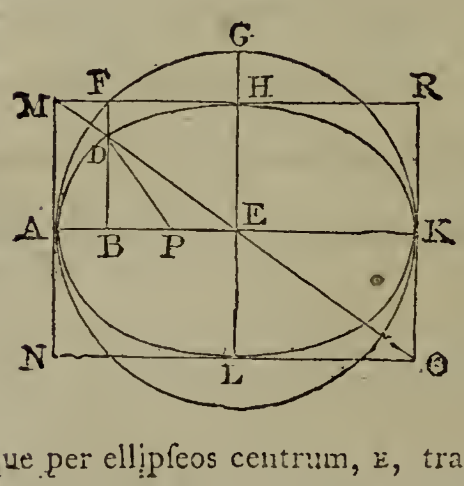
CAPUT VIII. curvatura Parabolæ cujufvis $ax=yy$, ad illud ejus punctum ubi ordinatim applicata æquatur $\frac{1}{6}a \times \frac{AB}{BL}$.

31. Ex his credo fenfus Problematis fatis elucefcet; quo benè perfpecto, non difficile erit animadvertenti feriem rerum fuprà traditarum plura exempla de proprio fuppeditare, et hujufmodi complures alias operandi methodos, prout res exiget, concinnare. Quinetiam cognata Problemata ubi, perplexâ computatione non conteritur et fatigatur, haud majori difficultate tranfiget: Cujufmodi funt,

I. Invenire punctum Curvæ alicujus, ubi vel Nullam, vel Infinitam, vel Maximam, vel Minimam, vel datam quamvis habeat Inæquabilitatem curvaturæ. Sic ad vertices conicarum fectionum nulla eft inæquabilitas curvaturæ; ad cufpidem Trochoidis infinita eft; et ad puncta Ellipfeos maxima eft, ubi rectangulum BD × BP fit maximum; hoc eft, ubi lineæ diagonales rectanguli parallelogrammi circumfcripti Ellipfin fecant, cujus latera tangunt illam in principalibus verticibus ([ll]).

II. Curvam alicujus definitæ fpeciei, puta conicam fectionem, determinare, cujus Curvatura, ad aliquod punctum, et æqualis fit et fimilis curvaturæ alterius alicujus Curvæ ad datum punctum ejus.

III. Conicam fectionem determinare, ad cujus punctum aliquod Curvatura et lineæ tangentis, refpectu axis, pofitio fit fimilis Curvaturæ ac Tangentis pofitioni alterius alicujus Curvæ, ad affignatum punctum ejus. Et hujus Problematis ufus eft, ut vice Ellipfium fecundi generis, quarum refringendi proprietates Cartefius



([ll]) ELLIPSIS ADL, cujus axes, tranfverfus quidem AK, fecundùs HL, rectangulo MNOR circumfcribatur, cujus utique latera cum axibus ellipfeos erunt parallela. Sit D punctum Ellipfeos, à quo fi deducatur DB in axem AK ordinatim, aliaque DP ad perpendiculum cum rectâ quæ curvam in D contingat, rectangulum DB × BP maximum fit. Dico punctum D effe ad alteram è diagoniis parallelogrammi MO. Sit enim E centrum ellipfeos. Centro E radio EA fcribatur circulus, cui axis ellipfeos EH in G occurrat, rectaque BD in F. Sit M angulus ille parallelogrammi circumfcripti, quem quadrans ellipfeos, AH, in quo pofitum eft punctum D, convexus fpectat. Jungaturque EM. Quoniam diagoniæ parallelogrammi MNOR utraque per ellipfeos centrum, E, tranfeunt, erit utique EM altera è diagoniis illis. Dico punctum D effe

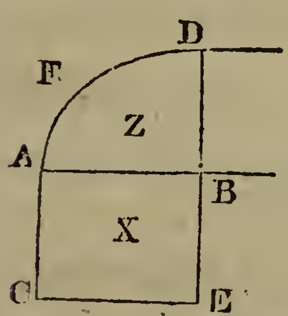
Cartesius in Geometriâ demonstravit, conicæ sectiones, idem in refractionibus quàm proximè præstantes, subrogari possint. Atque idem de aliis Curvis intellige. De Qualitate Curvaturæ.

CAPUT IX.

PROB. VII.

1. *Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Areæ per finitas Æquationes designari possunt.*

SIT AB basis Curvæ, ad cujus initium A erigatur normalis AC = 1, et agatur CE parallela AB, sit etiam BD rectangula applicata concurrens rectæ CE in E, et Curvæ AD in D. Et concipe has areas ACEB et ADB à rectis BE et BD, per AB delatis, generari. Et earum incrementa, sive fluxiones, perpetim erunt ut lineæ describentes BE et BD (mm). Quare parallelogrammum ACEB sive AB × 1, dic x, et Curvæ aream, ADC dic z: et fluxiones $\dot{x}$ et $\dot{z}$ erunt ut BE et BD, adeoque posito $\dot{x} = 1 = $ BE, erit $\dot{z} = $ BD.



Si jam ad arbitrium assumatur æquatio quævis, pro definiendâ relatione z ad x, exinde per Prob. 1. elicietur $\dot{z}$. Atque ita duæ habebuntur æquationes, quarum posterior Curvam definiet, et prior Aream ejus.

3. EXEMPL. Assumatur $xx = z$ et inde per Prob. 1. elicietur $2\dot{x}x = \dot{z}$, sive $2x = \dot{z}$ siquidem est $\dot{x} = 1$.

Assumatur $\frac{x^3}{a} = z$, et inde prodibit $\frac{3x^2}{a} = \dot{z}$, æquatio ad Parabolam.

esse ad rectam EM. Namque rectæ BP ad BE ratio data est. (Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXIV.) Quare rectanguli BD × BP ad rectangulum BD × BE ratio data. Et propter rationem rectæ BD ad BF datam, rectanguli EB × BD ad rectangulum EB × BF ratio data. Rectangula igitur DB × BP, FB × BE, quorum utrumque ad tertium DB × BE rationem datam habet, hæc datam inter se rationem gerent. (Euclid. dat. 8.) Maximo igitur existente illo DB × BP, alterum FB × BE maximum etiam erit. Maximo autem existente rectangulo FB × BE, erunt EB, BF inter se æquales. Id enim vulgo notum est. Sed æqualium EB, BF ad tertiam BD eadem erit ratio. (El. V. 7.) Et è naturis ellipseos circulique, quibus axis AK est communis, erit FB ad BD, ut EG vel EA ad EH vel AM. Erit igitur EB ad BD ut EA ad AM. (El. V. 11.) Punctum igitur D erit ad rectam EM. (Elem. VI. 32.) Q. E. D.

(mm) Hoc est incrementorum simul nascentium inter ipsa prima ratio, rectarum BE, BD ratio erit. Quæ proinde, *perpetim*, id est, in omni rectæ BD situ, fluxionum inter ipsas ratio erit.

Assumatur

CAPUT IX. Aſſumatur $ax^3=z^2$, ſive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=z$; et emerget $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\dot{z}$, ſive $\frac{9}{4}ax=\dot{z}\dot{z}$, æquatio iterum ad Parabolam.

Aſſumatur præterea $a^3x=z^2$, ſive $a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=z$; et elicietur $\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}=\dot{z}$, ſive $a^3=4x\dot{z}\dot{z}$.

Item aſſumatur $\frac{a^3}{x}=z$, ſive $a^3x^{-1}=z$, et elicietur $-a^3x^{-2}=\dot{z}$ ſive $a^3+\dot{z}xx=0$: ubi negativus valor ipſius $\dot{z}$ tantùm denotat BD capiendam eſſe ad partes contra BE (nn).

Ad hæc ſi aſſumas $c^2a^2+c^2x^2=z^2$ elicies $2c^2x=2\dot{z}z$; et exterminato z, proveniet $\frac{cx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\dot{z}$.

Vel ſi aſſumas $\frac{a^2+x^2}{b}\sqrt{a^2+x^2}=z$, dic $\sqrt{a^2+x^2}=v$; et erit $\frac{v^3}{b}=z$, et inde (per Prob. I.) $\frac{3\dot{v}v^2}{b}=\dot{z}$. Item æquatio $a^2+x^2=v^2$ per Prob. I. dat $2x=2v\dot{v}$, cujus ope ſi extermines $\dot{v}$, fiet $\frac{3vx}{b}=\dot{z}=\frac{3x}{b}\sqrt{a^2+x^2}$.

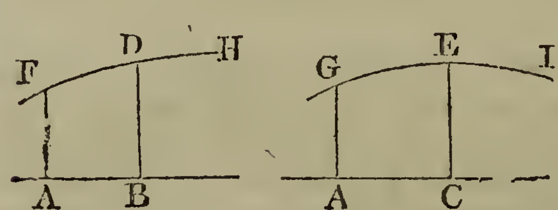
Si denique aſſumas $8-3xz+\frac{2}{5}z=z^2$, elicies $-3z-3x\dot{z}+\frac{2}{5}\dot{z}=2\dot{z}z$. Quare per aſſumptam æquationem imprimis quære Aream z; ac deinde Applicatam $\dot{z}$, per elicitam.

Atque ex Areis, qualeſcunque effingas, ſemper poſſis Applicatas determinare.

PROB. VIII.

3. *Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Areæ ad Aream datæ alicujus Curvæ relationem habent per finitas æquationes deſignabilem.*

Sit FDH data Curva, ac GEI quæſita, et earum Applicatas, DB et EC, concipe ſuper baſibus, AB et AC, erectas incedere.



Et Arearum, quas ita tranſigunt, incrementa (oo), ſive fluxiones, erunt ut Applicatæ illæ ductæ in earum velocitates incedendi; hoc eſt, in fluxiones baſium. Sit ergo AB$=x$, BD$=v$, AC$=z$, ac CE$=y$. Area AFDB$=s$, et area AGEC$=t$; eritque $\dot{x}v:\dot{z}y::\dot{s}:\dot{t}$. Quare ſi ſupponatur $\dot{x}=1$ et $v=\dot{s}$, ut ſuprà, erit $\dot{z}y=\dot{t}$, et inde $\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=y$.

(nn) Immo, eam potius ſignificat Curvæ ſpeciem, cujus area, z, contigua eſt baſi, AB, ultra ordinatam productæ.

(oo) Naſcentia utique.

Assumantur itaque duæ quævis æquationes, quarum una definiat relationem Arearum s ac t, et altera relationem Basium x et z, et inde (per Prob. I.) quærantur fluxiones $\dot{t}$ et $\dot{z}$, et substituatur $\frac{\dot{t}}{\dot{z}}=y$. De Curvarum Comparatione.

4. Exempl. I. Data Curva AFD sit Circulus, æquatione $ax-x^2=vv$, designatus; et quærantur aliæ Curvæ, quarum areæ adæquant aream ejus. Ex hypothesi ergo est $s=t$, et inde $\dot{s}=\dot{t}=v$. Et $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{v}{\dot{z}}$. Superest ut $\dot{z}$ determinetur, assumendo relationem aliquam inter bases x et z.

Veluti si fingas $ax=zz$, erit per Prob. I. $a=2\dot{z}z$: quare substitue $\frac{a}{2z}$ pro $\dot{z}$, et fiet $y=(\frac{v}{\dot{z}})=\frac{2vz}{a}$. Est autem $v=(\sqrt{ax-xx}=)$ $\frac{z}{a}\sqrt{aa-zz}$, adeoque $\frac{2zz}{aa}\sqrt{aa-zz}=y$, æquatio ad Curvam cujus area æquatur areæ Circuli.

Ad eundem modum si fingas $x^2=z$, proveniet $2x=\dot{z}$, et inde $y=(\frac{v}{\dot{z}})=\frac{v}{2x}$; et exterminato v et x, fiet $y=\frac{\sqrt{az^{\frac{1}{2}}-z}}{2z^{\frac{1}{2}}}$.

Vel si fingas $cc=xz$, proveniet $0=z+x\dot{z}$, et inde $-\frac{vx}{z}=y=-\frac{c^3}{z^3}\sqrt{az-cc}$.

Atque ita si fingas $ax+\frac{s}{1}=z$, ope Prob. I. obtinebitur $a+\dot{s}=\dot{z}$ et inde $\frac{v}{a+\dot{s}}=y=\frac{v}{a+v}$, quæ Curvam Mechanicam designat.

5. Exempl. 2. Detur iterum Circulus $ax-x^2=vv$, et quærantur Curvæ, quarum areæ ad aream ejus habeant aliam quamlibet assumptam relationem. Veluti si assumas $cx+s=t$, et præterea fingas $ax=zz$, mediante Prob. I. elicies $c+\dot{s}=\dot{t}$, et $a=2\dot{z}z$. Quare est $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{2cz+2\dot{s}z}{a}$; et substituto $\sqrt{ax-xx}$ pro $\dot{s}$, et $\frac{z^2}{a}$ pro x, fit $y=\frac{2cz}{a}+\frac{2z^2}{a^2}\times\sqrt{a^2-z^2}$.

Quòd si assumas $s-\frac{2v^3}{3a}=t$ et $x=z$, invenies ope Prob. I. $\dot{s}-\frac{2\dot{v}v^2}{a}=\dot{t}$, et $1=\dot{z}$. Adeoque $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\dot{s}-\frac{2\dot{v}v^2}{a}$, sive $=v-\frac{2\dot{v}v^2}{a}$. Jam verò pro exterminando $\dot{v}$, æquatio $ax-x^2=vv$, per Prob. I. dat $a-2x=2\dot{v}v$; et proinde est $y=\frac{2vx}{a}$, ubi si supprimas v et x, substituendo valores $\sqrt{ax-x^2}$, et z, emerget $y=\frac{2z}{a}\sqrt{az-zz}$.

CAPUT IX.

Sin affumas $ss=t$, et $x=z^2$, emerget $2\dot{s}=\dot{t}$ et $1=2\dot{z}z$, atque adeo $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=4\dot{s}sz$; et pro $\dot{s}$ et x fubftitutis $\sqrt{ax-x^2}$ et zz, fiat $y=4sz^2\sqrt{a-zz}$, æquatio ad Curvam Mechanicam.

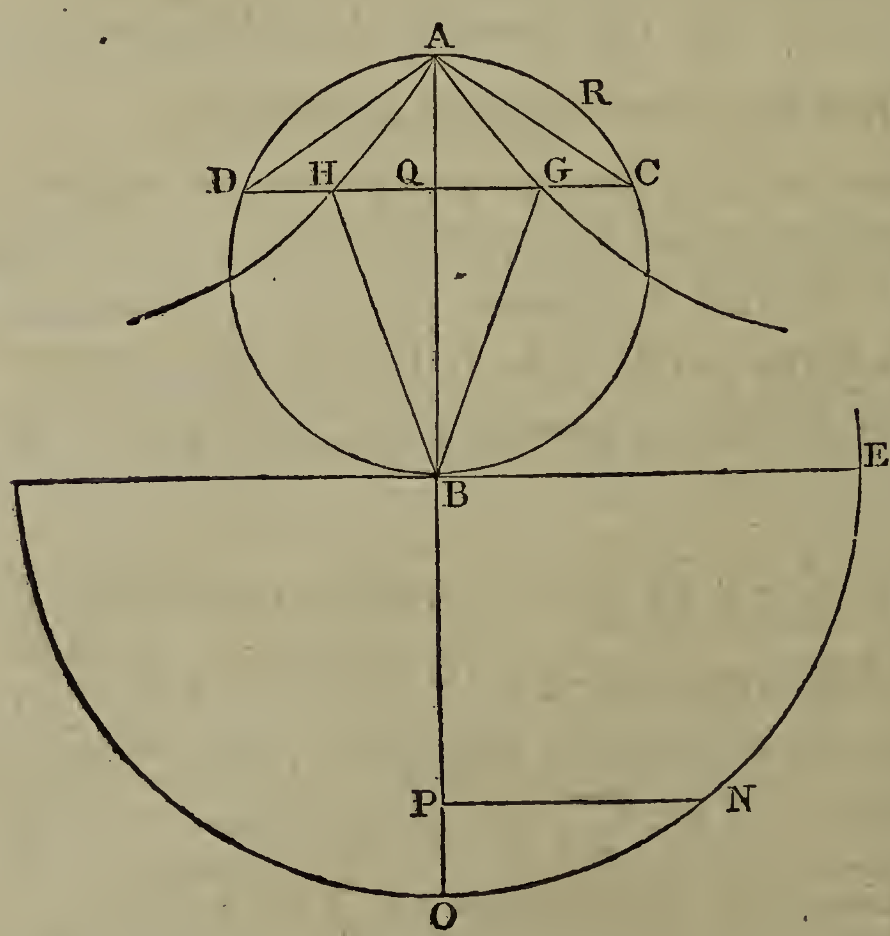
6. EXEMPL. 3. Ad eundem modum figuræ, affumptam relationem ad aliam quamvis datam figuram habentes, inveniuntur. Sic datâ Hyperbolâ $cc+xx=vv$, fi affumas $s=t$, et $xx=cz$, elicies per Prob. I. $\dot{s}=\dot{t}$, et $2x=c\dot{z}$, et inde $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{c\dot{s}}{2x}$, et fubftitutis $\sqrt{cc+x^2}$ pro $\dot{s}$, et $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x proveniet $y=\frac{c}{2z}\sqrt{cz+zz}$.

Atque ita fi affumas $xv-s=t$, et $xx=cz$, elicies $v+\dot{v}x-\dot{s}=\dot{t}$, et $2x=c\dot{z}$. Eft autem $v=\dot{s}$, et inde $\dot{v}x=\dot{t}$; quare $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{c\dot{v}}{2}$. Jam verò $cc+xx=vv$, ope Prob. I. dat $x=\dot{v}v$. Adeoque eft $y=\frac{cx}{2v}$, et fubftitutis $\sqrt{cc+xx}$ pro v, et $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ pro x, fit $y=\frac{cz}{2\sqrt{cz+zz}}$.

7. Ex-

COMPARATIO

(pp) Nempe pofito $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}=h$, fiet $\frac{ax^3-x^4}{9}=hh$. Et ex hâc æquatione, ope Prob. I. elicietur fluxionum æquatio, $\frac{3ax^2-4x^3}{9}\dot{x}=2h\dot{h}$. Hoc eft, pofito $\dot{x}=1$, $\frac{3ax^2-4x^3}{9}=2h\dot{h}$.



(qq) EA eft hujufmodi. Sit Circulus ACBD ad quem pertineat Ciffoides GAH, cujus axis fit AB circuli diameter, Afymptota recta BE, quæ circulum ACBD in puncto B contingit. A puncto quovis Q, in axe Ciffoidis, AB, pro arbitrio fumendo, eductam puta ad perpendiculum rectam DC; quæ Circulo in punctis, D, C, Ciffoidi, in illis, H, G, occurrat. Jungantur BH, BG. Centro BA, radio BE, quæ rectæ AB fit æqualis, fcribatur circuli quadrans ENO. Jungatur BC. Acceptâque BP æquali rectæ BC, à puncto P ad perpendiculum educatur PN, quæ arcui quadrantis in N occurrat. Sector ciffoidis AHBG fpatii circularis OPN triplus erit.

Nam fi AB dicatur a, AQ, x; erit QC vel QD recta, quæ fymbolo $\sqrt{ax-xx}$ defignata eft (propter circulum). Et QG vel QH erit recta quæ fymbolo $\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$ defignatur

7. EXEMPL. 4. Adhæc ſi detur Ciſſoides, $\frac{xx}{\sqrt{ax-x^2}}=v$, ad quam relatæ aliæ figuræ ſunt inveniendæ, et eâ de causâ, aſſumatur $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s=t$; finge $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}=b$, et erit $b+\frac{2}{3}s=t$, et inde per Prob. I. $\dot{b}+\frac{2}{3}\dot{s}=\dot{t}$. Æquatio autem $\frac{ax^3-x^4}{9}=bb$, per Prob. I. dat $\frac{3ax^2-4x^3}{9}=2\dot{b}b$ (PP); ubi ſi extermines b, fiet $\dot{b}=\frac{3ax-4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$. Quare cùm præterea ſit $\frac{2}{3}\dot{s}=(\frac{2}{3}v)=\frac{4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax-xx}}=\dot{t}$. Porro ad determinandum z et $\dot{z}$, aſſumatur $\sqrt{aa-ax}=z$, et ope Prob. I. emerget $-a\dot{x}=2\dot{z}z$, ſive $\dot{z}=\frac{-a\dot{x}}{2z}$; quare eſt $y=(\frac{\dot{t}}{\dot{z}})=\frac{-zx}{\sqrt{ax-x^2}}=\sqrt{\frac{zzx}{a-x}}=\sqrt{ax})=\sqrt{aa-zz}$. Quæ æquatio cùm ſit ad Circulum, habebitur ratio arearum Circuli et Ciſſoidis (qq).

DE CURVARUM COMPARATIONE.

Atque ita ſi aſſumpſiſſes $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{1}{3}s=t$, & $x=z$, prodiiſſet $y=\sqrt{az-zz}$. Æquatio denuò ad Circulum.

8. Haud ſecus ſi detur Curva aliqua Mechanica, poſſunt aliæ ad eam relatæ Curvæ Mechanicæ inveniri; ſed ad eliciendum Geometricas convenit, ut è rectis, ab invicem geometricè dependentibus, aliqua pro baſi adhibeatur; et ut Area ad parallelogram-

natur (propter ciſſoidem). Erit igitur rectangulum AQ × QC, ſive illi æquale triangulum DAC, ſpatium ſymbolo $x\sqrt{ax-xx}$ ſignificatum; et ſpatium Ciſſoidis, AHG, illud erit quod ſymbolum $2s$ ſignificat. Præterea, propter circulum ACB, recta BC, vel illi æqualis BP, ea erit quam litera z deſignat. Erit igitur PN $=y$, & ſpatium OPN $=t$. Poſito enim $\dot{x}=0$, hoc eſt puncto Q in A tranſlato, ut ſpatium $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s$ in nihilum abeat, recta BC, vel BP, ipſi BA, vel BO æqualis evaſerit, et area OPN in nihilum abierit. Unde areæ illæ, $\frac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}s$, et OPN, cùm ſimul à nihilo generari incipiant, et æqualibus fluxionibus uſque creſcant, erunt ſemper inter ſe æquales. Quare OPN $=t$.

CISSOIDIS CIRCULIQUE.

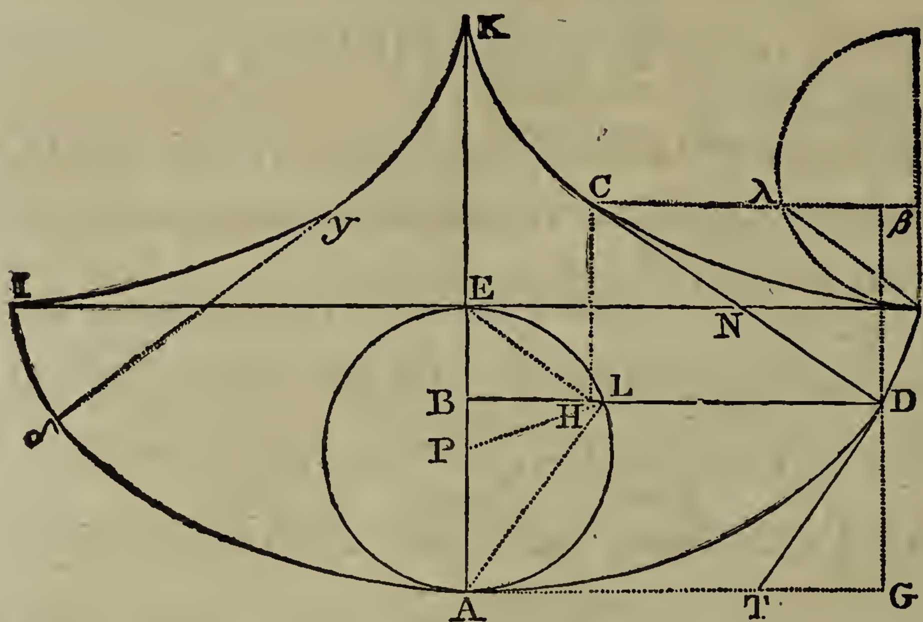
Jam propter æquationem à Newtono poſitam, $\frac{x}{3}\sqrt{ax-xx}+\frac{2}{3}s=t$, erit $x\sqrt{ax-xx}+2s=3t$. Hoc eſt triangulum DAC, ſpatio HAG auctum triplum erit ſpatii OPN. Sed propter Ciſſoidem, BQ : QA = CQ : QG = DC : HG. Triangula igitur DAC, BHG inter ſe ſunt æqualia. Triangulum igitur DAC, ſpatio HAG auctum, æquale erit triangulo BHG acceſſione ejuſdem ſpatii HAG aucto; hoc eſt, ſectori Ciſſoidis BHAG. Quare ſector ciſſoidis BHAG areæ circularis OPN triplus erit. Et hæc eſt relatio ciſſoidis circulique, quam calculi auctoris indicant. Quæ quidem longè elegantiùs rationibus geometricis oſtendi poſſet.

2. Poſito autem $\frac{2x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\frac{1}{3}s=t$, & $x=z$; efficietur $y=\sqrt{az-zz}$. Sive eam eſſe Ciſſoidis Circulique relationem, ut ſpatium ciſſoidis, ABG, ſegmenti ARC triplum ſit.

Atque hinc efficitur ſpatium illud omne, quod aſymptotæ BE, et brachiis ciſſoidis, AG, AH, infinitè protenſis adjacet, circuli ACBD, ad quem ciſſoides pertinet, triplum eſſe.

 mum

Caput IX. mum complementalis quæratur, ſupponendo fluxionem ejus valere baſin ductam in fluxionem ordinatim applicatæ.



9. Exempl. 5. Sic Trochoide ADF propoſitâ, refero ad baſin AB; et completo parallelogrammo, ABDG, quæro complementalem ſuperficiem ADG, concipiendo deſcriptam eſſe per motum rectæ GD; et proinde fluxionem ejus valere illam GD in celeritatem progrediendi ductam, hoc eſt, $x \times \dot{v}$. Jam cùm AL ſit parallela tangenti DT, erit AB ad BL ut fluxio ejuſdem AB ad fluxionem applicatæ BD, hoc eſt ut 1 ad $\dot{v}$ (rr). Quare eſt $\dot{v} = \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{AB}}$, adeoque $x\dot{v} = \mathrm{BL}$. Et proinde area ADG deſcribitur fluxione BL: atque adeo cùm area circularis ABL eâdem fluxione deſcribatur æquales erunt.

Pari ratione ſi concipias ADF eſſe figuram arcuum ſive ſinuum verſorum, hoc eſt, cujus applicata BD æquatur arcui AL: cùm fluxio arcûs AL ſit ad fluxionem baſis AB, ut PL ad BL, hoc eſt $\dot{v} : 1 :: \frac{1}{2} a : \sqrt{ax-x^2}$ erit $\dot{v} = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Adeoque $\dot{v}x$, fluxio areæ ADG, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Quare ſi ad ipſius AB punctum B recta

(rr) Nimirum DG : GT = $\overline{\dot{\mathrm{DG}}}$: $\overline{\dot{\mathrm{GA}}}$ = $\dot{x} : \dot{v}$ (Introduct. ad Quad. Curv. § 4.) Sed DG:GT = AB:BL (propter triangula ABL, DGT inter ſe ſimilia et æqualia). Quare $\dot{x} : \dot{v}$ = AB : BL. Quare BL $\times \dot{x}$ = AB $\times \dot{v}$ = DG $\times \dot{v}$. Areæ igitur ADG, ABL, cùm ſimul à nihilo generari inceperint, inter ſe æquales erunt. (De Quadrat. Curv. Prop. IX.)

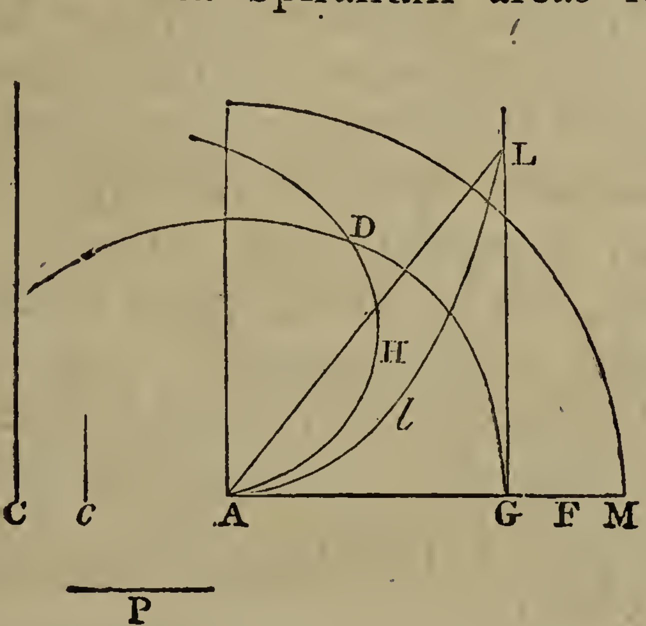
(ſſ) Hæc et alia hujuſmodi apertiora, credo, fuiſſent, ſi auctor notam $\dot{x}$ retinuiſſet. Illa enim unitatis ſuppoſitio, licet formulis Algebraicis aliquam inducat ſimplicitatis ſpeciem, perſpicuitati tamen ſignificationis Geometricæ adeo nihil confert, ut, me judice, vel potiùs officiat. Neque profecto nihil eſt, quod magnus ille olim Vieta præcipiebat; in formulis Algebraicis condendis, quoties illud ageretur, ut ex illis Geometricæ conſtructiones inferrentur, "*omnino ſervari oportere homogeneorum legem. Cui non attendiſſe cauſam fuiſſe* dicit *multæ caliginis & cæcutiei veterum analyſtarum.*" (Iſagog. Cap. III. De Lege Homogeneorum, & Cap. V. De Legibus Zeteticês.)

Nimirum

recta æqualis $\frac{a\dot{x}}{2\sqrt{ax-x^2}}$, in angulo recto, applicari concipiatur, illa ad Curvam quandam Geometricam terminabitur, cujus area, basi AB adjacens, æquatur areæ ADG (ff). De Curvarum Comparatione.

10. Et sic aliis figuris, per arcuum Circuli, Hyperbolæ vel cujusvis Curvæ ad arcuum istorum sinus rectos vel versos aut alias quasvis geometricè determinabiles rectas lineas, in datis angulis applicationem, constitutis, æquales Geometricæ Figuræ inveniri possunt.

11. Circa Spiralium areas levissimum est negotium. Utpote centro convolutionis A, radio quovis AG descripto arcu DG occurrente AF in G, et spirali in D: cùm arcus ille, ad instar lineæ super basi AG incedentis, describit Spiralis aream AHDG, ita ut ejus areæ fluxio sit ad fluxionem rectanguli $1 \times AG$ ut arc. GD ad 1: si rectam GL, arcui isti æqualem, erigas, illa, similiter incedendo super eâdem AG, describet aream ALG æqualem areæ spiralis AHDG; Curvâ AlL existente Geometricâ. Et præterea, si subtensa AL ducatur, triangulum ALG ($=\frac{1}{2}AG \times GL = \frac{1}{2}AG \times GD$) = sectori AGD (tt); adeoque complementalia segmenta ALl, et ADH erunt etiam æqualia. Et hæc non tantùm Spirali Archimedeæ, ubi AlL evadit Parabola Apolloniana, (uu) sed et aliis quibuscunque conveniunt;



Nimirum cum sit $\dot{v} : \dot{x} = \frac{1}{2}a : \sqrt{ax-x^2}$, erit $\dot{v} = \frac{a\dot{x}}{2\sqrt{ax-x^2}}$. Ergo $\dot{v}x$, sive fluxio areæ ADG, æqualis erit huic $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}\dot{x}$. Vel si pro $\frac{ax}{2\sqrt{ax-x^2}}$, hoc est, si pro rectâ quæ nascitur applicando rectangulum ax ad duplam rectam quæ duarum, x, $a-x$, proportione media est, si pro rectâ, inquam, quæ nascitur ex hâc applicatione, scribatur z, erunt rectangula $\dot{v}x$, $z\dot{x}$ inter se æqualia. Si igitur in rectâ quâdam à rectæ AB puncto B, ad perpendiculum eductâ, capiatur longitudo illi z æqualis, terminabitur illa in Curvâ quâdam Geometricâ, cujus area, basi AB apposita, areæ ADG æqualis erit. (Geometr. Flux. Prop. 11.) Nempe cùm areæ illæ simul à nihilo generari inceperint, & æquales semper fluxiones habeant.

(tt) Duci intelligatur recta AD quæ sculptoris incuriâ omissa est.

(uu) Sit AM longitudo illa, quam recta AD, polo A mobilis, perpetim crescendo adepta sit, quando

 niunt; adeo ut omnes eodem negotio in æquales Geometricas converti poſſint.

12. Poſſem plura hujus conſtruendi Problematis ſpecimina afferre; ſed hæc ſufficiant, cùm ſint adeò generalia, ut quicquid hactenus circa Curvarum Areas inventum fuerit, vel, ni fallor, inveniri poſſit, aliquo ſaltem modo complectantur; et ut plurimùm leviori curâ ſine ſolitis ambagibus determinant.

13. Præcipuus autem hujus et præcedentis Problematis uſus eſt, ut aſſumptis conicis ſectionibus, vel quibuſlibet notæ magnitudinis Curvis; aliæ Curvæ, quæ cum his conferri poſſunt, inveſtigentur; et earum definientes æquationes in catalogum ordinatim diſponantur. Et conſtructo ejuſmodi catalogo, cùm Curvæ alicujus Area quæritur, ſi æquatio ejus definiens vel immediatè in catalogo reperiatur, vel in aliam, quam catalogus complectitur, transformari poteſt; exinde cognoſces aream ejus. Quinetiam catalogus ille determinandis Curvarum Longitudinibus, Centris Gravitatum, Solidis per convolutionem generatis, ſolidorum Superficiebus, et cuilibet fluenti quantitati, per analogam fluxionem generatæ, inſervire poteſt.

PROB. IX.

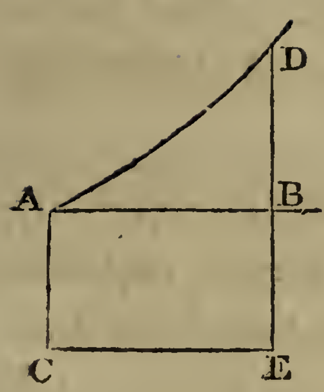
14. *Propoſitæ alicujus Curvæ Aream Determinare.*

Problematis reſolutio in eo fundatur, ut quantitatum fluentium relatio ex relatione fluxionum (per Prob. II.) eliciatur.

Et

Cognatio do ſemel circumacta in locum illum reverſa ſit, unde moveri inceperat. Centro A radio AM ſcribatur Circulus cujus peripheriæ æqualis ſit recta C. Peripheriæ autem circuli, centro A radio AD ſcripti, æqualis ſit recta *c*. E naturâ Helicis Archimedei, recta AD erit ad AM ut angulus MAD, ad quatuor rectos: hoc eſt, ut arcus GD ad circuitum circuli GDO, ſive ut recta GL ad rectam *c*. Sed recta GL ad rectam *c* proportionem habet compoſitam ex proportionibus rectæ GL ad rectam C rectæque C ad *c*. Et recta C ad *c* proportionem habet eam quam AM ad AG. Quare proportio rectæ GL ad rectam *c* compoſita eſt ex proportionibus rectæ GL ad C rectæque AM ad AG. Sed rectanguli GL × AM ad rectangulum C × AG ex eiſdem eſt compoſita proportio. Erit igitur AD, ſive AG, ad AM ut GL × AM ad C × AG. Quadratum igitur ex AG erit ad rectangulum AM × AG ut GL × AM ad C × AG. Eſt autem rectangulum AM × AG ad quadratum ex AM ut C × AG ad C × AM. Erit igitur ex æquo quadratum ex AG ad quadratum ex AM ut GL × AM ad C × AM. Duabus C, AM ſit P proportione tertia. Erit igitur quadratum ex AM rectangulo C × P æquale.

Et



Et imprimis si recta BD, cujus motu quæsita area ADB describitur, super basi AB, positione datâ, erectè incedat; concipe, ut suprà, parallelogrammum ABEC à BE, unitatem æquante, interea describi. Et positâ BE fluxione parallelogrammi, erit BD fluxio areæ quæsitæ. CURVARUM AREÆ.

Dic ergo $AB=x$, et erit etiam $ABEC = (1 \times x) = x$, et $BE=\dot{x}$: dic insuper aream $ADB=z$, et erit $BD=\dot{z}$, ut et $=\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, eo quòd sit $\dot{x}=1$. Et proin per æquationem definientem BD simul definitur fluxionum ratio $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, et exinde (per Prob. II. Cas. 1.) elicietur relatio fluentium quantitatum x et z.

15. EXEMPLA PRIMA.

Ubi BD, *sive* $\dot{z}$, *valet simplicem aliquam quantitatem.*

Detur $\frac{x^2}{a}=\dot{z}$, vel $=\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, æquatio nempe ad Parabolam, et (per Prob. II.) emerget $\frac{x^3}{3a}=z$. Est ergo $\frac{x^3}{3a}$ sive (xx) $\frac{1}{3}AB \times BD =$ areæ parabolicæ ADB.

Detur $\frac{x^3}{a^2}=\dot{z}$, æquatio ad Parabolam secundi generis, et (per Prob. II.) emerget $\frac{x^4}{4a^2}=z$, hoc est (yy) $\frac{1}{4}AB \times BD =$ areæ ADB.

Detur $\frac{a^3}{x^2}=\dot{z}$, sive $a^3x^{-2}=\dot{z}$, æquatio ad Hyperbolam secundi generis; et emerget $-a^3x^{-1}=z$ (zz) sive $\frac{-a^3}{x}=z$; hoc est, $AB \times BD =$

Et quadratum ex AG erit ad rectangulum $C \times P$ ut $GL \times AM$ ad $C \times AM$, hoc est ut GL ad C, sive ut $GL \times P$ ad $C \times P$. Quadratum igitur ex AG rectangulo $GL \times P$ æquale erit. Recta autem P magnitudine data est, propter duas C, AM datas. Quare punctum L erit ad Parabolam positione datam, illam scilicet cujus vertex A, axis rectæ GL parallelus, parameter datæ P æqualis. Q.E.D. Est hæc est cognatio illa Helicis Archimedei cum Parabolâ Apollonianâ, cujus jam olim meminere Cavallerius, Torricellius, Barrovius, aliique. HELICIS PARABOLÆQUE.

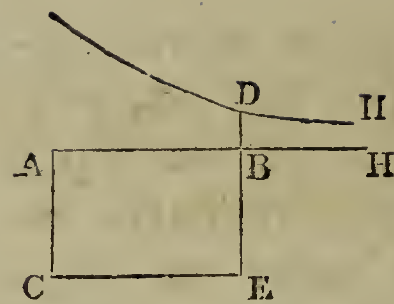
(xx) Sive $\frac{1}{3}x \times \frac{x^2}{a}$, sive $\frac{1}{3}x \times \dot{z}$, sive $\frac{1}{3}AB \times BD$.

(yy) $\frac{1}{4}x \times \frac{x^3}{a^2}$, sive $\frac{1}{4}x \times \dot{z}$, sive $\frac{1}{4}AB \times BD$.

(zz) $-x \times a^3x^{-2}$, sive $-x \times \dot{z}$, sive $-AB \times BD = z$.

areæ

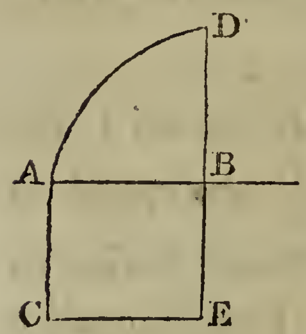
CAPUT IX.



areæ infinitè longæ HDBII ex alterâ parte applicatæ BD jacentis, ut innuit valor negativus.

Atque ita ſi detur $\frac{a^4}{x^3}=\dot{z}$, emerget $\frac{-a^4}{2x^2}=z$.

Præterea ſit $ax=\dot{z}^2$, ſive $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\dot{z}$, æquatio iterum ad Parabolam, et proveniet $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=z$, hoc eſt ($^\alpha$), $\frac{2}{3}$ AB × BD = areæ ADB.



Sit $\frac{a^3}{x}=\dot{z}^2$, et fiet $2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=z$, ſive 2AB × BD = ADB.

Sit $\frac{a^5}{x^3}=\dot{z}^2$, et fiet $-\frac{2a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=z$, ſive 2AB × BD = HDBII.

Sit $ax^2=\dot{z}^3$, et fiet $\frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}}=z$, ſive $\frac{3}{5}$ AB × BD = ADB. Et ſic in aliis.

16. EXEMPLA SECUNDA.

Ubi ż valet plures ejuſmodi connexas quantitates.

Sit $x+\frac{x^2}{a}=\dot{z}$, et fiet $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3a}=z$.

Sit $a+\frac{a^3}{x^2}=\dot{z}$, et fiet $ax-\frac{a^3}{x}=z$.

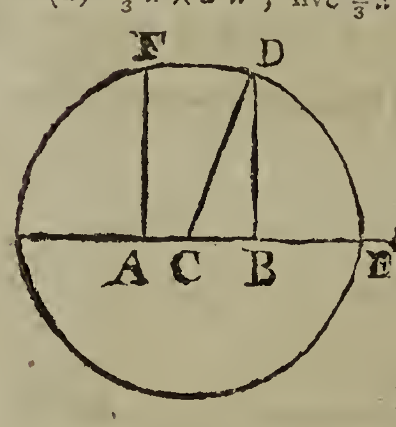
Sit $3x^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}=\dot{z}$, et fiet $2x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{x}-4x^{\frac{1}{2}}=z$.

17. EXEMPLA TERTIA.

Ubi prævia reductio per Diviſionem requiritur.

Detur $\frac{a^2}{b+x}=\dot{z}$, æquatio ad Hyperbolam Apollonianam; et factâ in

(α) $\frac{2}{3}x \times a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, ſive $\frac{2}{3}x \times z$, ſive $\frac{2}{3}$ AB × BD.



(β) NEMPE hoc modo. Rectâ AB poſitione datâ, datoque in illâ puncto A, ſit AB indefinitæ longitudinis, quæ dicatur x. Rectam AB ad perpendiculum inſiſtat BD, quæ dicatur z. Et rectæ AB, BD eo modo inter ſe habeant atque hæc æquatio ſignificat; $z=\sqrt{a^2+bx-x^2}$: deſignantibus, b, a longitudines quaſdam datas. Dico punctum D eſſe ad peripheriam circuli magnitudine et poſitione dati. In rectâ AB ſumatur AC $=\frac{1}{2}b$, et jungatur CD. Sumatur etiam BE = AB. Ita erit EC $=2x-\frac{1}{2}b$. Propter angulum ad B rectum, CD^2 = CB^2 + BD^2. Sed CB^2 = AB^2 − EC × CA $=x^2-\overline{2x-\frac{1}{2}b}\times\frac{1}{2}b=x^2-bx+\frac{1}{4}b^2$. Et BD$^2=a^2+bx-x^2$ (ex hypotheſi) Quare CB^2+BD^2 ſive CD^2 = $a^2+\frac{1}{4}b^2$.

in infinitum divisione, evadet $\dot{z}=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\&c.$ Et inde (per Prob. II.) ut in secundis exemplis, obtinebitur $z=\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}\ \&c.$ Curvarum Areæ.

Detur $\frac{1}{1+x^2}=\dot{z}$, et per divisionem elicietur, $\dot{z}=1-x^2+x^4-x^6\ \&c.$ Vel etiam $\dot{z}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}\ \&c.$ Indeque (per Prob. II.) $z=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\ \&c.=$ AEDB; vel $z=\frac{-1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}\ \&c.$ $=$ HDBII.

Detur $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=\dot{z}$, et per divisionem evadet $\dot{z}=2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}\ \&c.$ Et inde (per Prob. II.) $z=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{13}{3}x^3+\frac{68}{7}x^{\frac{7}{2}}\ \&c.$

18. EXEMPLA QUARTA.

Ubi prævia reductio per Extractionem Radicum requiritur.

Detur $\dot{z}=\sqrt{a^2+x^2}$, æquatio nempe ad Hyperbolam. Et radice adusque terminos infinitè multos extractâ, evadet $\dot{z}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}\ \&c.$ Atque inde, ut in præcedentibus, $z=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}\ \&c.$

Ad eundem modum, si detur $\dot{z}=\sqrt{aa-xx}$, æquatio scilicet ad Circulum, obtinebitur $z=ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}\ \&c.$

Atque ita si detur $\dot{z}=\sqrt{x-x^2}$, æquatio iterum ad Circulum proveniet, extrahendo radicem, $\dot{z}=x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, adeoque est $z=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}\ \&c.$

Sic $\dot{z}=\sqrt{a^2+bx-x^2}$, æquatio denuò ad Circulum, (6) per Extractionem Radicis, dat $\dot{z}=a+\frac{bx}{2a}-\frac{x^2}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}\ \&c.$ Unde (per Prob. II.) elicitur, $z=ax+\frac{bx^2}{4a}-\frac{x^3}{6a}-\frac{b^2x^3}{24a^3}\ \&c.$

$a^2+\frac{1}{4}b^2$. Datum igitur CD². Ergo CD magnitudine data. Sed punctum C datum, propter rectam AC magnitudine et positione datam, datumque punctum A. Ergo D ad peripheriam circuli positione dati. Scribatur circulus ille, cujus peripheriæ recta per A, cum ordinatis BD parallela, in F occurrat. Areæ circulari FABD series Newtoniana $ax+\frac{bx^2}{4a}-\frac{x^3}{6a}$ &c. infinitè producta fit ultimò æqualis.

Caput IX.

Et sic $\sqrt{\frac{1+ax^2}{1-bx^2}}=\dot{z}$, per debitam reductionem dat $\dot{z}=1+\frac{1}{2}b\,x^2+\frac{3}{8}\,b^2\,x^4$ &c. unde (per Prob. 1.) $z=x+\frac{1}{6}\,b\,x^3+\frac{3}{40}\,b^2\,x^5$ &c.

$$\begin{array}{llcll} \frac{1}{2}a & +\frac{1}{4}ab & \quad & +\frac{1}{6}a & +\frac{1}{20}ab \\ & -\frac{1}{8}aa & & & -\frac{1}{40}aa \end{array}$$

Sic denique $\dot{z}=\sqrt[3]{a^3+x^3}$, per extractionem Radicis Cubicæ, dat $\dot{z}=a+\frac{x^3}{3a^2}-\frac{x^6}{9a^5}+\frac{5x^9}{81a^8}$ &c. Indeque $z=ax+\frac{x^4}{12a^2}-\frac{x^7}{63a^5}+\frac{x^{10}}{162a^8}$ &c. $=$ ADB. Vel etiam $\dot{z}=x+\frac{a^3}{3x^2}-\frac{a^6}{9x^5}+\frac{5a^9}{81x^8}$ &c. Indeque $z=\frac{x^2}{2}-\frac{a^3}{3x}+\frac{a^6}{36x^4}-\frac{5a^9}{567x^8}$ &c $=$ HDEH (γ).

19. EXEMPLA QUINTA.

Ubi prævia reductio per æquationis affectæ resolutionem requiritur.

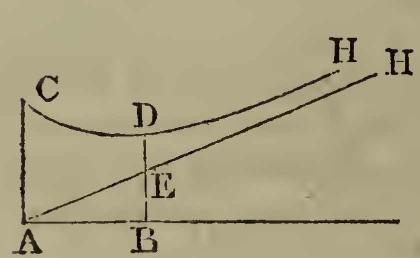
Si Curva per æquationem $\dot{z}^3+a^2\dot{z}+ax\dot{z}-2a^3-x^3=0$ definiatur, extrahe radicem, et proveniet $\dot{z}=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}$ (δ) &c. Unde, ut in prioribus, obtinebitur $z=ax-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{192a}+\frac{131x^4}{2048a^2}$ &c.

Sin $\dot{z}^3-c\dot{z}^2-2x^2\dot{z}-c^2\dot{z}+2x^3+c^3=0$ sit æquatio ad Curvam, resolutio dabit triplicem radicem; nempe $\dot{z}=c+x-\frac{x^2}{4c}+\frac{x^3}{16c^2}$ &c. Et $\dot{z}=c-x+\frac{3x^2}{4c}-\frac{3x^3}{16c^2}$ &c. Et $\dot{z}=-c-\frac{x^2}{2c}-\frac{x^3}{2cc}+\frac{x^5}{4c^4}$ &c. Et inde trium correspondentium arearum valores,

$$z=cx+\tfrac{1}{2}x^2-\frac{x^3}{12c}+\frac{x^4}{64c^2}\ \&c.$$
$$z=cx-\tfrac{1}{2}x+\frac{x^3}{4c}-\frac{3x^4}{64c^2}\ \&c.$$
$$\text{ac } z=-cx-\frac{x^3}{6c}-\frac{x^4}{8c^2}+\frac{x^6}{24c^4}\ \&c.$$

20. De Curvis Mechanicis hic nihil adjicio, siquidem reductio ad formam Geometricam post ostendetur.

21. Cæterùm cùm sic inventi valores z areis quandoque ad basis finitam partem AB, quandoque ad partem BH infinitè versus H productam, et quandoque ad utramque partem sitis secundum

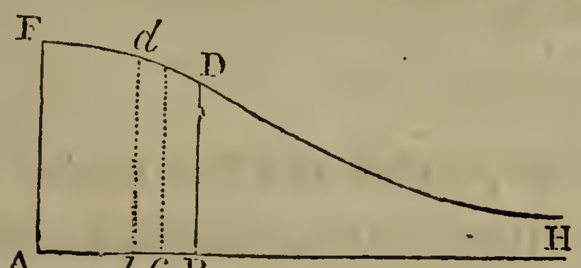


(γ) Sit CDH curva cujus naturam hæc æquatio indicat $\dot{z}=\overline{a^3+x^3}|^{\frac{1}{3}}$, designante x indefinitam AB, quæ a dato puncto A initium sumat, $\dot{z}$ vero designante BD. In BD capiatur BE $=$ AB $=x$. Junctaque AE producatur. Recta AE (quæ positione data est per naturam) curvæ CDH asymptotos erit; id enim æquatio infinita $\dot{z}=x+\frac{a^3}{3x^2}-\frac{a^6}{9x^5}$ &c. satis indicat. Seriei autem infinitæ $\frac{x^2}{2}-$

$\frac{a^3}{3x}$

cundum diverfos eorum terminos competant: quo debitus areæ, ad quamlibet bafis portionem fitæ, valor affignetur, area illa femper ponenda eft æqualis differentiæ valorum z partibus bafis, ad initium et finem iftius areæ terminatis, competentium. Curvarum Areæ.

22. E.G. Ad Curvam, quam æquatio $\frac{1}{1+xx}=\dot{z}$ definit, inventum eft $z=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$ &c. Jam ut quantitatem areæ bdBD, ad jacentis parti bafis Bb, determinem, à valore z qui fit ponendo AB$=x$, aufero eum qui fit ponendo A$b=x$; et (diftinctionis gratiâ fcriptâ X majufculâ pro AB, et x minufculâ pro Ab) reftat $\mathrm{X}-\frac{1}{3}\mathrm{X}^3+\frac{1}{5}\mathrm{X}^5$ &c. $-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5$ &c. valor areæ illius bdBD. Unde fi Ab, feu x, ponatur nullum, habebitur tota area AFDB$=\mathrm{X}-\frac{1}{3}\mathrm{X}^3+\frac{1}{5}\mathrm{X}^5$ &c.



Ad eandem Curvam inventum eft etiam $z=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}$ &c. Unde rurfus, juxta præcedentia, erit area illa bdDB$=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}$ &c. $-\frac{1}{\mathrm{X}}+\frac{1}{3\mathrm{X}^3}-\frac{1}{5\mathrm{X}^5}$ &c. Adeoque fi AB, feu X, ftatuatur infinitum, area adjacens bdH, à parte H fimiliter infinitè longa, valebit $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}$ &c. Siquidem pofterior feries, $-\frac{1}{\mathrm{X}}+\frac{1}{3\mathrm{X}^3}-\frac{1}{5\mathrm{X}^5}$ &c. propter infinitatem denominatorum, evanefcat.

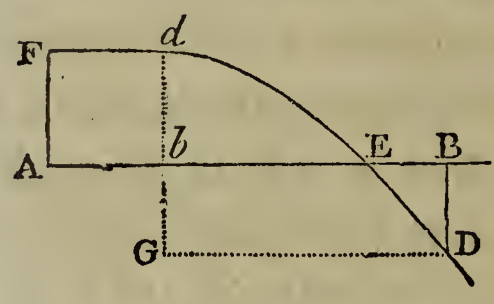
23. Ad Curvam æquatione $a+\frac{a^3}{x^2}=\dot{z}$ defignatam, inventum eft $ax-\frac{a^3}{x}=z$. Unde fit $a\mathrm{X}-\frac{a^3}{\mathrm{X}}-ax+\frac{a^3}{x}=$ areæ bdDB. Hæc autem evadit infinita, five x fingatur nulla, five X infinita; et proinde utraque area AFDB, et bdH infinitè magna eft, ac folæ partes intermediæ, qualis bdDB, exhiberi poffunt. Id quod femper evenit, ubi bafis x cum in numeratoribus aliquorum tum in denominatoribus aliorum terminorum valoris z reperitur. Ubi verò x in numeratoribus folummodo, ut in primo exemplo, re-

$\frac{a^3}{5x}+\frac{a^6}{36x^4}$ &c. nomen primum $\frac{x^2}{2}$ areæ trianguli rectilinearis ABE æquale eft; nomina omnia reliqua areæ HEDH, quæ ultra ordinatam DE afymptotæ eft contigua. Vide Analyfin per Æquat. num. term. inf. Reg. 2. exempla tertia. Series prior $ax+\frac{x^4}{12a^2}-\frac{x^7}{63a^5}$ &c. areæ ACBD menfuram exhibet.

(δ) Vide Cap. III. § 6.

 peritur;

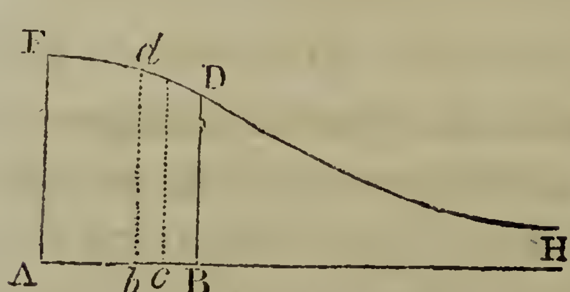
CAPUT IX. peritur; valor z competit areæ ſitæ ad AB, cis parallelè incedentem. Et ubi in denominatoribus tantùm, ut in ſecundo exemplo; valor ille mutatis omnium terminorum ſignis, competit areæ omni, ultra parallelè incedentem, infinitè productæ.



24. Si quando Curva linea ſecat baſin inter puncta b et B, puta in E, vice areæ habebitur arearum ad diverſas baſis partes differentia, bdE−BDE; cui ſi addatur rectangulum BDGb, obtinebitur area dEDG.

25. Præcipuè autem notandum eſt, quòd ubi in valore $\dot{z}$ terminus aliquis per x unius tantùm dimenſionis dividitur; area illi termino correſpondens pertinet ad Hyperbolam conicam, et proinde per infinitam ſeriem ſeorſim exhibenda eſt: quemadmodum in ſequentibus factum.

Sit $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = \dot{z}$, æquatio ad Curvam; et per diviſionem, fiet $\dot{z} = \frac{a^2}{x} - 2a + 2x - \frac{2x^2}{a} + \frac{2x^3}{a^2}$ &c. Indeque $z = \boxed{\frac{a^2}{x}} - 2ax + x^2 - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{2a^2}$ &c. Et area bdDB $= \boxed{\frac{aa}{X}} - 2aX + X^2 - \frac{2X^3}{3a}$ &c. $- \boxed{\frac{aa}{x}} + 2ax - x^2 + \frac{2x^3}{3a}$ &c. Ubi per notas $\boxed{\frac{aa}{X}}$ et $\boxed{\frac{aa}{x}}$ deſigno areolas terminis $\frac{aa}{X}$ et $\frac{aa}{x}$ competentes.



Jam ut $\boxed{\frac{aa}{X}}$ et $\boxed{\frac{aa}{x}}$ inveſtigetur, fingo Ab ſeu x definitam eſſe; et bB indefinitam, ſeu fluentem, lineam, quam itaque ſi dicam y, erit $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$ = areæ iſti hyperbolicæ adjacenti bB, nempe $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$. Eſt autem, factâ diviſione $\frac{aa}{x+y} = \frac{aa}{x} - \frac{aay}{x^2} + \frac{a^2y^2}{x^3} - \frac{a^2y^3}{x^4}$ &c. Adeoque $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$ ſeu $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{aay}{x} - \frac{a^2y^2}{2x^2} + \frac{a^2y^3}{3x^3} - \frac{a^2y^4}{4x^4}$ &c. Et proinde tota area quæſita bdBD=

aay

(*) Nimirum ſi curva FDH ſit ipſa Hyperbola Apolloniana.

(§) Vide

$\frac{aay}{x} - \frac{a^2y^2}{2x^2} + \frac{a^2y^3}{3x^3}$ &c. $- 2aX + X^2 - \frac{2X^3}{3a}$ &c. $+ 2ax - x^2 + \frac{2x^3}{3a}$ &c. De Areis Hyperbolicis.

26. Ad eundem modum AB, seu X, pro definitâ lineâ adhiberi potuit, et sic prodiisset $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{a^2y}{X} + \frac{a^2y^2}{2X^2} + \frac{a^2y^3}{3X^3} + \frac{a^2y^4}{4X^4}$ &c.

27. Quinetiam si bisecetur bB in C, et assumatur AC esse definitæ longitudinis, et Cb ac CB indefinitæ: tum dicto AC$=e$, et Cb vel CB$=y$, erit $bd = \frac{aa}{e-y}$ (ε) $= \frac{aa}{e} + \frac{aay}{e^2} + \frac{a^2y^2}{e^3} + \frac{a^2y^3}{e^4} + \frac{a^2y^4}{e^5}$ &c. Indeque area hyperbolica parti basis bC adjacens $\frac{a^2y}{e} + \frac{a^2y^2}{2e^2} + \frac{a^2y^3}{3e^3} + \frac{a^2y^4}{4e^4}$ &c. Erit etiam CB $= \frac{aa}{e+y} = \frac{aa}{e} - \frac{a^2y}{e^2} + \frac{a^2y^2}{e^3} - \frac{a^2y^3}{e^4} + \frac{a^2y^4}{e^5}$ &c. Et inde area alteri basis parti CB adjacens $\frac{a^2y}{e} - \frac{a^2y^2}{2e^2} + \frac{a^2y^3}{3e^3} - \frac{a^2y^4}{4e^4} + \frac{a^2y^5}{5e^5}$ &c. Et harum arearum summa $\frac{2a^2y}{e} + \frac{2a^2y^3}{3e^3} + \frac{2a^2y^5}{5e^5}$ &c. valebit $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$.

28. Sic æquatione $\dot{z}^3 + \dot{z}^2 + \dot{z} - x^3 = 0$, ad Curvam existente, ejus radix erit $\dot{z} = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81x^2} + \frac{14}{729x^4}$ (ζ) &c. Unde fit $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \boxed{\frac{2}{9x}} - \frac{7}{81x} - \frac{14}{2187x^3}$ &c. Et area bDB$d = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X - \boxed{\frac{2}{9X}} - \frac{7}{81X}$ &c. $- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \boxed{\frac{2}{9x}} + \frac{7}{81x}$ &c. hoc est, $= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{7}{81X}$ &c. $- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{7}{81x}$ &c. $- \frac{4y}{9e} - \frac{4y^3}{27e^3} - \frac{4y^5}{35e^5}$ &c.

29. Potest autem terminus iste hyperbolicus commodè devitari, mutando initium basis; id est, augendo vel minuendo eam per datam aliquam quantitatem. Quemadmodum in exemplo priore, ubi $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = \dot{z}$, erat æquatio ad Curvam; si faciam b esse initium basis, et fingens Ab cujuslibet esse determinatæ longitudinis, puta $\frac{1}{2}a$, pro basis residuo, bB, jam scribam x: hoc est, si diminuam basem per $\frac{1}{2}a$, scribendo $x + \frac{1}{2}a$ pro x; evadet $\frac{\frac{1}{2}a^3 - a^2x}{\frac{3}{4}a^2 + 2ax + x^2} = \dot{z}$, et per divisionem $\dot{z} = \frac{2}{3}a - \frac{28}{9}x + \frac{200x^2}{27a}$ &c. Unde fit $z = \frac{2}{3}ax - \frac{14}{9}x^2 + \frac{200x^3}{81a}$ &c. = areæ bdDB.

Et sic pro initio basis adhibendo aliud, atque aliud ejus punctum, potest area cujusvis Curvæ modis infinitis exprimi.

30. Potuit etiam æquatio $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = \dot{z}$, in duas series infinitas re-

(ζ) Vide Cap. III. § 15.

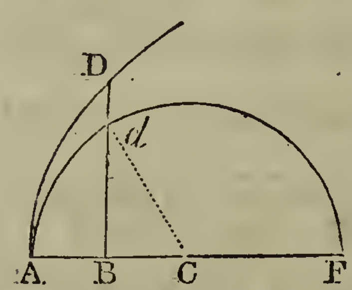
solvi,

ſolvi, prodeunte $z = \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$ &c. $- a + x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}$ &c (n). Ubi terminus per x unius tantùm dimenſionis diviſus non reperitur. Sed hujuſmodi ſeries, ubi dimenſiones x in unius numeratoribus, et alterius denominatoribus, infinitè aſcendunt, minùs aptæ ſunt, ex quibus z per computum arithmeticum obtineri poſſit, cùm in ejus valore numeri pro ſpeciebus ſubſtituuntur.

31. Inſtituenti computum hujuſmodi numeroſum, poſtquam valor areæ in ſpeciebus habetur, haud aliquid difficile occurret. Tamen in præcedentem doctrinam penitiùs illuſtrandam, exemplum unum et alterum ſubjungere placuit.

Quadratura Hyperbolæ.

32. Proponatur Hyperbola AD, quam æquatio $z = \sqrt{x + x^2}$ deſignat, utpote cujus vertex eſt ad A, et uterque axis æquatur unitati.



Et è præcedentibus area ejus ADB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. hoc eſt, $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$ &c. Quæ ſeries infinitè producitur, multiplicando ultimum terminum continuò per ſuccedaneos terminos hujus progreſſionis; $\frac{1.3}{2.5}x$. $\frac{-1.5}{4.7}x$. $\frac{-3.7}{6.9}x$. $\frac{-5.9}{8.11}x$. $\frac{-7.11}{10.13}x$. &c. Nempe primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \times \frac{1.3}{2.5}x$ facit $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$, ſecundum terminum. Hic in $\frac{-1.5}{4.7}x$ facit $-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ tertium terminum. Hic in $\frac{-3.7}{6.9}x$ facit $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ quartum terminum. Et ſic in infinitum. Sumatur jam AB cujuſlibet longitudinis, puta $\frac{1}{4}$, et hunc numerum ſcribe pro x, ejuſque radicem $\frac{1}{2}$ pro $x^{\frac{1}{2}}$; et primus terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, ſive $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$ in decimalem fractionem reductus, evadit 0,08333333 &c. Hic in $\frac{1.3}{2.5.4}$ facit 0,00625, ſecundum terminum. Hic in $\frac{-1.5}{4.7.4}$ facit $-0,0002790178$ &c. tertium terminum. Et ſic in infinitum. Terminos autem, quos ſic gradatim elicio, diſpono in duas Tabulas, affirmativos nempe in unam, et negativos in aliam, et addo, ut hîc vides.

(n) Quippe cum fractio $\frac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = \frac{a^3}{x^2 + ax} - \frac{a^2}{a + x}$. Horum autem prior, $\frac{a^3}{x^2 + ax} = \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$ &c. poſterior $\frac{a^2}{a + x} = a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a}$ &c. Cap. I. § 4.

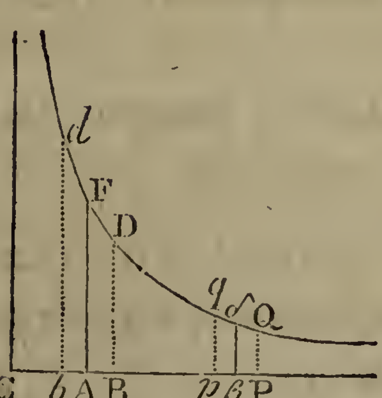
+0,0833333333333333	−0,0002790178571429
625000000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	−0,0002825719389575
1	+0,0896109885646618
+0,0896109885646618	0,0893284166257043

Dein à ſummâ affirmativarum aufero ſummam negativorum, et reſtat 0,0893284166257043 quantitas areæ hyperbolicæ ADB, quam quærere oportuit.

33. Proponatur jam circulus ADF quam æquatio $\sqrt{x-xx}=z$ deſignat, hoc eſt, cujus diameter AF ſit unitas, et è præcedentibus area ejus AdB erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. In quâ ſerie cùm termini non differant à terminis ſeriei ſupra exprimentis aream hyperbolicam, niſi in ſignis + et −, nihil aliud agendum reſtat, quàm ut eoſdem numerales terminos cum aliis ſignis nectamus, ſubducendo nempe connexas ambarum præfatarum Tabularum ſummas 0,0898935605036193 à primo termino duplicato 0,1666666666666666, et reſiduum 0,0767731061630473, erit areæ circularis portio AdB; poſito ſcilicet AB quadrante diametri. Atque ita videre eſt, quòd etſi areæ Circuli et Hyperbolæ non conferantur ratione geometricâ, tamen utraque eodem computo arithmetico prodit. QUADRATURA CIRCULI.

34. Inventâ Circuli portione AdB, exinde tota area facilè eruitur. Nempe radio dc acto duc Bd, ſeu $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, in BC, ſeu $\frac{1}{4}$; et facti dimidium $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ ſeu 0,0541265877365275 valebit triangulum CdB; quod adde areæ AdB, et habebitur ſector Acd = 0,1308996938995748; cujus ſextuplum 0,7853981633974488 eſt area tota.

35. Et hinc obiter exit peripheriæ longitudo 3,1415926535897932, dividendo nempe Aream per quadrantem Diametri.



I.

36. Hiſce calculum areæ inter Hyperbolam dFD et ejus aſymptoton CA interceptæ ſubnectimus. Sit C centrum hyperbolæ, et poſitâ CA $=a$, AF $=b$, et AB $=$ A$b=x$; erit $\frac{ab}{a+x}=$ BD et $\frac{ab}{a-x}=bd$, et inde area AFDB $=bx-\frac{bx^2}{2a}+\frac{bx^3}{3a^2}-\frac{bx^4}{4a^3}$ &c. Et area AF$db=bx+\frac{bx^2}{2a}+\frac{bx^3}{3a^2}+$

bx^4

 $\frac{bx^4}{4a^3}$ &c. Ac earum ſumma $bd\text{DB}=2bx+\frac{2bx^3}{3a^2}+\frac{2bx^5}{5a^4}+\frac{2bx^7}{7a^6}$ &c.

Ponamus jam CA=AF=1, et Ab vel AB=$\frac{1}{10}$, exiſtente cb=0,9, et CB=1,1; et ſubſtituendo hos numeros pro a, b, et x, primus ſeriei terminus evadet 0,2; ſecundus 0,00066666 &c. tertius 0,000004; et ſic deinceps, ut vides in hâc Tabulâ.

	0,200000000000000	
	666666666666	
	4000000000	
	28571286	
	2222222	
	18182	
	154	
	1	
Summa	0,200670695462151	= areæ bdDB

37. Quòd ſi areæ hujus partes Ad et AD ſeorſim deſiderentur; ſubduc minorem DA è majori dA et reſtabit, $\frac{bx^2}{a}+\frac{bx^4}{2a^3}+\frac{bx^6}{3a^5}+\frac{bx^8}{4a^7}$ &c. Ubi ſi 1 ſcribatur pro a et b, ac $\frac{1}{10}$ pro x, termini, in decimales redacti, conficient ſequentem Tabulam.

	0,010000000000000	
	500000000000	
	3333333333	
	25000000	
	200000	
	1667	
	14	
Summa	0,010050335853501 4	= Ad − AD

38. Jam ſi hæc arearum differentia addatur et auferatur ſummæ earum priùs inventæ, aggregati dimidium 0,1053605156578263 erit major area Ad; et reſidui dimidium 0,0953101798043248, minor AD.

39. Per eaſdem Tabulas obtinentur etiam areæ illæ AD et Ad, ubi AB et Ab ponantur $\frac{1}{100}$, ſive CB=1,01 et cb=0,99 ſi modò numeri in depreſſiora loca debitè transferantur, ut hîc

	0,020000000000000			0,000100000000000	
	6666666667			50000000	
	400000			3333	
	28				
Summa	0,020000666706669 5	= bdDB	Summa	0,000100005000333 3	= Ad − AD

videre eſt. $\frac{1}{2}$ aggregat 0,0100503358535014=Ad; $\frac{1}{2}$ reſid. 0,0099503308531681=AD.

40. Et ſic poſitis AB et Ab $\frac{1}{1000}$, ſeu CB=1,001, et cb=0,999, obtinebitur Ad=0,0010005003335835, et AD=0,0009995003330835.

41. Ad eundem modum ſi ſtantibus CA et AF=1, ponantur AB et Ab=0,2, vel =0,02, vel =0,002, eliciantur areæ illæ.

Ad=0,2231435513142097 et AD=0,1823215567939546
vel Ad=0,0202027073175194 et AD=0,0198026272961797
vel Ad=0,002002 et AD=0,001

42. Ex

42. Ex inventis hisce areis jam facile est alias, per solam additionem et subductionem, derivare. Utpote cùm sit $\frac{1,2}{0,8}$ in $\frac{1,2}{0,9} = 2$, arearum pertinentium ad rationes $\frac{1,2}{0,8}$ et $\frac{1,2}{0,9}$ (hoc est, insistentium partibus basis $1,2-0,8$ et $1,2-0,9$) summa, 0,69314718055994 53, erit area AF$\delta\beta$, existente C$\beta=2$, ut notum est. Dein cùm sit $\frac{1,2}{0,8}$ in $2=3$, arearum pertinentium ad $\frac{1,2}{0,8}$, et 2 summa, 1,0986122886681097, erit area AF$\delta\beta$, existente C$\beta=3$. Pariter cùm sit $\frac{2 \text{ in } 2}{0,8}=5$, et 2 in $5=10$, per debitam arearum additionem obtinebitur $1,6094379124341004=$ AF$\delta\beta$, existente C$\beta=5$; et $2,3025850929940457=$ AF$\delta\beta$, existente C$\beta=10$. Atque ita cùm sit $10 \times 10=100$, et 10 in $100=1000$, et $\sqrt{5 \text{ in } 10 \text{ in } 0,98}=7$, et 10 in $1,1=11$, et $\frac{1000 \times 1,001}{7 \times 11}=13$, et $\frac{100 \times 1,02}{2 \times 3}=17$, et $\frac{1000 \times 0,999}{3 \times 3 \times 3}=37$, et $100 \times 1,01=101$, et $\frac{1000 \times 1,002}{2 \times 3}=167$, et $\frac{1000 \times 0,998}{2}=499$, patet aream AF$\beta\delta$ per arearum suprà inventarum compositionem inveniri posse, existente C$\beta=100$; 1000; 7; aut alio quolibet è recensitis numeris, et stante AB=BF=1. Id quod significare volui, ut methodus construendo Logarithmum canoni aptissima pateret; quæ areas Hyperbolicas (ex quibus logarithmi facilè deducantur) tot numeris primis correspondentes, quasi per binas tantùm haud molestas operationes determinat. Cæterùm cùm canon iste ex hoc fonte præ cæteris feliciter depromi videatur, quid si constructionem ejus, coronidis loco, perstringam. *Areæ Hyperbolicæ.*

43. Imprimis itaque assumpto 0 pro logarithmo numeri 1, et 1 pro logarithmo numeri 10, ut solet, investigandi sunt logarithmi primorum numerorum, 2,3,5,7,11,13,17,37, dividendo inventas areas hyperbolicas per 2,3025850929940457, aream nempe correspondentem numero 10: vel, quod eodem recidit, multiplicando per ejus reciprocum 0,4342944819032518. Sic enim *e. g.* Si 0,69314718 &c. area correspondens numero 2, multiplicetur per 0,43429 &c. facit 0,3010299956639812. Logarithmum numeri 2. *Logarithmotechnia.*

44. Deinde logarithmi numerorum omnium in canone, qui ex horum multiplicatione fiunt, indagandi sunt per additionem

CAPUT IX. eorum logarithmorum, ut ſolet: et loca vacua poſtmodum interpolanda, ope hujus Theorematis.

45. Sit n numerus logarithmo donandus, x differentia inter illum et proximos numeros hinc inde æqualiter diſtantes, quorum logarithmi habentur; ac d, ſemiſſis differentiæ logarithmorum: et quæſitus logarithmus numeri n obtinebitur addendo $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c. logarithmo minoris numeri. Nam ſi numeri exponantur per Cp, Cβ, & CP, et exiſtente rectangulo CBD vel C$\beta\delta = 1$ ut ſuprà, ac erectis parallelè incedentibus pq & PQ: ſi n ſcribatur pro Cβ, et x pro βp vel βP, erit area pqQP, ſive $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$ &c. ad aream $pq\delta\beta$, ſive $\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3}$ &c. ut differentia inter logarithmos extremorum numerorum, ſive $2d$, ad differentiam inter logarithmos minoris et medii: quæ proinde erit $\dfrac{\frac{dx}{n} + \frac{dx^2}{2n^2} + \frac{dx^3}{3n^3}}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^5}{5n}}$ &c. hoc eſt, factâ diviſione, $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ (θ).

46. Hujus autem ſeriei duos primos terminos, $d + \frac{dx}{2n}$, pro canone conſtruendo ſat accuratos exiſtimo, etiamſi adufque quatuordecim, vel forte quindecim figurarum loca logarithmi producerentur: ſi modò numerus logarithmo donandus non ſit minor quàm 1000 (ι). Quod ſanè calculum haud difficilem præbere poteſt, ſiquidem x ut plurimùm erit unitas, vel numerus binarius. Non opus eſt tamen omnia loca beneficio hujus regulæ interpolare. Nam logarithmi numerorum, qui prodeunt è multiplicatione

LOGARITHMO- (θ) $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3} + \frac{7dx^5}{180n^5} + \frac{181dx^7}{7560n^7} + \frac{1903dx^9}{113400n^9}$ &c.

(ι) ALIAM ſeriem acutiſſimus Halleius excogitavit, quæ in exiguis etiam numeris mirâ celeritate ad metam properat.

Sit $a + e$ numerus cujus logarithmus exquirendus eſt, datis numerorum a, $a + 2e$ logarithmis. Propter datos numerorum, a, $a + 2e$, logarithmos, data erit ſummæ illorum ſemiſſis, quæ dicatur A. Erit A numeri $\sqrt{a^2 + 2ae}$ logarithmus. Numerus autem $a + e$, numero $\sqrt{a^2 + 2ae}$ major erit; duorum ſcilicet, a, $a + 2e$, arithmeticè medius eorundem geometricè medio. Logarithmus igitur numeri $a + e$ logarithmo dato A major erit. Differentia ſit z. Erit igitur A + z numeri $a + e$ logarithmus, cujus datâ parte A, ſi pars reliqua z inventa fuerit, logarithmus totus definitus erit. Eſt autem z logarithmus rationis numeri $\sqrt{a^2 + 2ae}$ ad numerum $a + e$. Ponatur $y^2 = 2 \times a \times \overline{a + 2e} + e^2 = 2a^2 + 4ae + e^2$. Erit igitur $y^2 - e^2 = 2 \times \overline{a^2 + 2ae}$; et $y^2 + e^2 = 2 \times \overline{a + e}|^2$. Ergo $\sqrt{y^2 - e^2} : \sqrt{y^2 + e^2} = \sqrt{a^2 + 2ae} : a + e$. Quare z logarithmus erit rationis quam $\sqrt{y^2 - e^2}$ habet ad $\sqrt{y^2 + e^2}$, et $2z$ logarithmus rationis quam $y^2 - e^2$ habet ad $y^2 + e^2$. Jam ſit CA $= y^2$, AB et A$b = e^2$.

tiplicatione vel divisione numeri novissimè transacti, per numeros, quorum logarithmi priùs habebantur, obtineri possunt per additionem vel subductionem eorum logarithmorum. Quinetiam per differentias logarithmorum, et illarum differentiarum secundas differentias tertiasque, si opus est, loca vacua expeditiùs impleri possunt, adhibitâ tantùm prædictâ regulâ, ubi ad obtinendum illas differentias continuatio aliquot locorum plenorum desideratur. LOGARITHMOTECHNIA.

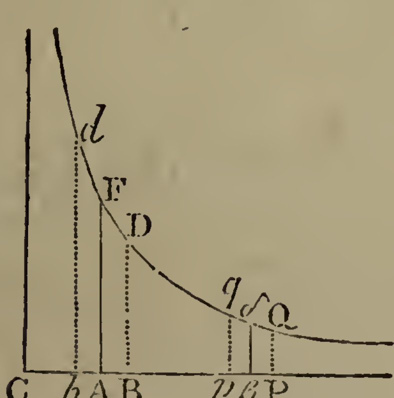
47. Eâdem methodo regulæ pro intercalatione logarithmorum inveniri possunt, ubi è tribus numeris dantur logarithmi minoris & medii, vel medii et majoris; idque licet numeri non sint in arithmeticâ progressione.

48. Imo et hujus methodi vestigiis insistendo, regulæ, pro construendis artificialium sinuum et tangentium Tabulis, sine adminiculo naturalium, haud difficulter depromi possunt. Sed hæc in transitu.

CAPUT DECIMUM.

1. HACTENUS Curvarum, quæ per æquationes minùs simplices definiuntur, quadraturam, mediante reductione in æquationes ex infinitè multis terminis simplicibus constantes, ostendimus. Cùm vero ejusmodi Curvæ per finitas etiam æquationes nonnunquam quadrari possint, vel saltem comparari cum aliis Curvis, quarum areæ quodammodo pro cognitis habeantur, quales sunt sectiones conicæ: ea propter sequentes duos Theo-

A$b = e^2$. Et rectangulo CA × AF existente = 1, erit AF $= \frac{1}{y^2}$. Tum hisce e^2, y^2, $\frac{1}{y^2}$ pro illis x, a, b in seriem Newtonianam substitutis, efficietur area BD$db = \frac{2e^2}{y^2} + \frac{2e^6}{3y^6} + \frac{2e^{10}}{5y^{10}} + \frac{2e^{14}}{7y^{14}}$ &c. Et hanc seriem si in modulum systematis Briggiani multiplicaveris, logarithmum effeceris Briggianum rationis ejus quam Cb habet ad CB, sive ejus quam $y^2 - e^2$ habet ad $y^2 + e^2$, hoc est logarithmum $2z$. TEC



$$\text{Ergo } 2z = \frac{2e^2}{y^2} + \frac{2e^6}{3y^6} + \frac{2e^{10}}{5y^{10}} + \frac{2e^{14}}{7y^{14}} \text{ \&c.} \times 0,4342944 \text{ \&c.}$$

$$\text{Ergo } z = \frac{e^2}{y^2} + \frac{e^6}{3y^6} + \frac{e^{10}}{5y^{10}} + \frac{e^{14}}{7y^{14}} \text{ \&c.} \times 0,43429 \text{ \&c.}$$

$$\text{Et logarithmus numeri } a + e = 0,43429 \text{ \&c.} \times \overline{\frac{e^2}{y^2} + \frac{e^0}{3y^6} + \frac{e^{10}}{5y^{10}} \text{ \&c.}} + A.$$

Vel si e sit unitas, quod plerumque usuveniet, logarithmus numeri

$$a + 1 = 0,43429 \text{ \&c.} \times \overline{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{3y^6} + \frac{1}{5y^0} \text{ \&c.}} + A. \quad \text{Q. E. I.}$$

 rematum

Caput X. rematum Catalogos, in illum ufum ope Propofitionis VII$^{\text{æ}}$ et VIII$^{\text{æ}}$, ut promifimus, conftructos, jam vifum eft adjungere.

2. Horum prior exhibet areas Curvarum quæ quadrari poffunt; et pofterior complectitur Curvas, quarum areas cum areis conicarum fectionum conferre liceat.

3. In utrifque literæ Latinæ d, e, f, g et h, datas quafvis quantitates, x et z bafes curvarum, v et y parallelè incedentes, et s ac t areas, ut fuprà denotant. Græcæ autem, η et θ, quantitati z fuffixæ denotant ejufdem z dimenfionum numerum, five fit integer vel fractus, five affirmativus aut negativus. Veluti fi fit $\eta=3$, erit $z^{\eta}=z^3$, $z^{2\eta}=z^6$, $z^{-\eta}=z^{-3}$ five $\frac{1}{z}$, $z^{\eta+1}=z^4$, et $z^{\eta-1}=z^2$.

4. Infuper in valoribus arearum, abbreviandi causâ, fcribitur R vice radicalis illius $\sqrt{e+fz^{\eta}}$, vel $\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$, quâ valor incedentis y afficitur.

Catalogus

Catalogus Curvarum aliquot ad Rectilineas Figuras relatarum, ope Prob. VII. *Constructus.*

CURVARUM ORD.			AREARUM VALORES
I		$dz^{\eta-1} = y$	$\frac{d}{\eta} z^{\eta} = t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+ffz^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta e^2+\eta efz^{\eta}} = t$, vel $\frac{-d}{\eta ef+\eta ffz^{\eta}} = t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3\eta f} R^3 = t$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2} dR^3 = t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{16e^2-24efz^{\eta}+30f^2z^{2\eta}}{105\eta f^3} dR^3 = t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^{\eta}-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4} dR^3 = t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{\eta f} R = t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2} dR = t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16e^2-8efz^{\eta}+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3} dR = t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^3+48e^2fz^{\eta}-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4} dR = t$

5. His adjiciantur sequentia magis Generalia Theoremata, quibus via ad altiora sternitur.

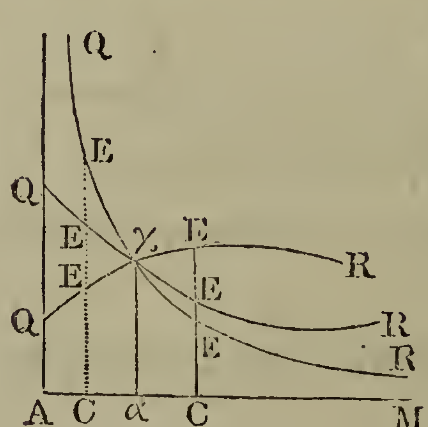
Ponatur p pro $\sqrt{h+iz^{\eta}}$

6. Possint

CAPUT X.

V	1	$2\theta e z^{\theta-1} + \begin{array}{l}2\theta f\\ +3\eta f\end{array} z^{\theta+\eta-1} \times \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$z^{\theta} R^{3} = t$
	2	$2\theta e z^{\theta-1} + \begin{array}{l}2\theta f\\ +3\eta f\end{array} z^{\theta+\eta-1} + \begin{array}{l}2\theta g\\ +6\eta g\end{array} z^{\theta+2\eta-1} \text{ in } \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} = y$	$z^{\theta} R^{3} = t$
VI	1	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times f z^{\theta+\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$z^{\theta} R = t$
	2	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times g z^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} = y$	$z^{\theta} R = t$
VII	1	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times f z^{\theta+\eta-1}}{e+fz^{\eta} \text{ in } 2\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R} = t$
	2	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+\eta} \times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times g z^{\theta+2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta} \text{ in } 2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} = y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R} = t$
VIII	1	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times f z^{\theta+\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+f^{2}z^{2\eta}} = 2y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R^{2}}$ (sive $\dfrac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}}$) $= t$
	2	$\dfrac{2\theta e z^{\theta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times f z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+4\eta} \times g z^{\theta+2\eta-1}}{e^{2}+2efz^{\eta}+\overline{f^{2}+2eg} \times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}} = 2y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R^{2}}$ (sive $\dfrac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$) $= t$
IX		$2\theta e h z^{\theta-1} + \begin{array}{l}\overline{2\theta+3\eta} \times fh\\ +\overline{2\theta+\eta} \times ei\end{array} z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+4\eta} \times fi z^{\theta+2\eta-1} \text{ in } \dfrac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{2\sqrt{h+iz^{\eta}}} = y$	$z^{\theta} R^{3} p = t$
X		$2\theta e h z^{\theta-1} + \begin{array}{l}\overline{2\theta+3\eta}\, fh\\ +\overline{2\theta+\eta} \times ei\end{array} z^{\theta+\eta-1} + \overline{2\theta+2\eta} \times fi z^{\theta+2\eta-1} \text{ in } \dfrac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{h+iz^{\eta} \text{ in } 2\sqrt{h+iz^{\eta}}} = y$	$\dfrac{z^{\theta} R^{3}}{p} = t$

6. Possint et hujusmodi alia adjici, sed ad alterius generis Curvas, quæ cum conicis sectionibus conferri possunt, jam transeo. Et in hoc Catalogo expositam curvam lineâ QEχR designatam habes, cujus basis principium sit A; basis AC, parallelè incedens CE, areæ principium $\alpha\chi$, et area descripta $\alpha\chi\varepsilon$C. Ejus autem areæ principium sive terminus initialis (quod ut plurimùm vel basis principio A insistit, vel ad infinitam distantiam recedit) invenitur, quærendo basis longitudinem, Aα, cùm areæ valor nullus est, et erigendo normalem $\alpha\chi$.



(x) Colsoni verissimam emendationem sequor. Codices MSS. habent 868, Vitiosè. Confer Librum de Quad. Curv. not. (°°).

7. Ad eundem modum conicam sectionem habes designatam lineâ SDG, (*Vide Librum, De Quad. Curv. Tab.* II. *fig.* 1, 2, 3, 4.) cujus centrum sit A, vertex a, rectangulæ semidiametri Aa & AP: basis principium A, vel a, vel α; basis AB, vel aB, vel αB: ordinatim applicata BD, tangens TD occurrens AB in T, subtensa aD, et inscriptum vel ascriptum rectangulum ABDO. De Tabula Curvarum Secunda.

8. Itaque retentis jam antè definitis literis, erit AC$=z$, CE$=y$, $\alpha\chi$EC$=t$, AB vel aB$=x$, BD$=v$ & ABDP vel aGDB$=s$. Et præterea, siquando ad alicujus areæ determinationem duæ conicæ sectiones requiruntur, posterioris area dicetur σ, basis ξ, et parallelè incedens Υ.

Catalogus Curvarum aliquot ad Conicas Sectiones relatarum ope Prob. VIII. *constructus.* Vide Tab. II. Libri de Quad. Curv.

9. Antequam Theoremata, in his Curvarum classibus tradita, exemplis illustrare pergam, juvabit observare

I. Quòd cùm quantitatum d, e, f, g, h & i signa omnia, in æquationibus curvas definientibus, affirmativa posuerim; siquando contingant esse negativa, in subsequentibus basis et incedentis lineæ sectionis conicæ, necnon quæsitæ areæ valoribus mutari debent.

II. Numeralium η & θ, ubi negativæ sunt, signa in arearum valoribus sunt etiam mutanda. Quinetiam ipsarum signis mutatis Theoremata novam formam induere possunt. Sic in quartâ formâ posterioris Catalogi, Theorema tertium, signo ipsius η mutato, evadit $\frac{d}{z^{-2\eta+1}\sqrt{e+fz^{-\eta}}}=y$, $\frac{1}{z^{-\eta}}=x$ &c. hoc est $\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{ez^{2\eta}+fz^{\eta}}}=y$, $z^{\eta}=x$, $\sqrt{fx+ex^2}=v$, $\frac{d}{\eta e}$ in $2xv-3s=t$, & sic in aliis.

III. Cujusque ordinis (si secundum prioris Catalogi demas) series utrinque in infinitum continuari potest. Scilicet in tertii quartique ordinis seriebus prioris Catalogi, numeri coefficientes initialium terminorum, 2, −4, 16, −96, 768 ($^{\lambda}$) &c. generantur multiplicando numeros −2, −4, −6, −8, −10, &c. in se continuò ($^{\lambda}$); et subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus in tertio ordine derivantur, multiplicando gradatim per $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{8}, -\frac{11}{10}$, &c. vel in quarto ordine, multiplicando per $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{10}$, &c. Denominatorum verò coefficientes, 1, 3, 15, 105, &c.

(λ) Vide Librum de Quadratura Curvarum, not. (^{nn}).

ex

Caput X. ex ductu numerorum 1, 3, 5, 7, 9, &c. in se gradatim oriuntur.

In secundo autem Catalogo series ordinum, Primi, Secundi, Quinti, Sexti, Noni & Decimi, ope solius divisionis infinitè producuntur. Sic habito $\frac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$, si divisionem ad usque convenientem periodum instituas, orietur E. g. $\frac{d}{f}z^{3\eta-1}-\frac{de}{ff}z^{2\eta-1}+\frac{de^2}{f^3}z^{\eta-1}-\frac{\frac{de^3}{f^3}z^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$. Priores tres termini sunt primi ordinis prioris Catalogi, et quartus primæ speciei hujus ordinis (μ). Unde constat aream valere $\frac{d}{3\eta f}z^{3\eta}-\frac{de}{2\eta f^2}z^{2\eta}+\frac{de^2}{\eta f^3}z^{\eta}-\frac{e^3}{\eta f^3}s$; positâ nempe s areâ sectionis conicæ, cujus basis x sit $=z^{\eta}$, et incedens applicata $v=\frac{d}{e+fx}$.

Tertii autem septimique ordinis series, ope duorum Theorematum in quinto ordine prioris Catalogi, per debitam additionem vel subductionem infinitè producuntur; ut et quarti octavique series, ope theorematum in subsequenti sexto ordine; ac undecimi series ope theorematis in decimo ordine ejusdem prioris catalogi. E. G. Si præfati tertii ordinis series ultrà producenda sit, finge $\theta=-4\eta$; & quinti ordinis alterius Catalogi Theorema primum evadet, $-8\eta ez^{-4\eta-1}-5\eta fz^{-3\eta-1}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{R^3}{z^{4\eta}}=t$. Est autem juxta quartum theorema hujus producendæ seriei, (scripto $-\frac{5\eta f}{2}$ pro d) $-\frac{5\eta f}{2}z^{-3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{1}{z^{\eta}}=x$. $\sqrt{fx+ex^2}=v$. & $\frac{10fv^3-15f^2s}{12e}=t$. Quare subductis prioribus ipsarum y, ac t, valoribus, restabunt $4\eta ez^{-4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. et $\frac{10fv^3-15f^2s}{12e}-\frac{R^3}{z^{4\eta}}=t$. Ipsisque in $\frac{d}{4\eta e}$ ductis, et pro $\frac{R^3}{z^{4\eta}}$ scripto si placet xv^3, emerget quintum producendæ seriei Theorema, $\frac{d}{z^{4\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$. $\frac{1}{z^{\eta}}=x$. $\sqrt{fx+exx}=v$, & $\frac{10dfv^3-15df^2s}{48\eta e^2}-\frac{dxv^3}{4\eta e}=t$.

IV. Horum ordinum nonnulli ex aliis etiam possunt aliter derivari: utpote in posteriori Catalogo Tertius, Quartus, Septimus et Undecimus, ab Octavo, ac Nonus à Decimo. Adeo ut omisisse potuissem, nisi quòd usui esse possint, quamvis non prorsus necessarii. Nonnullos tamen ordines omisi, quos à primo et se-

(μ) Intellige, primæ speciei primi ordinis posterioris Catalogi.

3 cundo,

cundo, nec non à nono decimoque derivaſſe potuiſſem; utpote qui denominatoribus magis compoſitis afficiuntur, & proinde vix ulli unquam uſui eſſe poſſunt. De Tabula Curvarum Secunda.

V. Si Curvæ alicujus definiens æquatio ex pluribus æquationibus diverſorum ordinum, vel diverſarum ſpecierum ejuſdem ordinis componatur, ejus aream ex areis correſpondentibus componere oportet: cavendo tamen ut ſignis + et − rectè connectantur. Nam parallelè incedentes parallelè incedentibus, et areæ correſpondentes correſpondentibus areis non ſemper ſunt ſimul addendæ, vel ſimul ſubducendæ; ſed aliquando harum ſumma, et illarum differentia ſumenda eſt pro novâ lineâ incedente, et areâ correſpondente, conſtituendâ. Et hoc fieri debet, cùm conſtituentes areæ poſitæ ſunt ad diverſam partem parallele incedentis. Ut autem hoc incommodum cauti promptiùs devitare poſſint, ſingulis arearum valoribus propria ſigna, etiamſi nonnunquam negativa, ut fit in poſterioris Catalogi tertio quartoque ordine præfixi.

VI. De arearum ſignis obſervandum eſt præterea, quod $+s$ vel denotat aream conicæ ſectionis, baſi adjacentem, eſſe reliquis quantitatibus in valore t addendam (vide Exem. 1. ſequ.) vel aream ex alterâ parte ordinatim applicatæ eſſe ſubducendam. Et contrà, $-s$ ambiguè denotat aream, baſi adjacentem, eſſe ſubducendam, vel aream, ex alterâ parte ordinatim applicatæ, eſſe addendam; prout commodum videbitur. Deinde valor ipſius t, ſi affirmativus prodierit, deſignat aream Curvæ propoſitæ adjacentem baſi ejus; et contrà, ſi fuerit negativus, deſignat aream ex alterâ parte ordinatim applicatæ.

VII. Cæterùm ut area illa certiùs definiatur, proſpiciendum eſt de limitibus ejus. Et quidem limitum ad baſin, parallelè incedentem, et Curvæ perimetrum, nulla poteſt eſſe incertitudo: ſed limes initialis, ſive principium à quo incipit deſcriptio ejus, varias poſitiones obtinet. In ſequentibus exemplis vel eſt ad initium baſis, vel ad infinitam diſtantiam; vel in concurſu Curvæ cum baſi ejus. Sed poteſt alibi locari. Et ubicunque ſit, invenies quærendo illam baſis longitudinem, ad quam valor ipſius t evadit nullus; et parallelè incedentem erigendo. Nam erecta illa linea erit limes quæſitus.

(v) Vide Analyſin per Æquationes numero terminorum infinitas, C. 11. § 6.

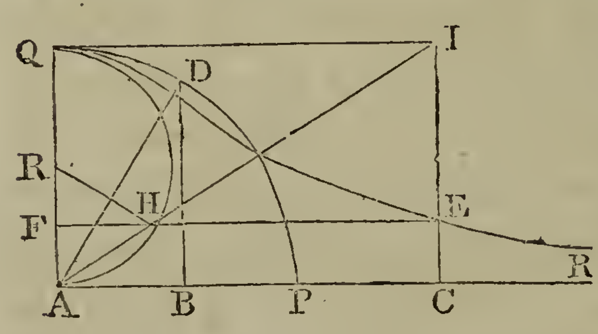
 VIII. Siqua

Caput X. VIII. Siqua pars areæ infra baſin poſita ſit, t deſignabit differentiam ejus et partis ſupra baſin.

IX. Siquando dimenſiones terminorum in valoribus x, v & t nimis altæ vel nimis depreſſæ obvenerint, ad juſtum gradum liceat reducere, dividendo vel multiplicando toties per datam quamvis quantitatem, quæ vices unitatis gerere fingitur, quoties dimenſiones illæ ſint juſto altiores, vel depreſſiores.

X. Præter præcedentes Catalogos poſſunt etiam catalogi Curvarum ad alias curvas, in ſuo genere ſimpliciſſimas, (ut ad $\sqrt{e+fx^3}^{\frac{1}{2}}=v$, vel ad $x\sqrt{e+fx^3}=v$, vel ad $\sqrt{e+fx^4}=v$, &c.) relatarum conſtrui; eò ut Curvæ cujuſlibet propoſitæ aream ex origine ſimpliciſſimâ poſſimus derivare, et cum quibus Curvis affinitatem habeat cognoſcere. Cæterùm præcedentes tandem Exemplis aliquot illuſtremus.

10. Exempl. 1. Sit QER ejuſmodi Conchoidalis, ut, ſemicirculo QHA deſcripto, et ad diametrum AQ erecto AC perpendiculo; ſi compleatur parallelogrammum QACI, et agatur diagonalis AI ſemicirculo occurrens in H, et ab H demittatur ad IC normalis HE, punctum E incidat in Curvam; et quæratur area ACEQ.



Dic itaque AQ$=a$, AC$=z$, CE$=y$; et propter continuè proportionales AI, AQ, AH, EC, erit EC, ſive y, $= \frac{a^3}{a^2+z^2}$.

Jam ut hæc induat formam æquationum in Catalogis, finge $\eta=2$, & pro z^2 in denominatore ſcribe z^η, ac $a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}$ pro a^3, ſive a^3z^{1-1}, in numeratore, et emerget $y=\frac{a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}}{a^2+z^\eta}$, æquatio primæ ſpeciei ſecundi ordinis poſterioris Catalogi; collatiſque terminis, fiet $d=a^3$, $e=a^2$ & $f=1$. Adeoque $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+z^2}}=x$, $\sqrt{a^3-a^2x^2}=v$, & $xv-2s=t$.

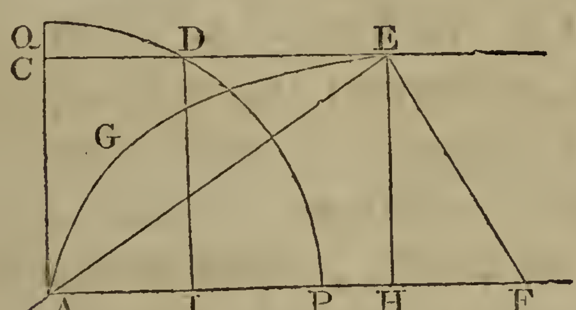
Ut autem inventi valores x & v, ad juſtum dimenſionum numerum reducantur: ſelige datam quamlibet quantitatem, velut a; per quam, tanquam unitatem, ſemel multiplicetur a^3 in valore x, et in valore v dividatur a^3 ſemel, et a^2x^2 bis; et hoc pacto obtinebis $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+x^2}}=x$, $\sqrt{a^2-x^2}=v$, & $xv-2s=t$. Quorum conſtructio eſt ejuſmodi.

Centro

Centro A intervallo AQ, defcribe quadrantem circuli QDP. In AC cape AB=AH. Erige normalem BD quadranti occurrentem in D, et age AD; et fectoris ADP duplum æquabitur areæ quæfitæ ACEQ. Eft enim $\sqrt{\frac{a^4}{a^2+z^2}}$ (= $\sqrt{AQ \times EC}$ = HA) = AB five x: et $\sqrt{a^2-x^2}$ (= $\sqrt{AD^2-AB^2}$) = BD five v; et $xv-2s=2\Delta ADB-2ABDQ$; vel etiam $=2\Delta ADB+2BDP$, hoc eft, vel $=-2QAD$, vel $=2DAP$: quorum valorum affirmativus $2DAP$ competit areæ ACEQ citra EC, et negativus $-2QAD$ competit areæ RECR, ultra EC, in infinitum protenfæ. CURVÆ CUM CONICIS COMPARANDÆ.

11. Solutiones problematum fic inventæ nonnunquam concinnari poffunt. Sic in hoc cafu, actâ RH circuli QHA femidiametro, propter arcus QH, DP æquales, erit fector QRH dimidium fectoris DAP; atque adeo pars quarta fuperficiei ACEQ. Nam fi à puncto D demittatur perpendicularis ad AQ erit ifta finus anguli QAD in quadrante QDP. Erit etiam, ob parallelas DB, QA, æqualis AB=AH chordæ ang. (ξ) Confequenter arcus QD in quadrante = arcui AH in femicirculo: unde conftat arcus QH, DP æquales effe.

12. EXEMPL. 2. Sit AGE Curva, quam normæ, AEF, punctum angulare, E, defcribit, dum crurum alterum, AE, interminatum continuò tranfit per datum punctum A, & alterum EF, datæ longitudinis, fuper rectâ AF, pofitione datâ, prolabitur. Demitte EH ad AF normalem, et comple parallelogrammum AHEC, ac dictis $AC=z$, $CE=y$, & $EF=a$, propter HF, HE, HA continuò proportionales, erit HA five $y=\frac{z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}$.



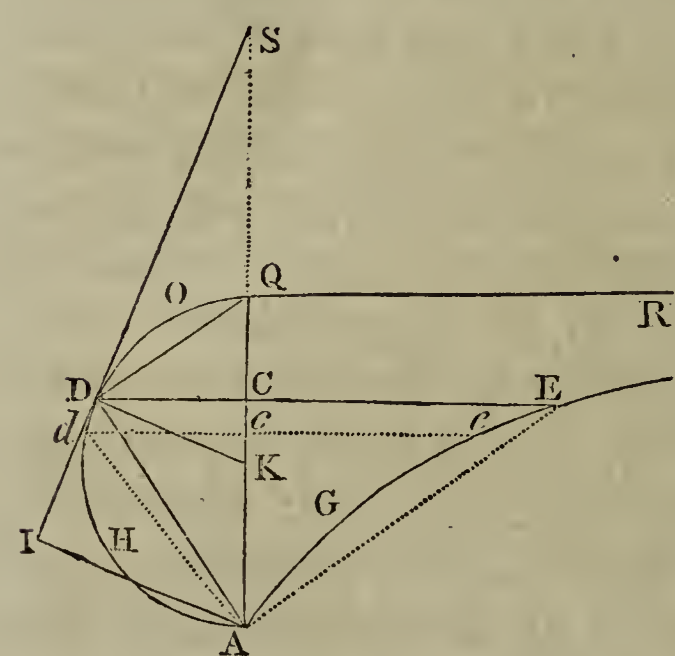
Jam ut innotefcat area AGEC, finge $z^2=z^\eta$ five $2=\eta$; et inde fiet $\frac{z^{\frac{3}{2}\eta-1}}{\sqrt{a^2-z^\eta}}=y$. Ubi cùm z fit fractæ dimenfionis in numeratore, deprime valorem y, dividendo per $z^{1\eta}$, et fiet $\frac{z^{\eta-1}}{\sqrt{a^2z^{-\eta}-1}}=y$: æquatio fecundæ fpeciei quarti ordinis pofterioris Catalogi. Ac terminis collatis evadet $d=1$, $e=-1$ et $f=a^2$. Adeoque $z^2\ (=\frac{1}{z^{-\eta}})$ $=x^2$. $\sqrt{a^2-x^2}=v$, & $s-xv=t$. Cùm itaque x et z æquentur, et fit $\sqrt{a^2-x^2}=v$, æquatio ad circulum cujus diameter eft a: centro A intervallo a, five EF, defcribatur circulus PDQ, cui occurrat CE

(ξ) Anguli QHA in femicirculo QHA.

in

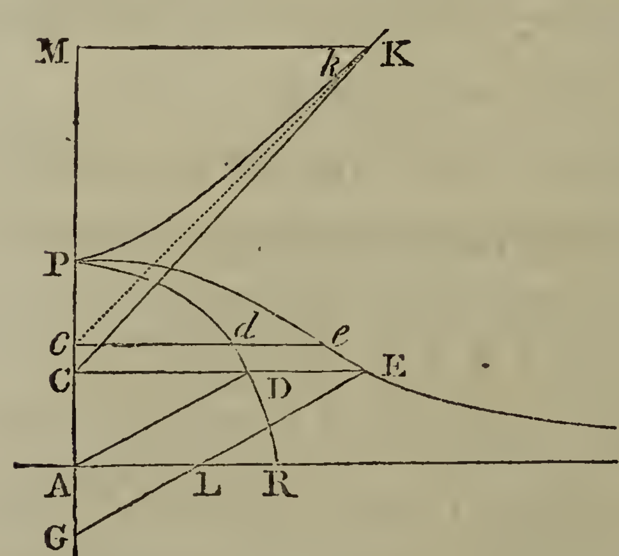
Caput X. in D, et compleatur parallelogrammum ACDI; eritque $AC=z$, $CD=v$ & area quæſita AGEC $(=s-xv=ACDP-ACDI)=IDP$.

13. Exempl. 3. Sit AGE Ciſſois, ad circulum ADQ, diametro AQ deſcriptum, pertinens. Agatur DCE diametro normalis, et Curvis occurrens in D et E. Et nominatis $AC=z$, $CE=y$, & $AQ=a$; propter CD, CA, CE continuè proportionales, erit CE, ſive $y, = \frac{zz}{\sqrt{az-zz}}$; ac dividendo per z, fit $y=\frac{z}{\sqrt{az^{-1}-1}}$. Eſt itaque $z^{-1}=z^{\eta}$ ſive $-1=\eta$; et inde $y=\frac{z^{-2\eta-1}}{\sqrt{az^{\eta}-1}}$; æquatio tertiæ ſpeciei quarti ordinis poſterioris



Catalogi. Collatiſque terminis fit $d=1$, $e=-1$, & $f=a$. Adeoque $z\ (=\frac{1}{z^{\eta}})=x$, $\sqrt{ax-xx}=v$, & $3s-2xv=t$. Quare eſt $AC=x$, $CD=v$, et inde $ACDH=s$, adeoque $3ACDH-4\Delta ADC\ (=3s-2xv=t)$ = areæ ciſſoidali ACEGA. Vel quod perinde eſt, 3 ſegment. ADHA = areæ ADEGA, ſive 4 ſegment. ADHA = areæ AHDEGA.

14. Exempl. 4. Eſto PE Prima Conchoides Veterum, centro G, aſymptoto AL, et intervallo LE deſcripta; age GAP axem ejus, ac demitte EC ordinatim applicatam: dictiſque $AC=z$, $CE=y$, $GA=b$ &, $AP=c$; propter proportionales AC : CE − AL :: GC : CE, erit CE ſive $y=\frac{b+z}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ (π). Jam ut ejus area PEC exhinc inveniatur, partes applicatæ CE, ſeorſim conſiderandæ ſunt. Et quidem ſi illa CE ita dividatur in D, ut ſit $CD=\sqrt{c^2-z^2}$, ac $DE=\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ erit CD ordinatim



applicata circuli centro A et intervallo AP deſcripti: adeoque pars areæ PDC innoteſcet, et reſtabit pars altera DPED invenienda.

Cùm

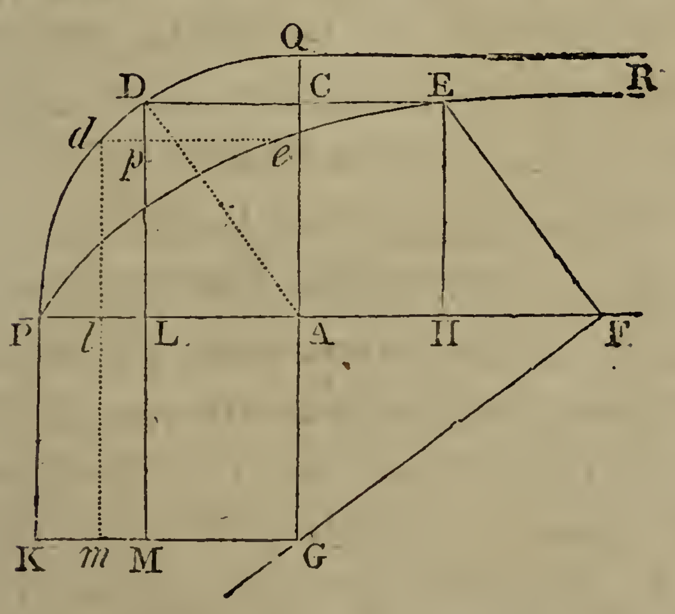
(π) Propter EL : EG = AC : CG, erit $EG=\frac{EL\times CG}{AC}$, hoc eſt $EC=c\times\frac{b+z}{z}$. Quare $EC^2=$

Cùm itaque DE (pars applicatæ quâcum deſcribitur) valeat $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ ſuppone $2=\eta$, et evadet $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^\eta}=$ DE, æquatio primæ ſpeciei tertii ordinis poſterioris Catalogi. Collatiſque terminis fiet $d=b$, $e=c^2$ et $f=-1$. Atque adeo $\frac{1}{z}=\sqrt{\frac{1}{z^\eta}}=x$; $\sqrt{-1+c^2x^2}=v$, et $2bc^2s-\frac{bv^3}{x}=t$. His inventis, redige ad juſtum dimenſionum numerum, multiplicando terminos nimis depreſſos, ac dividendo nimis altos per datam quamvis quantitatem. Id quod ſi fiet per c, prodibit $\frac{c^2}{z}=x$, $\sqrt{-c^2+x^2}=v$, et $\frac{2bs}{c}-\frac{bv^3}{cx}=t$. Et horum conſtructio eſt ejuſmodi. CURVÆ CUM CONICIS COMPARANDÆ.

Centro A, vertice principali P & parametro 2AP Hyperbolam PK deſcribe: deinde à puncto C age rectam CK quæ tangat hyperbolam in K, et erit ut AP ad 2AG ita area CKPC ad aream quæſitam DPED.

15. EXEMPL. 5. Normâ GFE ita circa polum G rotante, ut ejus punctum angulare F ſuper rectâ AF, poſitione datâ, continuò prolabatur: concipe Curvam PE à puncto quolibet E in crure EF ſito deſcribi. Jam ut inveniatur hujus area, demitte GA & EH ad rectam AF perpendiculares; et, completo parallelogrammo AHEC, dic AC$=z$, CE$=y$, AG$=b$ & EF$=c$: et propter proportionales HF:EH::AG:AF, erit AF $=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$: adeoque CE, ſive y, $=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}-\sqrt{c^2-z^2}$.

Cùm autem $\sqrt{c^2-z^2}$ ſit ordinatim applicata circuli, ſemidiametro c deſcripti circa centrum A, deſcribe talem circulum PDQ; eique CE producta occurrat in D, et erit DE $=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$; cujus æquationis ope reſtat area PDEP, vel DERQ, determinanda. Supponatur ergo $\eta=2$ et evadet DE $=\frac{bz^{\eta-1}}{\sqrt{c^2-z^\eta}}$ æquatio primæ ſpeciei quarti ordinis prioris Catalogi: et collatis terminis fiet $b=d$, $c^2=e$ & $-1=f$; adeoque $b\sqrt{c^2-z^2}\,(=-b\text{R})=t$.



EG$^2=\overline{\frac{b+z}{z}}\big|^2\times c^2$: Sed CG$^2=\overline{\frac{b+z}{z}}\big|^2\times z^2$. Quare CE$^2=$ EG$^2-$ CG$^2=\overline{\frac{b+z}{z}}\big|^2\times c^2-z^2$. Et CE $=\frac{b+z}{z}\sqrt{c^2-z^2}$.

Jam

CAPUT X. Jam cùm valor t negativus exiſtat, et inde area per t deſignata jaceat ultra lineam DE, ut ejus limes initialis inveniatur, quære illam ipſius z longitudinem, quâ t evadit nulla: et invenies eſſe c. Quare produc AC ad Q ut ſit $AQ=c$, et erige applicatam QR, et erit DQRED area illa cujus valor jam inventus eſt $=-b\sqrt{c^2-z^2}$. Quòd ſi quantitatem areæ PDE juxta baſin AC poſitæ, et cum eâ coextenſæ deſideres, poſſis, ignoto limite QR, ſic determinare. A valore quem t ad baſis longitudinem AC ſortita eſt, ſubduc valorem ejus ad initium baſis hoc eſt, $a-b\sqrt{c^2-z^2}$ ſubduc $-bc$, et proveniet quantitas $bc-b\sqrt{c^2-z^2}$ quam quæris. Comple ergo parallelogrammum PAGK, et ad AP demitte normalem DM, quæ cum GK occurrat in M, et erit parallelogrammum PMNK æquale areæ PDE.

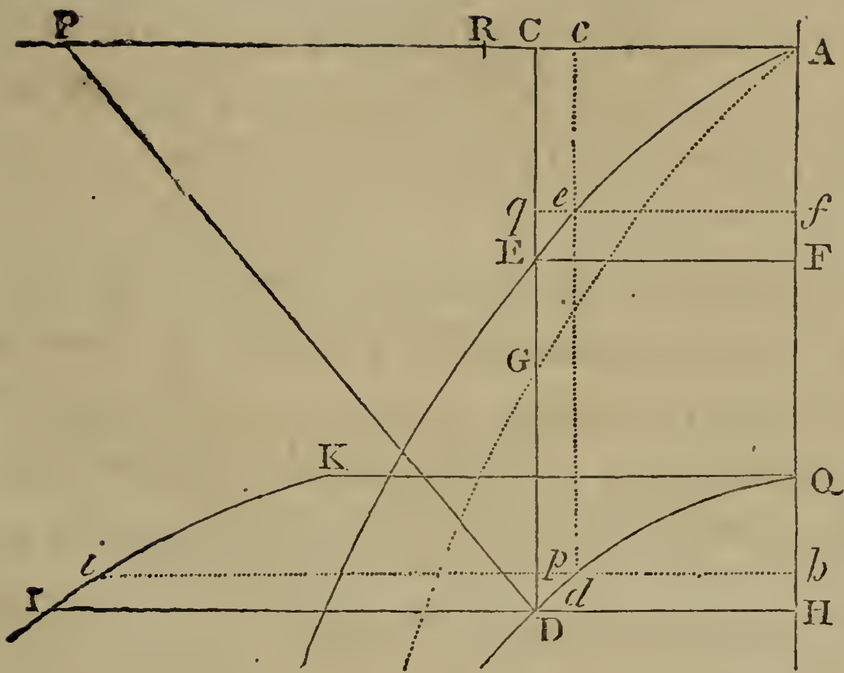
16. Siquando æquatio Curvam aliquam definiens non reperiatur in Catalogis, neque ad ſimpliciores terminos ope diviſionis, vel alio pacto, reduci poſſit, transformanda eſt in alias affinium Curvarum æquationes, pro more in Prob. VIII. oſtenſo; donec tandem obvenerit aliqua, cujus area ex catalogis innoteſcat. Et conatibus omnimodò inſtitutis, ſi nulla talis obveniat, certum eſt Curvam propoſitam neque cum figuris rectilineis, neque cum conicis ſectionibus, comparari poſſe.

17. AD eundem modum cùm de Curvis Mechanicis agitur, illæ imprimis transformandæ ſunt in æquales Geometricas, prout in eodem Prob. VIII. oſtenſum fuit, ac deinde Geometricarum areæ ex Catalogis eliciendæ. Cujus rei accipe ſequens exemplum.

18. EXEMPL. 6. Proponatur figura arcuum cujuſvis conicæ ſectionis ad ſinus rectos applicatorum determinanda. Utpote ſit A centrum conicæ ſectionis, AQ et AR ſemiaxes, CD ordinatim applicata ad axem AR, et PD perpendiculum ad punctum D. Sit etiam AE dicta figura mechanica occurrens CD in E, et ex ejus naturâ præfinita erit CE= arcui QD. Quæritur itaque area AEC, vel parallelogrammo ACEF completo, quæritur exceſſus AEF. In quem finem ſit a latus rectum conicæ ſectionis et b latus tranſverſum ſive 2AQ; ſit etiam $AC=z$ & $CD=y$ eritque $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}=y$

(o) Hamilton. Conic. Lib. 2. Prop. XXIV.

æquatio



æquatio ad conicam sectionem, ut notum est. Erit etiam PC $= \frac{b}{a}z$ (°) et inde PD $= \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2}z^2}$. *Curvæ cum Conicis comparandæ.*

Atque adeo cùm sit fluxio arcûs QD ad fluxionem basis AC, ut PD ad CD, si fluxio basis supponatur 1, erit arcûs illius QD sive applicatæ CE fluxio $= \sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}z^2}}$. Hanc duc in FE, sive z, et proveniet $z\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{aa}z^2}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}z^2}}$ fluxio areæ AEF; adeoque si in applicatâ DC capias CG $= z\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}z^2}}$, area AGC, quam illa CG super AC incedens describet, æquabitur areæ AEF; et erit AG Curva Geometrica. Quæritur itaque area AGC. Et in hunc finem substituatur z^η pro z^2 in æquatione novissimâ, et evadet $z^{\eta-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2}z^\eta}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}z^\eta}}$ = CG; æquatio secundæ speciei undecimi ordinis posterioris Catalogi. Et collatis utrobique terminis, fit $d=1$, $e=\frac{1}{4}b^2=g$, $f=\frac{b^2+ab}{a^2}$, et $h=\frac{b}{a}$; adeoque $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}=x$ et $\sqrt{-\frac{b^3}{4a}+\frac{a+b}{a}x^2}=v$ & $\frac{a}{b}s=t$. Hoc est CD$=x$, DP$=v$ et $\frac{a}{b}s=t$. Et inventorum talis est constructio.

Ad Q erige QK perpendicularem et æqualem QA, et huic parallelam, æqualem verò DP, age HI per punctum D. Et linea KI, in quam HI terminatur, erit sectio conica, areaque comprehensa HIKQ ad aream quæsitam AEF, ut b ad a, sive ut PC ad AC.

19. Nota

CAPUT X. 19. Nota si mutes signum b, sectio conica cujus arcui recta CG æquatur, evadet Ellipsis: et præterea si fiat $b=-a$ Ellipsis evadet Circulus: in quo casu linea KI sit recta parallela AQ.

20. POSTQUAM Curvæ alicujus area sic inventa fuerit, de constructionis demonstratione consulendum est, quâcum sine computo algebraico, quantùm liceat, contextâ ornetur Theorema, ut evadat publicæ notitiæ dignum ([e]). Estque demonstrandi methodus generalis, quam sequentibus exemplis illustrare conabor.

21. *Demonstratio constructionis in Exemplo* 5.

In arcu PQ (vide fig. p. 493.) sume punctum d proximum ad D, et age dc ac dm parallelas DE ac DM, et occurrentes DM et AP in p et l: et erit DEed momentum areæ PDEP, et LMml momentum areæ LMKP. Age semidiametrum AD, et concipe indefinitè exiguum arcum Dd esse instar rectæ, et triangula Dpd et ALD erunt similia: adeoque Dp : pd : : AL : LD. Est autem HF : EH : : AG : AF; hoc est, AL : LD : : ML, DE. Et proinde Dp : pd : : ML : DE. Quare Dp × DE $= pd$ × ML. Hoc est, momentum DEed æquale momento LMml. Et cùm hoc de quibuslibet contemporaneis momentis indeterminatè demonstratur, patet singula momenta areæ DPEP esse singulis contemporaneis momentis areæ PLMK æqualia, adeoque totas areas ex istis momentis compositas æquari. Q. E. D.

22. *Demonstratio constructionis in Exemplo* 3.

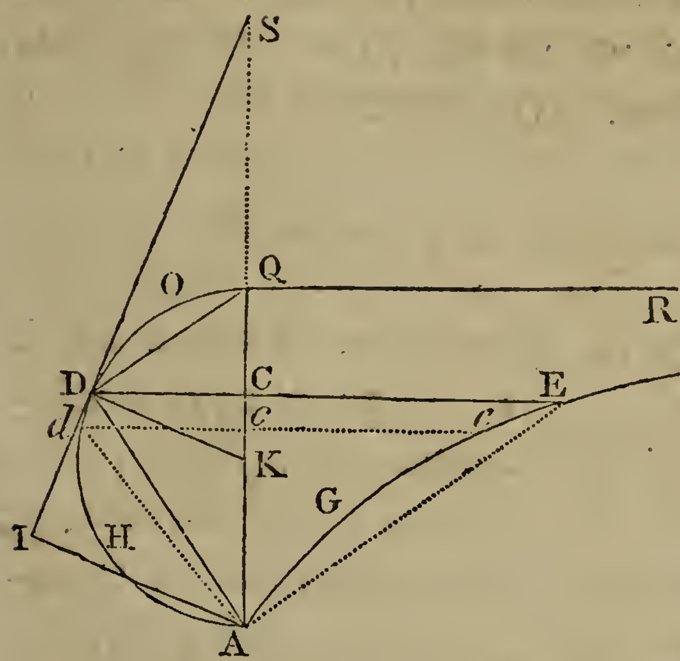
Esto DEed momentum superficiei AHDE ac AdDA contemporaneum

([e]) " Et verò non omnis effectio geometrica concinna est. Singula enim Problemata suas habent elegantias: verùm ea cæteris antefertur, quæ compositionem operis non ex æqualitate, sed æqualitatem ex compositione arguit, et demonstrat; ipsa verò se ipsam. Itaque artifex Geometra, quanquam analyticam edoctus, illud dissimulat; & tanquam de opere efficiundo cogitans profert suum syntheticum problema, et explicat: deinde, Logistis auxiliaturus, de proportione vel æqualitate in eo agnitâ concipit et demonstrat Theorema." *Vieta. Isagog. Cap.* VII. *De Officio Rhetices.*

" Monemus tantùm Viros Clarissimos, ut, sepositis tantisper speciebus analyseos, problemata Geometrica viâ Euclideanâ et Apollonianâ exequantur; ne pereat paulatim elegantia et construendi et demonstrandi, cui præcipuè operam dedisse Veteres innuunt satis et Data Euclidis, & alii à Pappo enumerati Analyseos Libri." *Fermatius in Epistolâ quâdam suâ ad Kenelm Digby*, quæ septima est â quadragesimâ in Commercio Epistolico Wallisii.

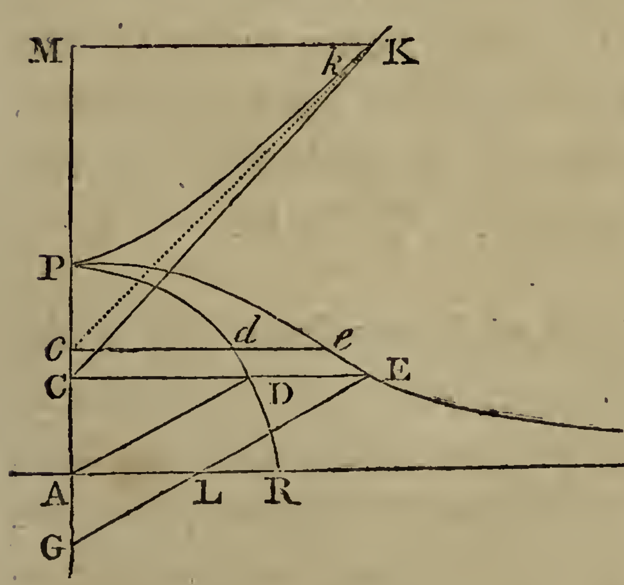
4 poraneum

poraneum momentum ſegmenti ADH. Age ſemidiametrum DE COMPONENDIS DEMONSTRATIONIBUS.



DK, et *de* occurrat AQ in *c*, eritque C*c* : D*d* : : DC : DK (σ). Præterea eſt DC : QA (2DK) : : AC : DE (τ). Adeoque C*c* : 2D*d* (: : DC : 2DK) : : AC : DE; et C*c* × DE = 2D*d* × AC. Jam ad peripheriæ momentum D*d* rectâ productum, i. e. ad tangentem circuli, demitte normalem AI, et erit AI æqualis AC (υ), adeoque 2D*d* × AC = 2D*d* × AI = 4 triangulis AD*d*. Quare 4 triang. AD*d* = C*c* × DE = momento DE*ed*. Spatii ergo AHDE ſingula momenta ſunt quadrupla momentorum contemporaneorum ſegmenti ADH, et proinde totum illud ſpatium quadruplum totius ſegmenti. Q. E. D.

23. *Demonſtratio conſtructionis in Exemplo* 4.



Parallelam CE age indefinitè parùm diſtantem *ce*, et hyperbolæ tangentem C*k*, ac demitte KM rectam ad AP: et ex Hyperbolæ naturâ erit AC : AP : : AP : AM (φ). Adeoque AG^q : GL^q (: : AC^q : LE^q ſive AP^q) : : AP^q : AM^q : ac diviſim AG^q : AL^q (DE^q) : : AP^q : AM^q − AP^q (MK^q) et inverſè (χ) AG : AP : : DE : MK. Eſt autem areola DE*ed* ad triangulum

(σ) Excerpt. ex Epiſt. not. (k) § 5.

(τ) E naturâ Ciſſoideos QC : CD = CA : CE. Quare QA : DE = QC : CD. (El. v. 12.) Sed propter angulos QDA, QCD rectos, QC : CD = CD : CA. Quare QA : DE = CD : AC. (El. v. 11.) Permutando QA : CD = DE : AC. Invertendo CD : QA = AC : DE.

(υ) Namque angulus ADI angulo AQD æqualis eſt (El. III. 32.) et angulus AQD æqualis eſt angulo ADC. (El. VI. 8.) Anguli igitur ADI, ADC inter ſe æquales ſunt. Sed et ACD, AID inter ſe æquales. Rectus enim uterque. Et triangulis ADC, AID latus AD eſt commune. Quare et reliqua eorum latera ſingulatim inter ſe æqualia erunt; eà nempe lege, ut æqualia latera æqualibus angulis obverſa ſint. (El. I. 26.) Quare latera AI, AC inter ſe æqualia. Q. E. D.

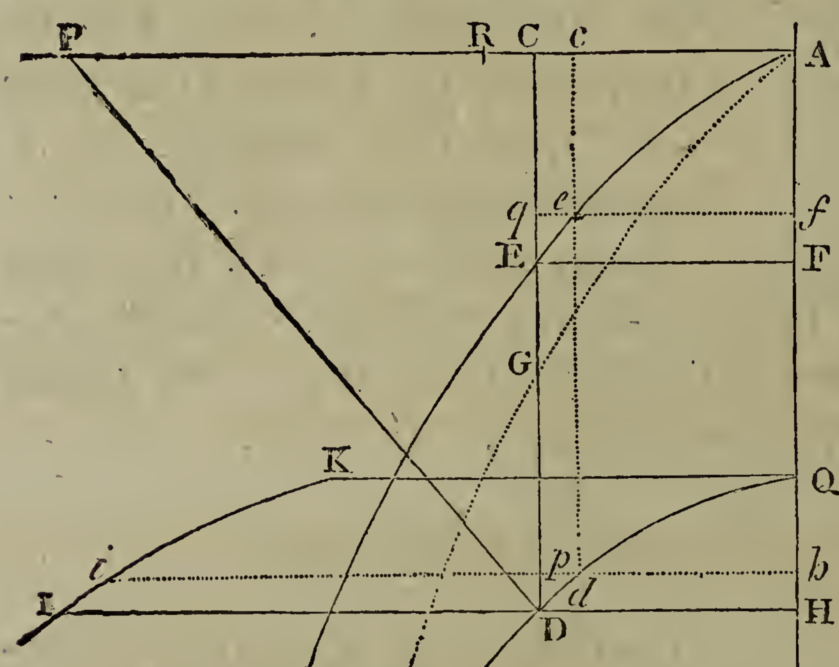
(φ) Hamilton. Conic. I. 49.

(χ) *Permutando* potiùs.

CAPUT X. CKc, ut altitudo DE ad femiffem altitudinis KM : hoc eft, ut AG ad $\frac{1}{2}$AP. Quare omnia fpatii PDE momenta ad omnia contemporanea momenta fpatii PKC funt ut AG ad $\frac{1}{2}$AP. Et proinde tota illa fpatia funt in eâdem ratione. Q. E. D.

24. *Demonftratio conftructionis in Exemplo* 6.

Parallelam & proximam CD age cd occurrentem Curvæ AE in e. Age hi et fe occurrentes DC in p et q. Et erit ex hypothefi Dd=Eq: et ex fimilitudine triangulorum Dpd, DCP, erit Dp : Dd(Eq) : : CP : PD(HI); Adeoque Dp × HI = Eq × CP ; et inde Dp × HI (moment. HIib) : Eq × AC (moment. EFfe) : : Eq × CP : Eq × AC : : CP : AC. Quare cùm PC et AC fint in datâ ratione lateris tranfverfi ad latus rectum conicæ fectionis QD(ψ), et arearum HIKQ et AEF momenta, HIib et EFfe, in illâ ratione, erunt ipfæ areæ in eâdem ratione. Q. E. D.



25. In hujufmodi demonftrationibus obfervandum eft, quòd quantitates pro æqualibus habeo, quarum ratio eft æqualitatis. Et ratio æqualitatis cenfenda eft, quæ minùs differt ab æqualitate quàm quælibet inæqualis ratio poteft affignari. Sic in poftremâ demonftratione, pofui rectangulum Eq × AC five FEqf æquale fpatio FEef; quia, propter differentiam Eqe infinitè minorem ipfis, five refpectu

(ψ) Hamilton Conic. (ω) Indivifibilium.

(αα) Et per § 4. Introduct. ad Quadrat. Curv.

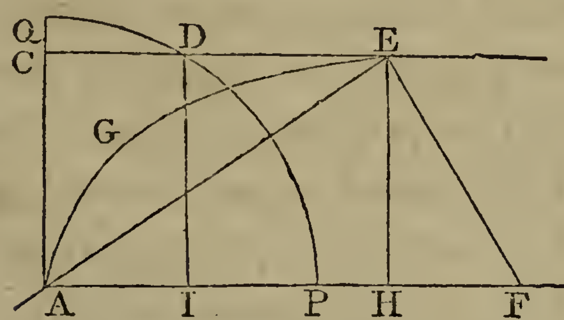
(ββ) Junctâ enim AD, cùm triangula duo rectangularia, AID, FHE, hypotenufas AD, FE inter fe æquales habeant, necnon latera EH, ID inter fe æqualia, erunt et tertia eorundem latera AI, HF inter fe æqualia. Quare FH : HE = AI : ID. Sed propter angulos AEF, AHE rectos, FH : HE = HE : AH vel CE. (El. VI. 8.) Quare AI : ID = HE vel ID : CE.

(γγ) NIMIRUM ad demonftrationes ex fluxionum doctrinâ componendas nil conferunt lineæ illæ

refpectu ipfarum nullam, non habent rationem inæqualitatis. Et eâdem de caufâ, pofui Dp × HI = HIib, et fic in aliis.

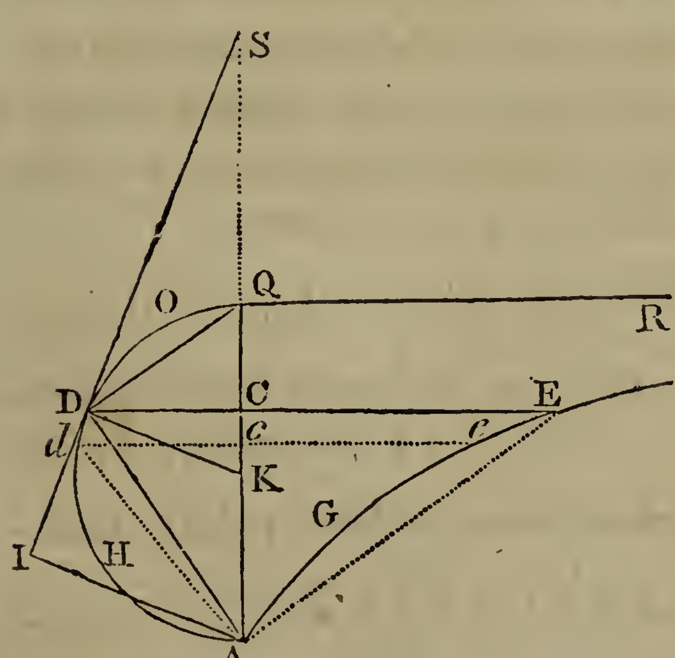
De Componendis Demonstrationibus.

26. Hâc methodo probandi Curvas, per æqualitatem vel datam rationem momentorum, æquales effe, vel datam rationem habere, hîc ufus fum, quòd cum methodis in his rebus ufitatis (^{u}) affinitatem habeat. Sed magis naturalis videtur, quæ genefi fuperficierum ex fluendi motu innititur. Sic fi conftructio in



Exemplo 2, demonftranda fit: Ex naturâ circuli ($^{\alpha\alpha}$) eft fluxio rectæ ID ad fluxionem rectæ IP ut AI ad ID: eftque AI : ID : : ID : CE, ex naturâ curvæ AGE (^{66}). Et proinde CE × flux. ID = ID × flux. IP. Sed CE × flux. ID = fluxioni areæ ACEG; et ID × flux. IP = fluxioni areæ PDI. Et propterea areæ illæ, æqualiter fluendo genitæ, æquales erunt. Q. E. D.

27. Plenioris illuftrationis gratiâ, adjiciam demonftrationem conftructionis, quâ Ciffoidis area in Exemplo 3, determinatur.



Lineæ punctis notatæ in fchemate deleantur ($^{\gamma\gamma}$), et agatur DQ, et Ciffoidis afymptotos QR. Et ex naturâ circuli, eft DQ^q = AQ × CQ. Et inde per Prob. 1. 2DQ × flux. ipfius DQ = AQ × flux. CQ. Adeoque AQ : DQ = 2 flux. DQ : flux. CQ. Eft et ex naturâ Ciffoidis ED : AD = AQ : DQ ($^{\delta\delta}$). Quare ED : AD : : 2 flux. DQ : flux. CQ. Et ED × flux. CQ = AD × 2 flux. DQ, five 4 × $\frac{1}{2}$ AD × flux. DQ. Jam cùm DQ perpendicularis fit ad terminum ipfius AD

illæ viciniffimæ, fine quibus nihil unquam moliri aufa eft *Indivifibilium*, quæ dicitur, Geometria. Meliùs autem fine illis rem agi, cùm ex illis demonftrationibus, quæ in notis noftris ad quartum Excerptorum ex Epiftolis pofuimus, fatis pateat, tum plurimarum exemplis, quas ad varia PRINCIPIORUM loca brevi proferemus, clariùs etiam elucefcet.

($\delta\delta$) Nam è naturâ Ciffoidis CE : CA = CA : CD. Junctâ igitur EA, angulus EAD rectus erit. Atque idcirco ED : DA = DA : DC. (El. VI. 8.) Sed propter angulos ADQ, ACD rectos DA : DC = AQ : QD. (El. VI. 8.) Quare ED : DA = AQ : QD.

CAPUT X. circa A gyrantis, eſt $\frac{1}{2}$ AD × flux. DQ = fluxioni generanti aream ADOQ. Eſt et ejus quadruplum, ED × flux. CQ, = fluxioni generanti ciſſoidalem aream QREDO. Et proinde area illa infinitè longa QREDO generatur quadrupla alterius ADOQ. Q. E. D.

SCHOLIUM.

28. Per præcedentes Catalogos non tantùm areæ Curvarum, ſed et aliæ cujuſcunque generis quantitates, analogâ fluendi ratione generatæ, è fluxionibus derivari poſſunt. Idque mediante hoc Theoremate. *Quòd quantitas cujuſcunque generis ſit ad unitatem congeneram, ut area curvæ ad unitatem ſuperficialem; ſi modò fluxio quantitatem illam generans ſit ad unitatem ſui generis, ut fluxio generans aream ad unitatem ſui generis; hoc eſt ut linea ſuper baſi normaliter incedens, quâ area illa deſcribitur, ad unitatem linearem.* Et proinde ſi fluxio qualiſcunque exponatur per ejuſmodi lineam incedentem, quantitas, ab illâ fluxione generata, exponetur per aream ab illâ incedente deſcriptam. Vel ſi fluxio per eoſdem terminos algebraicos cum incedente lineâ exponatur, quantitas generata exponetur per eoſdem cum areâ deſcriptâ. Æquatio itaque, quæ fluxionem cujuſcunque generis exhibet, quærenda eſt in primâ columnâ Catalogorum, et valor t, in ultimâ columnâ, indicabit quantitatem generatam.

29. Quemadmodum ſi $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ fluxionem cujuſcunque generis exhibeat, pone æqualem y; et ut ad formam æquationum in Catalogis reducatur, ſubſtitue z^{η} pro z: ſic enim evadet $z^{\eta-1}\sqrt{1+\frac{9z^{\eta}}{4a}}=y$, æquatio primæ ſpeciei tertii ordinis prioris Catalogi. Et collatis terminis, fiet $d=1$; $e=1$; $f=\frac{9}{4a}$: et inde $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}\ (=\frac{2d}{3\eta f}\,R^3)=t$. Eſt itaque $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ quantitas, quæ generatur fluxione $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$.

30. Atque ita ſi $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ deſignet fluxionem, per debitam reductionem (extrahendo $z^{\frac{2}{3}}$ è radicali, et ſcribendo z^{η} pro $z^{-\frac{2}{3}}$)

5 habebitur

habebitur $\frac{1}{z^{n+1}}\sqrt{z^n + \frac{16}{9a^{\frac{3}{2}}}} = y$, æquatio fecundæ fpeciei tertii ordinis pofterioris Catalogi. Et collatis terminis fit $d = 1$; $e = \frac{16}{9a^{\frac{3}{2}}}$; et $f = 1$. Adeoque $z^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{z^n} = xx$; $\sqrt{1 + \frac{16xx}{9a^{\frac{3}{2}}}} = v$; et $3s = \frac{-2d}{n}s = t$. De Usu Catalogorum.

Quibus inventis, quantitas per fluxionem $\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{3}{2}}}}$ generata innotefcet, ponendo effe ad unitatem fui generis ut area $3s$ ad unitatem fuperficialem. Vel quod eodem recidit, ponendo quantitatem t non ampliùs fuperficiem fignificare, fed alterius generis quantitatem, quæ eft ad unitatem ejufdem generis ut fuperficies illa ad unitatem fuperficialem. Sic pofito quòd $\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ defignet fluxionem linearem, imaginor t non ampliùs fuperficiem fed lineam jam fignificare; eam nempe, quæ ad unitatem linearem eft ut area, quam t juxta Catalogos defignat, ad unitatem fuperficialem; hoc eft, eam quæ producitur applicando aream illam ad linearem unitatem. Quâ ratione, fi linearis unitas ftatuatur e, longitudo, per præfatam fluxionem generata, erit $\frac{3s}{e}$. Et hoc fundamento Catalogi illi, ad longitudines Curvarum, contenta Solidorum, et alias quafcunque quantitates, æquè ac areas Curvarum, determinandas, applicari poffunt.

CAPUT XI.

De Quæftionibus cognatis.

SECT. I.

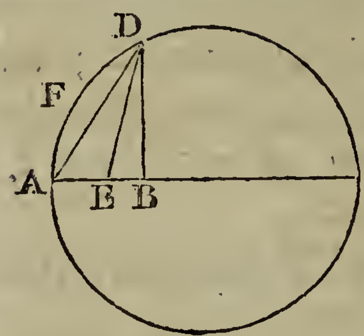
Curvarum areas per Mechanicam approximare [u]

1. METHODUS eft, ut duarum pluriumve rectilinearum figurarum valores ita componantur inter fe, ut valorem areæ Curvæ quàm proximè conftituant. Sic ad circulum AFD quem æquatio $x - xx = rr$ defignat, poftquam inventus eft areæ AFDB valor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quærendi funt aliquot rectangnlorum valores, Constructiones Mechanicæ.

(u) Vide Excerpt. IV. fub fin.

quales

Caput XI. quales sunt ipsius BD × AB valor $x\sqrt{x-xx}$, sive $x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}}$ &c. ac ipsius AD × AB valor $x\sqrt{x}$, sive $x^{\frac{3}{2}}$. Dein hi valores per literas quaslibet diversas, quæ numeros indefinitè designent, multiplicandi sunt et addendi; summæque termini cum correspondentibus terminis valoris areæ AFDB comparandi; ut quantùm liceat evadant æquales.



Quemadmodum si per e & f multiplicentur, fiet summa $\begin{matrix} e \\ +f \end{matrix} x^{\frac{3}{2}} - \frac{e}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{e}{8}x^{\frac{7}{2}}$ &c; cujus terminis cum terminis hisce $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ &c. collatis, prodit $e+f=\frac{2}{3}$; et $-\frac{e}{2}=-\frac{1}{5}$; sive $e=\frac{2}{5}$, et $f=\frac{2}{3}-e=\frac{4}{15}$. Adeoque est $\frac{2}{5}$BD × AB + $\frac{4}{15}$AD × AB = areæ AFDB proximè. Scilicet $\frac{2}{5}$BD × AB + $\frac{4}{15}$AD × AB valet $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}}$ &c. quod ab areâ AFDB subductum relinquit solummodò errorem $\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{90}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

2. Sic bisectâ AB in E, rectanguli AB × DE valor erit $x\sqrt{x-\frac{3}{4}xx}$, sive $x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{9}{128}x^{\frac{7}{2}}-\frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et hoc collatum cum rectangulo AD × AB dat $\frac{8\text{DE}+2\text{AD}}{15}$ × AB = areæ AFDB, errore tantùm existente $\frac{1}{560}x^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{5760}x^{\frac{9}{2}}$ &c. qui semper minor est quàm $\frac{1}{1500}$ totius areæ, etiamsi AFDB ponatur quadrans circuli. Hoc autem Theorema sic enunciari potest. *Ut* 3 *ad* 2 *ita rectangulum* AB *in* DE *plus quintâ parte differentiæ inter* AD *ac* DE *ad aream* AFDB *proximè.*

3. Atque ita conferendo duo rectangula AB × ED et AB × BD, vel omnia tria rectangula inter se, vel adhibendo adhuc alia rectangula, possunt aliæ regulæ excogitari, eæque tanto exactiores quo plura rectangula adhibentur. Et idem de areâ Hyperbolæ ac aliarum Curvarum intelligendum est. Imo et per unicum tantùm rectangulum area plerumque commodè exhiberi potest: ut in prædicto Circulo, si capiatur AE ad AB ut $\sqrt{10}$ ad 5, rectangulum AB × ED erit ad aream AFDB ut 3 ad 2, errore tantùm existente $\frac{1}{175}x^{\frac{7}{2}}+\frac{11}{2250}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

SECT. II.

Ex Datâ Areâ, Basem et Incedentem Lineam determinare (ζζ).

1. Ubi area per finitam æquationem exhibetur, nihil occurrit

(ζζ) Vide Analyf. per Æquat. Infinit. C. VII. Sect. 1.

diffi-

difficultatis. Ubi verò per infinitam exhibetur, affecta radix extrahenda est, quæ basem designat. Sic ad Hyperbolam, quam æquatio $\frac{ab}{a+x}=y$ designat; postquam inventum est $z=bx-\frac{bxx}{2a}+\frac{bx^3}{3aa}$ &c. ut ex datâ areâ, z, vicissim innotescat basis, x, extrahe radicem affectam, et proveniet $x=\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^3}+\frac{z^4}{24a^3b^4}+\frac{z^5}{96a^4b^5}$ &c. Et præterea si incedens, y, desideretur; divide ab per $a+x$, hoc est per $a+\frac{z}{b}+\frac{zz}{2abb}+\frac{z^3}{6aab^2}$ &c. et emerget $y=b-\frac{z}{a}+\frac{zz}{2aab}-\frac{z^3}{6a^3bb}+\frac{z^4}{24a^4b^3}$ &c. Basis ex Area.

2. Sic ad Ellipsin, quam æquatio $ax-\frac{a}{c}xx=yy$ designat; postquam inventa fuerit area $z=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c}-\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{28cc}-\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{72c^3}$ &c. scribe v^3 pro $\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, ac t pro $x^{\frac{1}{2}}$, et evadet $v^3=t^3-\frac{3t^5}{10c}-\frac{3t^7}{56cc}-\frac{t^9}{48c^3}$ &c. Et, extractâ radice, $t=v+\frac{v^3}{10c}+\frac{81v^5}{1400cc}+\frac{1171v^7}{25200c^3}$ &c. Cujus quadratum, $vv+\frac{v^4}{5c}+\frac{22v^6}{175cc}+\frac{823v^8}{7875c^3}$ &c. valet x. Et hoc valore pro x in æquatione, $ax-\frac{a}{c}xx=yy$, substituto, et extractâ radice, proveniet $y=a^{\frac{1}{2}}v-\frac{2a^{\frac{1}{2}}v^3}{5c}-\frac{38a^{\frac{1}{2}}v^5}{175cc}-\frac{407a^{\frac{1}{2}}v^7}{2250c^3}$ &c. Adeoque ex datâ areâ z, et inde v, sive $\sqrt{\text{cub.}}\,\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, dabitur Basis x et Incedens y. Quæ omnia ad Hyperbolam etiam accommodantur, si modò signum quantitatis c ubique mutetur, ubi existit imparium dimensionum.

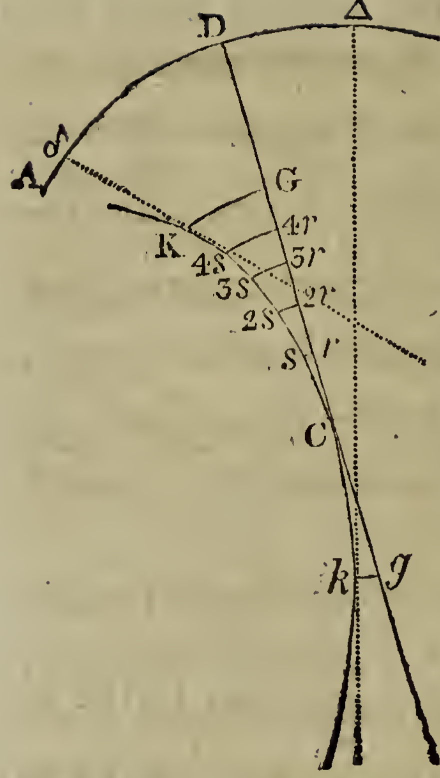
CAPUT XII.

PROBLEMA X.

Curvas pro arbitrio multas invenire, quarum Longitudines per finitas Æquationes designari possunt.

AD hujus resolutionem via per sequentes positiones sternitur.

1. Si recta DC, in Curvam quamvis AD perpendiculariter insistens, moveri concipiatur; singula ejus puncta G, g, r, &c. describent



describent alias æquidiſtantes ſibique perpendiculares curvas GK, gk, rs, &c.

2. Si recta illa hinc inde indefinitè producatur, ejus extremitates movebuntur ad contrarias plagas; et punctum quod diſtinguit inter contrarios motus, quodque ideo dici poteſt centrum Motionis, idem eſt cum centro Curvaturæ, quam Curva AD habet ad punctum D, ut ſuprà diximus. Iſtud autem punctum eſto C.

3. Si lineam AD non circularem eſſe, ſed difformiter incurvatam ſupponamus, puta magis curvam in δ, et minùs in Δ; illud centrum continuò mutabitur, propiùs accedens ad partes magis curvas, ut in K, et longiùs recedens à partibus minùs curvis, ut in k: eoque pacto lineam aliquam, qualis K C k, deſcribet.

4. Hanc à centro Curvaturæ deſcriptam lineam recta DC continuò tanget. Nam ſi rectæ illius punctum D moveat verſus δ, ejus punctum G, quod interea tranſit ad K et ſitum eſt ad eandem partem centri C, movebit verſus eandem plagam (per poſitionem ſecundam). Deinde ſi idem D moveat verſus Δ, punctum g, quod interea tranſit ad k, et ſitum eſt ad contrariam partem centri C, movebit ad contrariam, hoc eſt ad eandem plagam ad quam G in priori caſu movebat, dum tranſit ad K. Et proinde K et k jacent ad eandem partem rectæ DC. Quare cùm K et k indeterminatè pro quibuſlibet punctis ſumantur, patet totam illam Curvam jacere ad eandem partem rectæ DC, proindeque ab illâ non ſecari, ſed tangi tantùm.

Hîc ſupponitur lineam δDΔ magis curvam eſſe à parte δ continuò, et minùs à parte Δ. Quòd ſi maxima minimave Curvatura fuerit ad ipſum D, tunc recta DC ſecabit curvam KC, ſed in angulo tamen qui ſit quovis rectilineo minor: quod perinde eſt ac ſi tangere dicatur. Imo punctum C, in hoc caſu, terminus eſt inſtar cuſpidis, ad quem partes Curvæ, obliquiſſimo concurſu deſinentes, ſe mutuò contingunt; proindeque à rectâ DC, quæ angulum illum contactûs dividit, rectiùs dicatur tangi quàm ſecari.

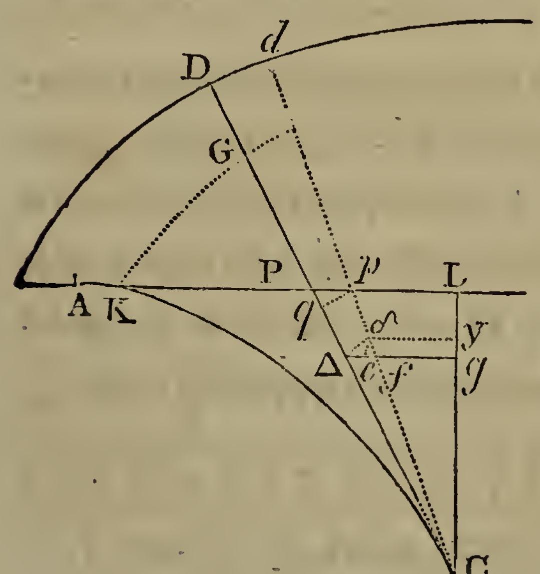
5. Recta CG æquatur Curvæ CK. Nam concipe rectæ illius ſingula

singula puncta r, $2r$, $3r$, $4r$, &c. describere Curvarum arcus rs, $2r2s$, $3r3s$, &c. interea dum per motum rectæ illius accedant ad Curvam CK; et arcus illi, cùm (per positionem primam) sint perpendiculares ad rectas quæ (per posit. 4.) tangunt Curvam CK, erunt etiam perpendiculares ad Curvam illam. Quare partes istius CK, inter arcus illos interjectæ, quæ propter infinitam parvitatem pro rectis haberi possint, æquantur intervallis eorundem arcuum, hoc est (per posit. 1) totidem partibus rectæ CG. Et, additis utrinque æqualibus, tota CK æquabitur toti CG.

Inventio CURVARUM quæ Εὐθύνσεως sint capaces.

6. Idem constare potest, imaginando singulas partes rectæ CG, inter movendum, successivè applicari ad singulas partes Curvæ CK, easque mensurare: perinde ut rotæ, super planum per gyros promoventis, circumferentia distantiam metitur, quam punctum contactûs transigit.

7. Ex his pateat Problema resolvi posse, assumendo pro lubitu Curvam quamvis $A\delta D\Delta$, et inde determinando alteram Curvam KCk, in quâ assumptæ centrum curvaturæ versatur.



Ad rectam itaque quamvis positione datam, AB, demissis perpendiculis, DB, CL, et in AB sumpto quovis puncto A, dictisque $AB=x$, et $BD=y$, pro Curvâ AD definiendâ assumatur relatio quævis inter x et y, et inde (per Prob. v.) elicietur punctum C, quo et Curva CK et ejus longitudo GC determinatur.

8. Exempl. Sit $ax=y^2$ æquatio ad Curvam AD, Parabolam nempe Apollonianam. Et per Prob. v. invenientur $AL=\frac{1}{2}a+3x$, $CL=\frac{4y^3}{aa}$, ac $DC=\frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2+ax}$. Quibus habitis, Curva KC determinatur per AL ac LC, et longitudo ejus per DC: utpote cùm liberum sit ubivis in Curvâ KC assumere puncta K & C, supponamis K esse centrum curvaturæ Parabolæ ad verticem; et positis perinde AB & BD, seu x & y, nullis, evadit $DC=\frac{1}{2}a$: estque hæc longitudo AK, vel DG, quæ, subducta à superiori indefinito valore DC, relinquit GC, seu $KC,=\frac{a+4x}{a}\sqrt{\frac{1}{4}a^2+ax}-\frac{1}{2}a$.

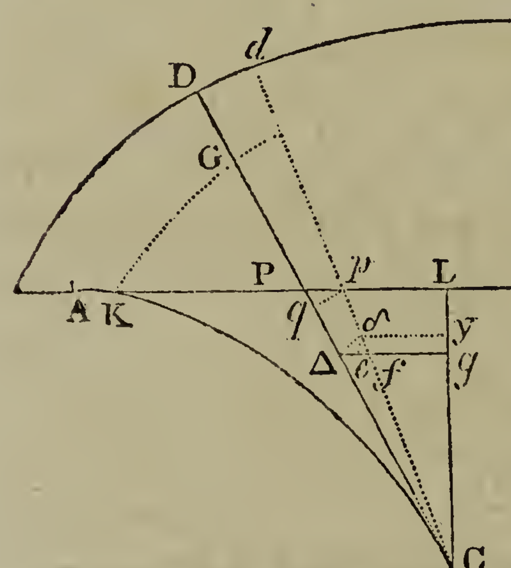
9. Jam si qualis sit hæc Curva, quantaque ejus longitudo, non

 amplius

Caput XII amplius habitâ ratione ad Parabolam, ſcire deſideratur: dic KL$=z$, et LC$=v$; et erit $z=(\mathrm{AL}-\frac{1}{2}a)=3x$; ſeu $\frac{1}{3}z=x$, et $\frac{az}{3}\,(=ax)=y^2$; adeoque $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}}\,(=\frac{4y^3}{aa}=\mathrm{CL})=v$, ſive $\frac{16z^3}{27a}=v^2$. Quod indicat Curvam KC eſſe Parabolam ſecundi generis. Et pro ejus longitudine prodit $\frac{3a+4z}{3a}\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{3}az}-\frac{1}{2}a$, ſcribendo $\frac{1}{3}z$ pro x in valore CG.

9. Poteſt etiam Problema reſolvi per aſſumptionem æquationis, quæ relationem inter AP et PD (poſitâ nempe P interſectione baſis et perpendiculi) definiant.

10. Nam dictis AP$=x$, et PD$=y$, concipe CPD per ſpatium quàm minimum moveri; puta ad locum Cpd: inque CD & Cd ſumpto CΔ, et Cδ, ejuſdem cujuſvis datæ longitudinis, puta 1, et ad CL demiſſis Δg, δy perpendiculis, quorum Δg (quod dic z) occurrat Cd in f, et completo parallelogrammo $gy\delta\varepsilon$; erit $\Delta e:\Delta f\ (::\overline{\Delta e}^2:\overline{\Delta\delta}^2::\overline{\mathrm{C}g}^2:\overline{\mathrm{C}\Delta}^2)::\frac{\overline{\mathrm{C}g}^2}{\mathrm{C}\Delta}:\mathrm{C}\Delta$. Et $\Delta f:\mathrm{P}p::\mathrm{C}\Delta:\mathrm{CP}$. Et ex æquo $\Delta e:\mathrm{P}p::\frac{\overline{\mathrm{C}g}^2}{\mathrm{C}\Delta}:\mathrm{CP}$. Eſt autem P$p$ momentum baſis AP, cujus additamento evadit Ap; ac Δe contemporaneum momentum perpendiculi Δg, cujus ablatione evadit δy: adeoque Δe et Pp ſunt ut fluxiones linearum Δg (z) et AP (x), hoc eſt, ut $\dot{x}$ et $\dot{z}$. Quare $\dot{z}:\dot{x}::\frac{\overline{\mathrm{C}g}^2}{\mathrm{C}\Delta}:\mathrm{CP}$. Et proinde cùm ſit $\overline{\mathrm{C}g}^2\ (=\overline{\mathrm{C}\Delta}^2-\overline{\Delta g}^2)=1-zz$; et C$\Delta=1$; erit CP$=\frac{\dot{x}-\dot{x}z^2}{\dot{z}}$. Et inſuper cùm è tribus $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ quamlibet pro uniformi fluxione, ad quam cæteræ referantur, habere liceat; ſi iſta ponatur $\dot{x}$ ejuſque quantitas unitas, evadet CP$=\frac{1-zz}{\dot{z}}$.



11. Præterea eſt CΔ (1) : Δg (z) :: CP : PL; et CΔ (1) : Cg ($\sqrt{1-zz}$) :: CP : CL; adeoque fit PL$=\frac{z-z^3}{\dot{z}}$, et CL$=\frac{1-zz}{\dot{z}}\sqrt{1-zz}$. Ac denique actâ pq parallelâ arcui infinitè parvo Dd, ſeu perpendiculari DC, erit Pq momentum ipſius DP, cujus additamento evadit dp, ſimul ac AP evadit Ap. Et idcirco Pp & Pq ſunt ut fluxiones ipſarum AP (x) et PD (y), hoc eſt ut 1 & $\dot{y}$. Atque adeo cùm propter

propter ſimilia triangula Ppq et CΔg, CΔ ac Δg, ſeu I & z, ſint in eâdem ratione, erit $\dot{y}=z$. Unde talis evadit Problematis reſolutio.

Inventio CURVARUM quæ Ευθυνισμου ſint capaces.

12. E propoſitâ æquatione, quæ relationem inter x et y deſignat, quære relationem fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ (per Prob. I.) Et poſito $\dot{x}=1$ habebitur valor $\dot{y}$, cui z æquatur. Dein ſubſtituto z pro $\dot{y}$, ope æquationis noviſſimæ, quære relationes fluxionum $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ (per idem Prob. I.) et iterum ſubſtituto I pro $\dot{x}$, obtinebitur valor $\dot{z}$. Quibus habitis, fac $\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}=$ CP; $z\times$ CP $=$ PL; et CP $\times\sqrt{1-\dot{y}\dot{y}}=$ CL, et erit C ad Curvam, cujus pars quævis, KC, æquatur rectæ CG, differentiæ nempe tangentium ductarum à punctis C et K perpendiculariter ad Curvam Dd.

13. EXEMPL. Sit $ax=yy$ æquatio quæ relationem inter AP et PD deſignet, et per Prob. I. primò erit $a\dot{x}=2y\dot{y}$, ſeu $a=\frac{2y\dot{y}}{\dot{x}}=2yz$. Deinde $0=2\dot{y}z+2y\dot{z}$, ſeu $\frac{-zz}{y}=\dot{z}$. Indeque fit CP $=(\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}=)\ y-\frac{4y^3}{aa}$; PL $=(z\times$ CP $=)\ \frac{1}{2}a-\frac{2yy}{a}$; et CL $=\frac{aa-4yy}{2aa}\sqrt{4yy-aa}$. Et à CP ac PL ablatis y et x, reſtat CD $=-\frac{4y^3}{aa}$, et AL $=\frac{1}{2}a-\frac{3yy}{a}$. Aufero autem y et x, quòd CP et PL, ubi valores habent affirmativos, cadant ad partes puncti P verſus D et A, et tunc diminui debent auferendo affirmativas quantitates PD et AP. Ubi verò negativos valores obtinent, cadunt ad contrarias partes puncti P; et tunc augeri debent: id quod etiam fit auferendo affirmativas quantitates PD et AP.

14. Jam ut Curvæ, in quâ punctum C locatur, longitudo inter duo quævis puncta, K et C, noſcatur; quæro longitudinem tangentis ad punctum K, & aufero à CD. Quemadmodum ſi K ſit punctum, ad quod tangens terminatur, ubi CΔ et Δg, ſeu I & z, ponuntur æquales, quodque proinde in ipſâ baſi AP ſitum eſt; ſcribe I pro z in æquatione $a=2yz$, & prodit $a=2y$. Quare pro y ſcribe $\frac{1}{2}a$ in valore CD, nempe in $-\frac{4y^3}{aa}$, et oritur $-\frac{1}{2}a$. Eſtque hæc longitudo tangentis ad punctum K, ſive ipſius DG; inter quam et ſuperiorem indefinitum valorem CD differentia, $\frac{4y^3}{aa}-\frac{1}{2}a$, eſt GC, cui Curvæ pars KC æquatur.

15. Ut inſuper pateat qualis ſit hæc Curva, ab AL (mutato priùs ſigno ut evadat affirmativa) aufer AK, quæ erit $\frac{1}{4}a$; et reſtabit KL $=\frac{3yy}{a}-\frac{1}{4}a$, quam dic t; et in valore lineæ CL, quam dic v, ſcribe $\frac{4at}{3}$

Ttt 2 pro

CAPUT XII. pro $4yy-aa$, & prodibit $\frac{2t}{3a}\sqrt{\frac{4}{3}at}=v$, seu $\frac{16t^3}{27a}=vv$, æquatio ad Parabolam secundi generis, ut suprà.

16. Siquando relatio inter t & v minùs commodè ad æquationem redigi possit, sufficit investigasse tantùm longitudines PC & PL. Quemadmodum si pro relatione inter AP & PD [vid. fig. p. 506] assumatur æquatio $3a^2x+3a^2y-y^3=0$. Inde (per Prob. 1.) primò prodit $a^2+a^2z-y^2z=0$; deinde $a^2\dot{z}-2yz^2-y^2\dot{z}=0$. Adeoque est $z=\frac{aa}{y-a^2}$, & $\dot{z}=\frac{2yz^2}{a^2-y^2}$. Unde dantur PC$=\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$, & PL$=z\times$PC; quibus punctum C, quod ad Curvam situm est, determinatur. Et longitudo Curvæ inter duo ejusmodi puncta è differentiâ correspondentium duarum tangentium DC, sive PC$-y$, innotescit.

Ex. Gr. Si ponatur $a=1$, et ad determinandum aliquod Curvæ punctum C, sumatur $y=2$; evadet AP seu x $(=\frac{y^3-3a^2y}{3aa})=\frac{2}{3}$; $z=\frac{1}{3}$; $\dot{z}=-\frac{4}{9}$, PC$=-2$, & PL$=-\frac{2}{3}$. Deinde ad aliud punctum determinandum, si sumatur $y=3$, evadet AP$=6$; $z=\frac{1}{8}$; $\dot{z}=\frac{-3}{256}$; PC$=-84$, & PL$=-10\frac{1}{2}$. Quibus habitis, si auferatur y à PC, restabit -4 in priori casu, et -87 in secundo casu, pro longitudinibus DC; quarum differentia, 83, est longitudo Curvæ inter inventa duo puncta C et c.

Hæc ita intelligenda sunt, ubi Curva inter puncta duo C & c vel K & C continuatur, sine termino quem cuspidi assimilavimus: Sed ubi unus vel plures ejusmodi termini interjacent istis punctis (qui termini inveniuntur, per determinationem Maximæ aut Minimæ PC vel DC) longitudines singularum partium Curvæ, inter illos et puncta C vel K, seorsim investigari debent & addi.

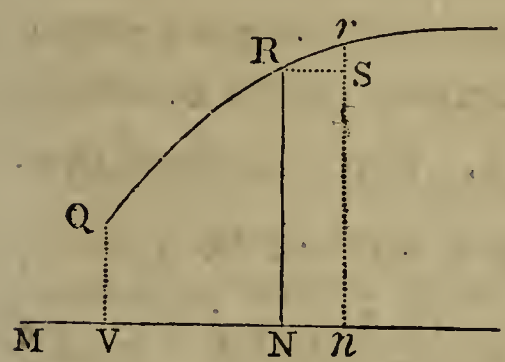
PROBLEMA XI.

17. *Curvas invenire quotascunque, quarum Longitudines cum propositæ alicujus Curvæ Longitudine, vel cum Areâ ejus ad datam Lineam applicatâ, ope finitarum Æquationum, comparari possunt.*

18. Peragitur, involvendo longitudinem areamve propositæ Curvæ in æquatione, quæ in præcedente Problemate assumitur ad determinandam relationem inter AP & PD. Sed ut z et $\dot{z}$ inde per Prob. 1. eliciantur, fluxio longitudinis vel areæ illius prius investigari debet.

19. Fluxio

19. Fluxio longitudinis ejus determinatur ponendo æqualem radici quadraticæ summæ quadratorum à fluxionibus basis & perpendiculariter incedentis. Sit RN linea perpendiculariter incedens super basi MN, et QR Curva proposita ad quam RN terminatur. Dictisque $MN=s$, $NR=t$ & $QR=v$; concipe lineam NR ad locum quàm proximum, nr, promoveri; et demisso ad nr perpendiculo RS, erunt RS, sr & Rr, contemporanea momenta linearum MN, NR, & QR, quorum additamentis evadunt Mn, nr, & Qr. Et cùm hæc sint inter se ut earundem linearum fluxiones, ac propter angulum rectum RSr fit $\sqrt{RS^2+sr^2}=Rr$, erit $\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2}=\dot{v}$. Comparare Curvarum Longitudines.



20. Ad determinandas autem fluxiones $\dot{s}$ & $\dot{t}$, duæ requiruntur æquationes; una, quæ definiat relationem inter MN & NR, seu s & t: unde relatio inter fluxiones $\dot{s}$ & $\dot{t}$ eruenda est: et alia, quæ definiat relationem inter MN vel NR ad datam figuram, et AP seu x ad quæsitam; unde relatio fluxionis $\dot{s}$, vel $\dot{t}$, ad fluxionem $\dot{x}$, seu 1, innotescit.

21. Invento $\dot{v}$, fluxiones $\dot{y}$ et $\dot{z}$ per assumptam tertiam æquationem, quâ longitudo PD sive y definitur, investigandæ sunt; & capienda $PC=\frac{1-\dot{y}^2}{\dot{z}}$; $PL=\dot{y}\times PC$; ac $DC=PC-y$, ut in præcedente Problemate.

22. Exempl. 1. Sit $as-ss=tt$, æquatio ad datam Curvam QR, utpote circulum; $xx=as$ relatio inter lineas AP et MN; et $\frac{2}{3}v=y$ relatio inter longitudinem datæ Curvæ, QR, et rectæ PD. Per primam, fit $a\dot{s}-2s\dot{s}=2t\dot{t}$, seu $\frac{a-2s}{2t}\dot{s}=\dot{t}$. Et inde $\frac{a\dot{s}}{2t}(\sqrt{ss+tt})=\dot{v}$. Per secundam fit $2\dot{x}=a\dot{s}$: adeoque est $\frac{x}{t}=\dot{v}$. Et per tertiam fit $\frac{2}{3}\dot{v}=\dot{y}$, hoc est $\frac{2x}{3t}=\dot{z}$, dein hinc fit $\frac{2}{3t}-\frac{2x\dot{t}}{3tt}=\ddot{z}$. Quibus inventis, capienda sunt $PC=\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\ddot{z}}$; $PL=\dot{y}\times PC$; ac $DC=PC-y$, sive $PC-\frac{2}{3}QR$; ubi patet longitudinem datæ Curvæ QR inveniri non posse, quin simul innotescat longitudo rectæ DC, indeque longitudo Curvæ ad quam punctum C cadit. Et contrà.

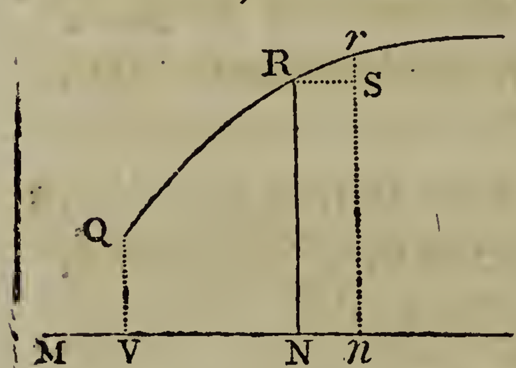
23. Exempl. 2. Stante $as-ss=tt$, ponatur $x=s$, & $vv-4ax=4ay$.

Perque

Caput XII. Perque primam invenietur $\frac{a\dot{s}}{2t} = \dot{v}$, ut suprà. Per secundam verò $1 = \dot{s}$; atque adeo $\frac{a}{2t} = \dot{v}$. Et per tertiam $2\dot{v}v - 4a = 4a\dot{y}$, seu (eliminato $\dot{v}$) $\frac{v}{4t} - 1 = \dot{z}$; dein hinc $\frac{\dot{v}}{4t} - \frac{v\dot{t}}{4tt} = \dot{z}$.

24. Exempl. 3. Ponantur tres æquationes $aa = st$; $a + 3s = x$; et $x + v = y$. Et per primam (quæ Hyperbolam denotat) evadit $0 = \dot{s}t + \dot{t}s$, seu $-\frac{\dot{s}t}{s} = \dot{t}$: et inde $\frac{\dot{s}}{s}\sqrt{ss+tt}\ (= \sqrt{\dot{s}^2 + \dot{t}^2}) = \dot{v}$. Per secundam evadit $3\dot{s} = 1$; adeoque est $\frac{1}{3s}\sqrt{s^2 + t^2} = \dot{v}$. Et per tertiam fit $1 + \dot{v} = \dot{y}$, sive $1 + \frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt} = \dot{z}$. Dein hinc fit $\dot{\phi} = \dot{z}$, positâ scilicet $\dot{\phi}$ fluxione radicalis $\frac{1}{3s}\sqrt{s^2+t^2}$; quæ si fingatur æqualis ϕ, sive $\frac{1}{9} + \frac{tt}{9s^2} = \phi\phi$, proveniet inde $\frac{2t\dot{t}}{9ss} - \frac{2tt\dot{s}}{9s^3} = 2\phi\dot{\phi}$. Et substituto imprimis $-\frac{\dot{s}t}{s}$ pro $\dot{t}$, deinde $\frac{1}{3}$ pro $\dot{s}$, factâque divisione per 2ϕ, habebitur $\frac{-2t^2}{27\phi s^3} = (\dot{\phi} =)\dot{z}$. Inventis $\dot{y}$ & $\dot{z}$ cætera peraguntur ut in Exemplo Primo.

25. Quòd si à quovis Curvæ puncto Q, perpendiculum QV ad MN demittatur, et Curva invenienda sit, cujus longitudo ex longitudine,



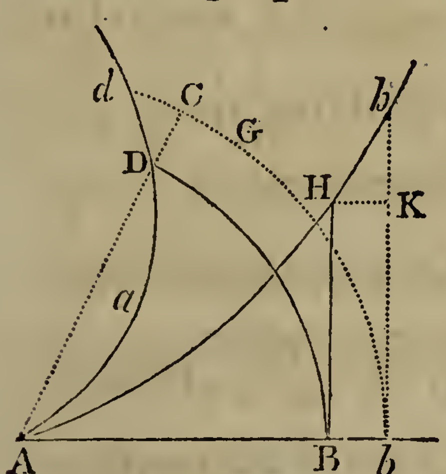
quæ oritur applicando aream QRNV ad datam aliquam lineam, innotescat: ponatur illa data linea E; longitudo $\frac{\text{QRNM}}{\text{E}}$, quæ ex applicatione oritur, v. Et cùm fluxio areæ QRNV sit ad fluxionem areæ parallelogrammi rectanguli super VN ad altitudinem E constituti ut incedens linea NR, seu t, quâ hæc describitur, ad incedentem lineam E, quâ illud eodem tempore describitur; et longitudinum, quæ oriuntur applicando areas illas ad datam E, hoc est, linearum v et VN, seu s, fluxiones $\dot{v}$ et $\dot{s}$ sint in eâdem ratione, erit $\dot{v} = \frac{\dot{s}t}{\text{E}}$. Per hanc itaque Regulam valor $\dot{v}$ inquirendus est, cæteraque ut in præcedentibus Exemplis peragenda.

26. Exempl. 4. Sit QR Hyperbola quam æquatio $aa + \frac{ass}{c} = tt$ definit, et inde juxta Prob. 1. evadet $\frac{a\dot{s}s}{c} = t\dot{t}$, sive $\frac{a\dot{s}s}{ct} = \dot{t}$. Dein, si pro aliis duabus æquationibus assumantur $x = s$, & $y = v$, prior dabit $1 = \dot{s}$; unde fit $\dot{v}\ (= \frac{\dot{s}t}{\text{E}}) = \frac{t}{\text{E}}$; et posterior dabit imprimis $\dot{y} = \dot{v}$, sive

$z = \frac{t}{E}$; dein hinc $\dot{z} = \frac{\dot{t}}{E}$; et fubftituto $\frac{a\dot{s}s}{ct}$, five $\frac{as}{ct}$, pro $\dot{t}$, evadet $\dot{z} = \frac{as}{Ect}$. Inventis $\dot{y}$ et $\dot{z}$, fac $\frac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = $ CP, & $\dot{y} \times$ CP $=$ PL, ut in præcedentibus; et inde punctum C, adeoque Curva, in quam omnia ejufmodi puncta cadunt, determinabitur: cujus Curvæ longitudo ex longitudine DC, quæ valet CP $-v$, innotefcat, uti fatis oftendimus. COMPARARE CURVARUM LONGITUDINES.

27. Eft et alia methodus quâ Problema refolvitur, quærendo nempe Curvas, quarum fluxiones vel æquentur fluxioni Curvæ propofitæ, vel ex illius et aliarum linearum fluxionibus componantur. Et hæc aliquando ufui effe poteft, præfertim in convertendo Mechanicas Curvas, in æquales Geometricas, cujus rei infigne eft exemplum in Spiralibus.

28. Sit AB recta pofitione data; BD arcus fuper AB tanquam bafi incedens, ac interea retinens A pro centro; ADd Spiralis, ad quam arcus ille perpetim terminatur; bd arcus quàm proximus, five locus in quem arcus BD, dum incedit, proximè movetur; DC perpendicularis ad arcum bd; dG differentia arcuum; AH alia Curva Spirali AD æqualis; BH recta fuper AB normaliter incedens ac terminata ad curvam AH; bh locus quàm proximus in quem recta illa incedit; et HK perpendicularis ad bh. Et in triangulis infinitè parvis DCd ac HKh, cùm DC & HK æqualia fint eidem tertio Bb, indeque fibi mutuò æqualia; ac Dd & Hh ex hypothefi fint correfpondentes partes æqualium Curvarum, et inde etiam æqualia; nec non anguli ad C & K recti; tertia etiam latera, dC & hK, æqualia erunt. Quare cùm infuper fit AB : BD : : Ab : bC : : A$b-$AB (Bb) : bC $-$ BD (CG); adeoque $\frac{BD \times Bb}{AB} = $ CG; fi hoc auferatur à dG, reftabit dG$-\frac{BD \times Bb}{AB}$ ($=d$C) $=h$K. Dic itaque AB$=z$, BD$=v$, & BH$=y$, et cùm Bb, dG, & HK fint earundem contemporanea momenta quorum additamentis evadunt Ab, bd, & bh, et proinde inter fe fint ut fluxiones, ideo pro momentis in æquatione noviffimâ fubftituantur fluxiones, juxta et notæ pro lineis, et emerget $\dot{v} - \frac{v\dot{z}}{z} = \dot{y}$. Ubi fi è fluxionibus $\dot{z}$ pro æ-



quabili.

CAPUT XII. quabili habeatur & supponatur unitas esse, ad quam cæteræ referantur, evadit $\dot{v} - \frac{v}{z} = y$.

Quamobrem datâ per æquationem aliquam relatione inter AB & BD (sive x et v) quâ Spiralis definiatur, dabitur (per Prob. I.) fluxio $\dot{v}$, et inde etiam fluxio $\dot{y}$, ponendo æqualem $\dot{v} - \frac{v}{z}$. Atque hæc per Prob. II. dabit lineam y, sive BH, cujus est fluxio.

29. EXEMPL. I. Si detur $\frac{zz}{a} = v$ æquatio nempe ad Spiralem Archimedeam, inde (per Prob. I.) elicietur $\frac{2z}{a} = \dot{v}$. A quo aufer $\frac{v}{z}$, sive $\frac{z}{a}$, et restabit $\frac{z}{a} = \dot{y}$, et inde per Prob. II. fit $\frac{zz}{2a} = y$. Quod indicat Curvam AH, cui hæc Spiralis AD æquatur, esse Parabolam Apollonianam, cujus latus rectum existit $2a$, sive cujus incedens, BH, perpetuò æquatur semissi arcûs BD.

30. EXEMPL. 2. Si proponatur Spiralis, quam æquatio $z^3 = av^2$, sive $v = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ definit, emerget, per Prob. I. $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{v}$. A quo si auferatur $\frac{v}{z}$, seu $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, restabit $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$, et inde per Prob. II. producetur $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} = y$. Hoc est $\frac{1}{3}$BD=BH, existente AH Parabolâ secundi generis.

31. EXEMPL. 3. Si ad Spiralem sit $z\sqrt{\frac{a+z}{c}} = v$. Exinde per Prob. I. elicietur $\frac{2a+3z}{2\sqrt{ac+cz}} = \dot{v}$. A quo si auferatur $\frac{v}{z}$, sive $\sqrt{\frac{a+z}{c}}$, restabit $\frac{z}{2\sqrt{ac+zc}} = \dot{y}$. Jam cùm quantitas hâc fluxione $\dot{y}$ generata nequeat inveniri per ea quæ in Prob. II. habentur, nisi fiat resolutio in infinitam seriem, juxta tenorem Scholii Prob. IX. reduco ad formam æquationum in primâ columnâ Catalogorum, substituendo z^η pro z; et evadit $\frac{z^{2\eta-1}}{2\sqrt{ac+cz^\eta}} = y$: æquatio nempe secundæ speciei quarti ordinis prioris Catalogi. Et conferendo terminos fit $d = \frac{1}{2}$; $e = ac$; & $f = c$: adeoque $\frac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz}\ (=t) = y$, quæ æquatio est ad Curvam Geometricam AH, cui Spiralis AD æquatur.

PROBLEMA XII.

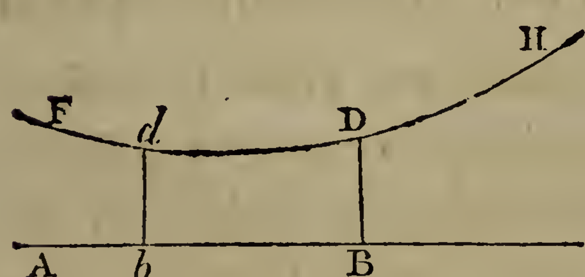
CURVARUM LONGITUDINES.

Curvarum Longitudines determinare.

33. Fluxionem Curvæ lineæ in ſuperiore Problemate oſtendimus æqualem eſſe radici quadraticæ ſummæ quadratorum à fluxionibus baſis et perpendiculariter incedentis. Et proinde ſi baſis fluxionem pro uniformi ac determinatâ menſurâ, nimirum unitate, ad quam cæteræ fluxiones referantur, habeamus; et inſuper per æquationem, quæ Curvam definit, quæramus fluxionem Incedentis, habebitur fluxio Curvæ lineæ, à quâ longitudo ejus per Prob. II. elicienda eſt.

34. EXEMPL. I. Proponatur Curva FDH, quam æquatio $\frac{z^3}{aa} + \frac{aa}{12z} = y$ definit; poſito ſcilicet $z=$ baſi AB, ac $y=$ incedenti DB. Et ex æquatione illâ per Prob. I. elicietur $\frac{3zz}{aa} - \frac{aa}{12z^2} = \dot{y}$, exiſtente nimirum 1 fluxione ipſius z. Dein additis fluxionum quadratis, fit ſumma $\frac{9z^4}{a^4} + \frac{1}{2} + \frac{a^4}{144z^4} = \dot{t}\dot{t}$; et extractâ radice, $\frac{3zz}{aa} + \frac{aa}{12zz} = \dot{t}$, indeque per Prob. II. $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} = t$.

35. Itaque ſi cujuſvis portionis Curvæ hujus, puta *d*D, longitudo deſideretur; à punctis *d* ac D demitte ad AB perpendicula *db* ac DB, et in valore t ſubſtitue quantitates A*b* et AB ſeorſim pro z, ac differentia productorum erit longitudo quæſita *d*D.



Quemadmodum ſi ſit A$b = \frac{1}{2}a$, et AB$=a$, ſcripto $\frac{1}{2}a$ pro z, evadet $t = -\frac{a}{24}$. Dein ſcripto a pro z, evadet $t = \frac{11a}{12}$: à quo ſi prior valor auferatur, reſtabit $\frac{23a}{24}$ pro longitudine *d*D. Vel ſi A*b* tantùm definiatur eſſe $\frac{1}{2}a$, et AB ſpectetur indefinitè, reſtabit $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} + \frac{a}{24} = d$D.

36. Quòd ſi cupias noſcere portionem Curvæ quam t deſignat, finge valorem t æquari nihilo; et evadet $z^4 = \frac{a^4}{12}$, ſive $z = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$; adeoque

 ſi

CAPUT XII. si sumatur A$b = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$, et erigatur bd, longitudo arcûs dD erit t, sive $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z}$. Et hæc de aliis Curvis generaliter intelligenda sunt.

37. Ad eundem modum, quo hujus longitudinem determinavimus, si pro aliâ Curvâ definiendâ proponatur æquatio $\frac{z^4}{a^3} + \frac{a^3}{32z^2} = y$, proveniet $\frac{z^4}{a^3} - \frac{a^3}{32z^2} = t$. Vel si proponatur $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = y$, proveniet $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = t$. Vel generaliter si sit $cz^{\theta} + \frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = y$, ubi θ pro quolibet numero, sive integro, sive fracto, designando adhibetur, erit $cz^{\theta} - \frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = t$.

38. EXEMPL. 2. Proponatur Curva, quam æquatio $\frac{2a^2 + 2z^2}{3a^2}\sqrt{a^2 + z^2} = y$ definit: et per Prob. I. obtinebitur $\dot{y} = \frac{4a^4z + 8a^2z^3 + 4z^5}{3a^4y}$; sive exterminato y, $\dot{y} = \frac{2z}{aa}\sqrt{a^2 + z^2}$: cujus quadrato adde I, et summa erit $1 + \frac{4zz}{aa} + \frac{4z^4}{a^4}$; ejusque radix $1 + \frac{2z^2}{aa} = \dot{t}$, unde per Prob. II. obtinetur $z + \frac{2z^3}{3a^2} = t$.

39. EXEMPL. 3. Proponatur Parabola secundi generis, ad quam æquatio est $z^3 = ay^2$, seu $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = y$: et inde (per Prob. I.) elicietur $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$; adeoque est $\sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}\ (\sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}}) = \dot{t}$. Jam cùm longitudo per fluxionem $\dot{t}$ generata nequeat inveniri per Prob. II. absque reductione in infinitam seriem simplicium terminorum, consulo Catalogos ad Prob. VIII. et juxta ea quæ in Scholio ejus habentur, prodit $t = \frac{8a + 18z}{27} \times \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}$.

40. Et sic Parabolarum $z^5 = ay^4$, $z^7 = ay^6$, $z^9 = ay^8$, &c. longitudines inveniri possunt.

41. EXEMPL. 4. Proponatur Parabola, ad quam æquatio est $z^4 = ay^3$, sive $\frac{z^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = y$; et inde per Prob. I. orietur $\frac{4z^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}} = \dot{y}$. Adeoque $\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}\ (= \sqrt{\dot{y}\dot{y} + 1}) = \dot{t}$. Quo invento, consulo Catalogos juxta Scholium prædictum, et factâ collatione cum secundo Theoremate tertii ordinis posterioris catalogi, prodit $z^{\frac{1}{3}} = x$; $\sqrt{1 + \frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}} = v$,

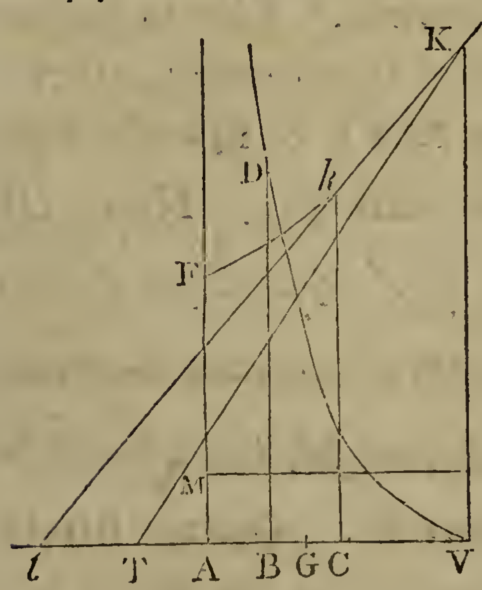
 et

et $3s=t$. Ubi x designat basem, y ordinatim applicatam, & s aream Hyperbolæ, atque t longitudinem quæ oritur applicando aream $3s$ ad unitatem linearem. CURVARUM LONGITUDINES.

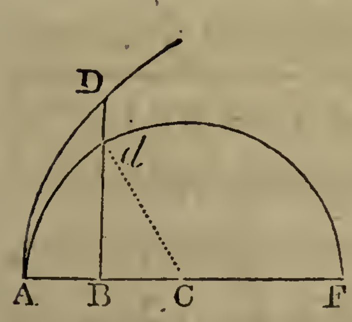
42. Eâdem methodo Parabolarum $z^6=ay^5$, $z^8=ay^7$, $z^{10}=ay^9$, &c. longitudines etiam per aream Hyperbolæ determinantur.

43. EXEMPL. 5. Proponatur Cissois Veterum; et existente ad eam æquatione $\frac{aa-2az+zz}{\sqrt{az-zz}}=y$, inde per Prob. I. elicietur $\frac{-a-2z}{2zz}\sqrt{az-zz}$ $=\dot{y}$: et consequenter $\frac{a}{2z}\sqrt{\frac{a+3z}{z}}$ $(=\sqrt{\dot{y}\dot{y}+1})=\dot{t}$; quæ, scribendo z^n pro $\frac{1}{z}$ seu z^{-1}, evadit $\frac{a}{2z}\sqrt{az^n+3}=\dot{t}$, æquatio primæ speciei tertii ordinis posterioris Catalogi. Et collatis terminis fit $\frac{a}{z}=d$, $3=e$, et $a=f$; adeoque $z\ (=\frac{1}{z}) = x^2$, $\sqrt{a+3x^2}=v$, & $6s-\frac{2v^3}{x}\ (=\frac{4de}{nf}\text{ in }\frac{v^3}{2ex}-s)$ $=t$. Et adhibitâ a pro unitate, per cujus multiplicationem vel divisionem hæ quantitates ad justum dimensionum numerum reducantur, evadit $az=xx$, $\sqrt{aa+3xx}=v$, & $\frac{6s}{a}-\frac{2v^3}{ax}=t$. Quorum hæc est constructio.

44. Existente VD Cissoide, AV diametro circuli ad quam aptatur,



AF asymptoto ejus, ac DB perpendiculari ad AV; cum semiaxe AF=AV, & semiparametro $AG=\frac{1}{3}AV$, describatur Hyperbola FkK: et inter AB & AV sumptâ AC mediâ proportionali, erigantur ad C & V perpendicula Ck & VK, et agantur kt & KT rectæ tangentes Hyperbolam in k et K, et occurrentes AV in t ac T; et ad AV constituatur rectangulum VM æquale spatio TKkt; et Cissoidis VD longitudo erit sextupla altitudinis AM.

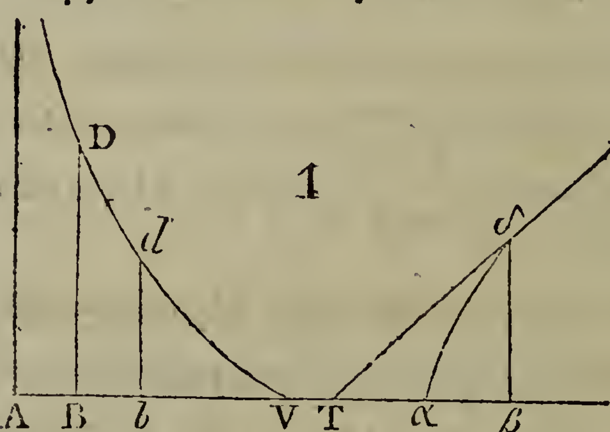


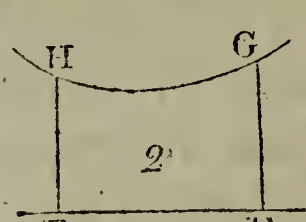
45. EXEMPL. 6. Existente Ad Ellipsi, quam æquatio $\sqrt{az-2zz}=y$, definit: proponatur Curva Mechanica AD, talis ut si Bd, seu y, producatur donec huic Curvæ ad D occurrat, sit BD æqualis arcui elliptico Ad. Jam quo hujus longitudo determinetur, æquatio $\sqrt{az-2zz}=y$, dabit $\frac{a-4z}{2\sqrt{az-2zz}}=\dot{y}$. Cujus quadrato si I addatur, prodit $\frac{a^2-4az+8z^2}{4az-8z^2}$ quadratum fluxionis arcûs

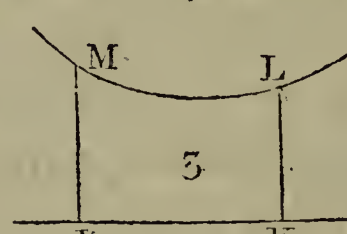
CAPUT XII. Ad: et huic ſi iterum addatur 1, provenit $\frac{aa}{4az-8zz}$; cujus radix $\frac{a}{2\sqrt{az-2zz}}$ eſt fluxio Curvæ lineæ AD. Ubi ſi è radicali extrahatur z, & pro z^{-1} ſcribatur z^{η}, habebitur $\frac{a}{2z\sqrt{az^{\eta}-2}}$ fluxio primæ ſpeciei quarti ordinis poſterioris Catalogi. Collatiſque terminis exibunt $d=\frac{1}{2}a$, $e=-2$, & $f=a$: adeoque $z\,(=\frac{1}{z^{\eta}})=x$, $\sqrt{ax-2x^2}=v$, & $\frac{8s}{a}-\frac{4xv}{a}+v\ (=\frac{8de}{\eta ff}$ in $s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e})=t$.

46. Quorum conſtructio eſt, ut ad Ellipſis centrum D actâ rectâ dC, conſtituatur ſuper AC parallelogrammum æquale ſectori ACd, et duplum altitudinis ejus ponatur eſſe longitudo Curvæ AD.

47. EXEMPL. 7. Exiſtente $\alpha\beta=\varphi$, & $\alpha\delta$ Hyperbolâ ad quam æquatio ſit $\sqrt{-a+b\varphi\varphi}=\beta\delta$, actâque δT tangente ejus: proponatur Curva, VdD, cujus baſis AB ſit $\frac{1}{\varphi\varphi}$, & normaliter incedens, BD, longitudo, quæ oritur applicando aream $\alpha\delta$Tα ad unitatem linearem. Jam ut hujus αD longitudo determinetur, quæro fluxionem areæ $\alpha\delta$Tα, cùm AB uniformiter fluit; & invenio eſſe $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, poſitâ AB$=z$, & fluxione ejus unitate. Nam eſt αT$=\frac{a}{b\varphi}=\frac{a}{b}\sqrt{z}$; ejuſque fluxio $\frac{a}{2b\sqrt{z}}$: cujus dimidium ductum in altitudinem $\beta\delta$, ſeu $\sqrt{-a+\frac{b}{z}}$, eſt fluxio areæ αTδ deſcriptæ per tangentem δT. Quare fluxio illa eſt $\frac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$, atque hæc applicata ad unitatem fit fluxio incedentis BD. Hujus quadrato $\frac{aab-a^3z}{16b^2z^2}$ adde 1, quadratum fluxionis ipſius AB, et prodit $\frac{a^2b-a^3z+16b^2z^2}{16b^2z^2}$; cujus radix $\frac{1}{4bz}\sqrt{a^2b-a^3z+16b^2z^2}$ eſt fluxio curvæ VD. Eſt autem hæc fluxio primæ ſpeciei ſeptimi ordinis poſterioris Catalogi. Collatiſque terminis exeunt $\frac{1}{4b}=d$; $aab=e$, $-a^3=f$, $16b^2=g$; adeoque $z=x$, & $\sqrt{a^2b-a^3x+16b^2x^2}=v$ (æquatio ad unam conicam ſectionem, puta GH, (fig. 2) cujus area EFGH ſit s, exiſtente







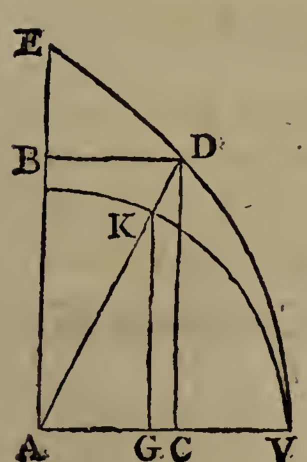
existente EF$=x$, & FG$=v$). Item $\frac{1}{z}=\xi$, et $\sqrt{16b^2-a^3\xi+ab\xi^2}=\Upsilon$ (æquatio ad aliam conicam sectionem, puta ML (fig. 3) cujus area IKLM sit σ, existente IK$=\xi$, & KL$=\Upsilon$) Denique $\frac{2aabb\xi\Upsilon-a^3b\Upsilon-a^4v-4a^2b^2\sigma-32abbs}{64b^4-a^4}$ $=t$. Curvarum Longitudines.

48. Quare ut Curvæ VD portionis cujuscunque, Dd, longitudo noscatur; demitte db normalem ad AB, fingeque AB$=z$, & exinde per jam inventa quære t: dein finge BA$=z$, & exinde etiam quære t: & horum duorum t differentia erit longitudo Dd.

49. Exempl. 8. Proponatur Hyperbola, ad quam æquatio est $\sqrt{aa+bzz}=y$; et inde (per Prob. I.) elicietur $\dot{y}=\frac{bz}{y}$, seu $\frac{bz}{\sqrt{aa+bzz}}$. Cujus quadrato adde 1, & summæ radix erit $\sqrt{\frac{aa+bzz+bbzz}{aa+bzz}}=\dot{t}$. Hanc fluxionem, cùm non reperiatur in Tabulis, reduco in infinitam seriem: & primò, per divisionem, evadit $\dot{t}=\sqrt{1+\frac{b^2z^2}{a^2}-\frac{b^3z^4}{a^4}+\frac{b^4z^6}{a^6}-\frac{b^5z^8}{a^8}}$ &c. dein per extractionem radicis $\dot{t}=1+\frac{b^2z^2}{2a^2}-\frac{4b^3+b^4}{8a^4}z^4+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{16a^5}z^6$ &c. Et hinc per Prob. II. obtinetur t, seu longitudo Hyperbolæ $=z+\frac{b^2}{6a^2}z^3-\frac{4b^3+b^4}{40a^4}z^5+\frac{8b^4+4b^5+b^6}{112a^6}z^7$ &c.

50. Quòd si Ellipsis, $\sqrt{aa-bzz}=y$, proponatur; debet signum ipsius b ubique mutari: & habebitur $z+\frac{b^2}{6a^2}z^3+\frac{4b^3-b^4}{40a^4}z^4+\frac{8b^4-4b^5+b^6}{112a^6}z^5$ &c. pro longitudine ejus. Et positâ insuper unitate pro b, emerget $z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}$ &c. pro longitudine Circuli: cujus seriei numerales coefficientes in infinitum inveniuntur, multiplicando continuò terminos hujus progressionis, $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, $\frac{9\times9}{10\times11}$, &c.

51. Exempl. 9. Proponatur denique Quadratrix, VDE, cujus vertex est V, existente A centro, et AV semidiametro Circuli interioris ad quam aptatur, atque angulo VAE recto. Actâ jam rectâ quâlibet AKD secante Circulum istum in K et Quadraticem in D, demissisque ad AV, AE normalibus KG, DB; dic AV, a; KG, z; VK, x; & BD, y; eritque ut in superiore exemplo, $x=z+\frac{z^3}{6a^2}+\frac{3z^5}{40a^4}+\frac{5z^7}{112a^6}$ &c. Extrahe radicem z, et emerget $z=x-\frac{x^3}{6a^2}+\frac{x^5}{120a^4}-\frac{x^7}{5040a^6}$ &c. Cujus qua-



dratum

CAPUT XII. dratum aufer de $\overline{AK}^2$, et residui radix $a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} - \frac{x^6}{720a^5} +$ &c. erit AG. Jam cùm ex naturâ Quadratricis sit $AB = VK = x$, sitque etiam $GK : AG :: AB : BD$ (y), divide $AB \times AG$ per GK, et orietur $y = a - \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}$ &c. Et inde per Prob. I. $\dot{y} = -\frac{2x}{3a} - \frac{4x^3}{45a^3} - \frac{4x^5}{315a^5}$ &c. Cujus quadrato adde 1, et summæ radix erit $1 + \frac{2x^2}{9a^2} + \frac{14x^4}{405a^4} + \frac{604x^6}{127575a^6}$ &c. $= \dot{t}$; unde per Prob. II. obtinetur t seu Quadratricis arcus $VD = x + \frac{2x^3}{27a^2} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^5}{893025a^6}$ &c.

FINIS GEOMETRIÆ ANALYTICÆ.

METHODUS

METHODUS

DIFFERENTIALIS.

METHODUS

DIFFERENTIALIS.

PROP. I.

Si figuræ curvilineæ Abſciſſa componatur ex quantitate quâvis datâ A, *& quantitate indeterminatâ* x, *& Ordinata conſtet ex datis quotcunque quantitatibus* b, c, d, e, *&c. in totidem terminos hujus progreſſionis geometricæ* x, x^2, x^3, x^4, *&c. reſpectivè ductis, & ad Abſciſſæ puncta totidem data erigantur ordinatim applicatæ: dico quòd Ordinatarum differentiæ primæ dividi poſſint per earum intervalla; & differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum binarum intervalla; & harum differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum ternarum intervalla; & ſic deinceps in infinitum.*

ETENIM ſi pro Abſciſſæ parte indeterminatâ, x, ponantur quantitates quævis datæ p, q, r, s, t, &c. ſucceſſivè, & ad Abſciſſarum ſic datarum terminos erigantur Ordinatæ α, β, γ, ε, δ, &c. Hæ Abſciſſæ & Ordinatæ & ordinatarum differentiæ diviſæ per Abſciſſarum differentias (quæ utique ſunt Ordinatarum intervalla) & quotorum differentiæ diviſæ per Ordinatarum alternarum differentias, & ſic deinceps, exhibentur per Tabulam ſequentem.

PROP. II.

Abſciſſæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+cr^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Diviſor. Diff. Ord.	**Quoti per diviſionem prodeuntes.**
$p-q)\ \alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\ \beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qq+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\ \gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\ \delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+c\times\overline{s+s^2t+st^2+t^3}=\kappa$
$p-r)\ \zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\ \eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\ \theta-\kappa$	$c+d\times\overline{r+s+t}+e\times\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s)\ \lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi.$
$q-t)\ \mu-\nu$	$d+e\times\overline{q+r+s+t}=\pi$
$p-t)\ \xi-\pi$	$e=\sigma$

P R O P. II.

Iiſdem poſitis, & quòd numerus terminorum b, c, d, e, &c. ſit finitus, dico quòd Quotorum ultimus æqualis erit ultimo terminorum b, c, d, e, &c. et quòd per quotos reliquos dabuntur termini reliqui b, c, d, e, &c. et his datis dabitur Linea Curva generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium terminos tranſibit.

Etenim in Tabulâ ſuperiore quotus ultimus, σ, æqualis erat termino ultimo e. Et hic terminus ductus in ſummam datam $\overline{p+q+r+s}$, & ablatus de quoto ξ relinquit terminum penultimum d. Et quantitates jam datæ $d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}$, ſi auferantur de quoto λ, relinquunt terminorum antepenultimum c. Et quantitates jam datæ $c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+ppq+pqq+q^3}$, ſi auferantur de quoto ζ, relinquunt terminum b. Et ſimili computo, ſi plures eſſent termini, colligerentur omnes per quotorum ordines totidem. Deinde quantitates datæ $bp+cpp+dp^3+ep^4$, ſi ſubducantur de Ordinatâ primâ α, relinquunt Abſciſſæ terminum primum A. Et quantitas $A+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$ &c. eſt Ordinata Curvæ generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium datarum terminos tranſibit, exiſtente Abſciſſâ $A+x$.

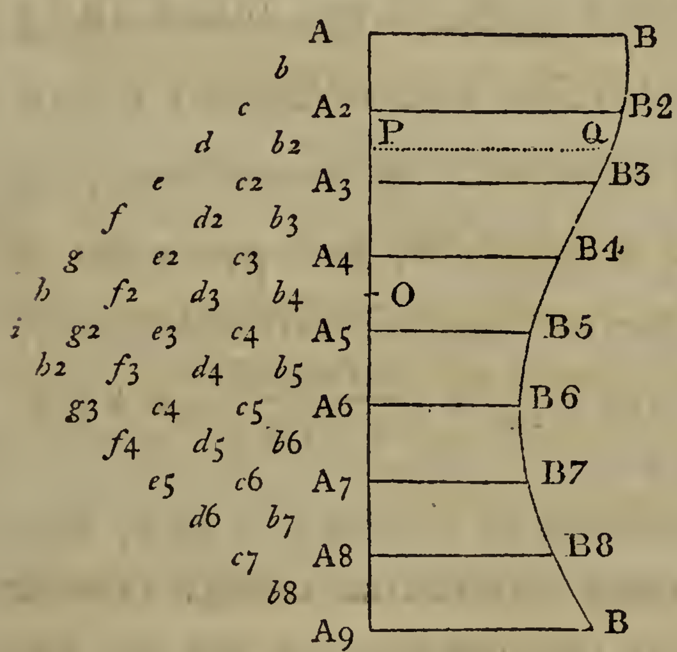
Ex his Propoſitionibus quæ ſequuntur facilè colligi poſſunt.

P R O P.

PROP. III.

Si recta aliqua AA9 *in æquales quotcunque partes* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. transibit.*

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære differentias Primas, b, $b2$, $b3$, &c. Secundas c, $c2$, $c3$, &c. Tertias d, $d2$, $d3$, &c. et sic deinceps usque dum veneris ad ultimam differentiam, quæ hîc sit i.



Tunc incipiendo ab ultimâ differentiâ excerpe medias differentias in alternis Columnis vel Ordinibus differentiarum; & Arithmetica media inter duas medias reliquarum, ordine pergendo usque ad seriem primorum terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. sint hæc k, l, m, n, o, p, q, r, s, &c. quorum ultimus significet ultimam differentiam; penultimus medium arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum differentiarum, & sic deinceps usque ad primum, quod erit vel medius terminorum A, A2, A3, &c. vel arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit ubi numerus terminorum A, A2, A3, &c. est impar; posterius ubi par.

CAS. I.

In Casu priori, sit A5B5 iste medius terminus, hoc est, A5B5 $=k$; $\frac{b4+b5}{2}=l$; $c4=m$; $\frac{d3+d4}{2}=n$; $e3=o$; $\frac{f2+f3}{2}=p$; $g2=q$; $\frac{h+h2}{2}=r$; $i=s$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, dic A5P$=x$; & duc terminos hujus progressionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x^2-1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{x^2-4}{5x} \times \frac{x}{6} \times$

 x^2-9

PROP. III. $\frac{x^2-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{x^2-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{x^2-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{x^2-36}{13x}$ &c. in ſe continuò; & orientur termini $1 . x . \frac{x^2}{2} . \frac{x^3-x}{6} . \frac{x^4-x^2}{24} . \frac{x^5-5x^3+4x}{120} . \frac{x^6-5x^4+4x^2}{720}$, $\frac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{5040}$ &c. per quos ſi termini ſeriei k, l, m, n, o, p, &c. reſpectivè multiplicentur, aggregatum factorum $k+xl+\frac{x^2}{2}m+\frac{x^3-x}{6}n+\frac{x^4-x^2}{24}o+\frac{x^5-5x^3+4x}{120}p+$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

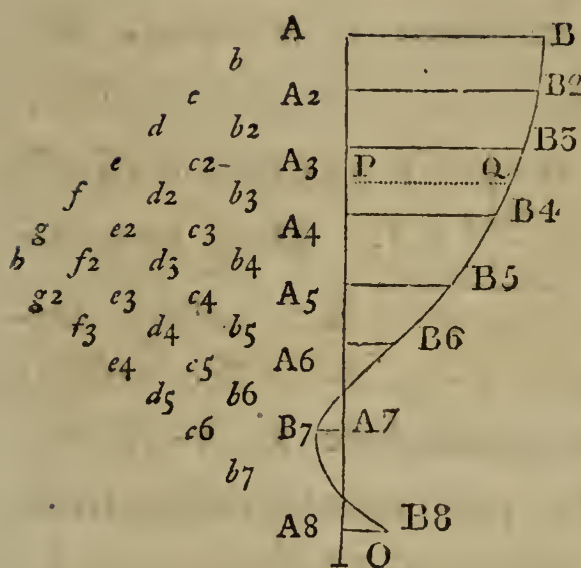
In Caſu poſteriori, ſint A4B4, A5B5 duo medii termini; hoc eſt, ſit $\frac{A4B4+A5B5}{2}=k$; $b4=l$; $\frac{c3+c4}{2}=m$; $d3=n$; $e2+e3=o$; $f2=p$; $\frac{g+g2}{2}=q$; & $h=r$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, biſeca A4A5 in O, & dicto OP$=x$, duc terminos hujus progreſſionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx-\frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx-\frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx-\frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx-\frac{49}{4}}{8x}$, &c. in ſe continuò; et orientur termini $1 . x . \frac{4xx-1}{8} . \frac{4x^3-x}{24} . \frac{16x^4-40x^2+9}{384}$. &c. per quos ſi termini ſeriei k, l, m, n, o, p, q, &c. reſpectivè multiplicentur, aggregatum factorum $k+xl+\frac{4x^2-1}{8}m+\frac{4x^3-x}{24}n+\frac{16x^4-40x^2+9}{384}o+$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

Sed hîc notandum eſt, quòd intervalla AA2, A2A3, A3A4, &c. hîc ſupponantur eſſe unitates, & quòd differentiæ colligi debent auferendo inferiores quantitates de ſuperioribus, A2B2 de AB, A3B3 de A2B2, $b2$ de b, &c. et faciendo ut ſint AB$-$A2B2$=b$, A2B2$-$A3B3$=b2$, $b-b2=c$, &c. adeoque quando differentiæ illæ hoc modo prodeunt negativæ, ſigna earum mutanda ſunt.

PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta diviſionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. invenire Curvam Geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. tranſibit.*

Sunto puncta data B, B2, B3, B4, B5, B6, B7, &c. et ad Abſciſſam quamvis, AA7, demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B2A2, &c. Et



Et fac $\frac{AB - A2B2}{AA2} = b$, $\frac{A2B2 - A3B3}{A2A3} = b2$, $\frac{A3B3 - A4B4}{A3A4} = b3$, $\frac{A4B4 - A5B5}{A4A5} = b4$, $\frac{A5B5 - A6B6}{A5A6} = b5$, $\frac{A6B6 - A7B7}{A6A7} = b6$, $\frac{-A7B7 - A8B8}{A7A8} = b7$. PROP. IV.

Deinde $\frac{b - b2}{AA3} = c$, $\frac{b2 - b3}{A2A4} = c2$, $\frac{b3 - b4}{A3A5} = c3$, &c. Tunc $\frac{c - c2}{AA4} = d$, $\frac{c2 - c3}{A2A5} = d2$, $\frac{c3 - c4}{A3A6} = d3$, &c. Et $\frac{d - d2}{AA5} = e$, $\frac{d2 - d3}{A2A6} = e2$, $\frac{d3 - d4}{A3A7} = e3$, &c.

Sic pergendum eſt ad ultimam differentiam.

Differentiis ſic collectis & diviſis per intervalla ordinatim applicatarum; in alternis earum columnis, ſive ſeriebus vel ordinibus, excerpe medias, incipiendo ab ultimâ; & in reliquis columnis excerpe media arithmetica inter duas medias, pergendo uſque ad ſeriem primorum terminorum, AB, A2B2, &c. Sunto hæc k, l, m, n, o, p, q, r, &c. quorum ultimus terminus ſignificet ultimam differentiam; penultimus medium arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus k erit media ordinatim applicata, ſi numerus datorum punctorum eſt impar; vel medium arithmeticum inter duas medias, ſi numerus eorum eſt par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A4B4 iſta media ordinatim applicata; hoc eſt, ſit $A4B4 = k$; $\frac{b3 + b4}{2} = l$; $c3 = m$; $\frac{d2 + d3}{2} = n$; $e2 = o$; $\frac{f + f2}{2} = p$; $g = q$. Et erectâ ordinatim applicatâ PQ, & in baſi AA5 ſumpto quovis puncto O, dic $OP = x$, & duc in ſe gradatim terminos hujus progreſſionis, $1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - \frac{OA3 + OA5}{2}} \times \frac{\overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5}}{x - \frac{1}{2}\overline{OA3 + OA5}} \times \overline{x - \frac{OA2 + OA6}{2}} \times$ &c. et ortam progreſſionem aſſerva; vel quod perinde eſt, duc terminos hujus progreſſionis $1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA7} \times$ &c. in ſe gradatim; & terminos exinde ortos duc reſpectivè in terminos hujus progreſſionis, $1.\ x - \frac{+OA3 + OA5}{2}.\ x - \frac{+OA2 + OA6}{2}.\ x - \frac{+OA + OA7}{2}$, &c. et orientur

termini

PROP. IV. termini intermedii, totâ progreſſione exiſtente $1.\ x-\mathrm{OA}4.\ x^2-\frac{+\mathrm{OA}3+2\mathrm{OA}4+\mathrm{OA}5}{2}x+\frac{\mathrm{OA}3+\mathrm{OA}5}{2}\times\mathrm{OA}4$, &c.

Vel dic $\mathrm{OA}=\alpha$; $\mathrm{OA}2=\beta$; $\mathrm{OA}3=\gamma$; $\mathrm{OA}4=\delta$; $\mathrm{OA}5=\varepsilon$; $\mathrm{OA}6=\zeta$; $\mathrm{OA}7=\eta$: $\frac{\mathrm{OA}3+\mathrm{OA}5}{2}=\theta$; $\frac{\mathrm{OA}2+\mathrm{OA}6}{2}=\chi$; $\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OA}7}{2}=\lambda$. Et ex progreſſione $1\times\overline{x-\delta}\times\overline{x-\gamma}\times\overline{x-\varepsilon}\times\overline{x-\beta}\times\overline{x-\zeta}\times\overline{x-\alpha}\times\overline{x-\eta}$ &c. collige terminos. Quibus multiplicatis per $1.\ x-\theta,\ x-\chi,\ x-\lambda$, &c. collige alios terminos intermedios; totâ ſerie prodeunte $1,\ x-\delta,\ x^2-\overline{\delta+\theta}x+\delta\theta,\ x^3-\overline{\delta+2\theta}x^2+\overline{\gamma\varepsilon+2\delta\theta}x-\gamma\delta\varepsilon$, &c. per cujus terminos multiplica ſeries $k,\ l,\ m,\ n,\ o$, &c. Et aggregatum productorum $k+\overline{x-\delta}\times l+\overline{x^2-\overline{\delta+\theta}x+\delta\theta}\times m+$ &c. erit longitudo ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Caſu poſteriori, ſint A4B4, A5B5 duæ mediæ ordinatim applicatæ; hoc eſt, $\frac{\mathrm{A4B4}+\mathrm{A5B5}}{2}=k$; $b4=l$; $\frac{c3+c4}{2}=m$; $d3=n$; $\frac{e2+e3}{2}=o$; $f2=p$; &c. Et alternorum $k,\ m,\ o,\ q$, &c. coefficientes orientur ex multiplicatione terminorum hujus progreſſionis in ſe; $1\times\overline{x-\mathrm{OA}4}\times\overline{x-\mathrm{OA}5}\times\overline{x-\mathrm{OA}3}\times\overline{x-\mathrm{OA}6}\times\overline{x-\mathrm{OA}2}\times\overline{x-\mathrm{OA}7}\times\overline{x-\mathrm{OA}}\times\overline{x-\mathrm{OA}8}$ &c. Et reliquorum coefficientes ex multiplicatione horum per terminos hujus progreſſionis; $x-\frac{+\mathrm{OA}4+\mathrm{OA}5}{2}$, $x-\frac{+\mathrm{OA}3+\mathrm{OA}6}{2}$, $x-\frac{+\mathrm{OA}2+\mathrm{OA}7}{2}$, $x-\frac{+\mathrm{OA}+\mathrm{OA}8}{2}$, &c. Hoc eſt, erit $k+\overline{x-\frac{+\mathrm{OA}4+\mathrm{OA}5}{2}}\times l+\overline{x^2-\overline{\mathrm{OA}4+\mathrm{OA}5}x+\mathrm{OA}4\times\mathrm{OA}5}\times m$ &c. ordinatim applicata PQ. Vel PQ $=$

$$k+\begin{array}{l}x\\-\tfrac{1}{2}\mathrm{OA}4\\-\tfrac{1}{2}\mathrm{OA}5\end{array}\times l+\begin{array}{l}x\\-\mathrm{OA}4\end{array}\times+\begin{array}{l}x\\-\mathrm{OA}5\end{array}\times m+\begin{array}{l}x\\-\mathrm{OA}4\end{array}\times+\begin{array}{l}x\\-\mathrm{OA}5\end{array}\times+\begin{array}{l}x\\-\tfrac{1}{2}\mathrm{OA}3\\-\tfrac{1}{2}\mathrm{OA}6\end{array}\times n\ \text{\&c.}$$

Sive dic $x-\frac{+\mathrm{OA}4+\mathrm{OA}5}{2}=\pi$, $\overline{x-\mathrm{OA}4}\times\overline{x-\mathrm{OA}5}=\varrho$,

$\varrho\times\overline{x-\frac{+\mathrm{OA}3+\mathrm{OA}6}{2}}=\sigma$, $\varrho\times\overline{x-\mathrm{OA}3}\times\overline{x-\mathrm{OA}6}=\tau$,

$\tau\times\overline{x-\frac{+\mathrm{OA}2+\mathrm{OA}7}{2}}=\upsilon$, $\tau\times\overline{x-\mathrm{OA}2}\times\overline{x-\mathrm{OA}7}=\varphi$,

$\varphi\times\overline{x-\frac{+\mathrm{OA}+\mathrm{OA}8}{2}}=\chi$, $\varphi\times\overline{x-\mathrm{OA}}\times\overline{x-\mathrm{OA}8}=\psi$,

Et erit $k+\pi l+\varrho m+\sigma n+\tau o+\upsilon p+\varphi q+\chi r+\psi s=$ PQ.

PROP. V.

Prop. V & VI.

Datis aliquot terminis seriei cujuscunque ad data intervalla dispositis, invenire terminum quemvis intermedium quamproximè.

Ad rectam positione datam erigantur termini dati in dato angulo, interpositis datis intervallis, & per eorum puncta extima, per propositiones præcedentes, ducatur Linea Curva generis Parabolici. Hæc enim continget terminos omnes intermedios per seriem totam.

PROP. VI.

Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproximè, cujus Ordinatæ aliquot inveniri possunt.

Per terminos Ordinatarum ducatur Linea Curva generis Parabolici, ope propositionum præcedentium. Hæc enim figuram terminabit, quæ semper quadrari potest, et cujus area æquabitur areæ figuræ propositæ quamproximè.

SCHOLIUM.

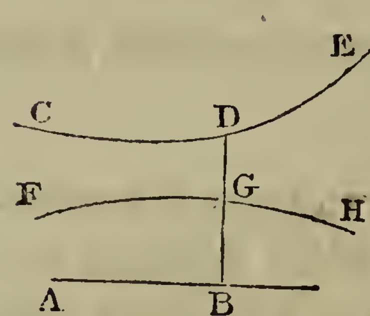
Utiles sunt hæ Propositiones ad tabulas construendas per interpolationem serierum, ut & ad solutiones Problematum quæ à quadraturis Curvarum dependent; præsertim si Ordinatarum intervalla & parva sint & æqualia inter se, & Regulæ computentur, & in usum reserventur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut si quatuor sint Ordinatæ ad æqualia intervalla sitæ, sit A summa primæ & quartæ, B summa secundæ & tertiæ, & R intervallum inter primam & quartam; & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B-A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A+3B}{8}$ R.

Et nota, quòd ubi Ordinatæ stant ad æquales ab invicem distantias, sumendo summas Ordinatarum quæ ab Ordinatâ mediâ hinc inde æqualiter distant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova, cujus area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis est areæ Curvæ prioris, quam invenire oportuit. Quinetiam si pro Ordinatis novis sumantur summa Ordinatæ primæ & secundæ,

SCHOLIUM. ſecundæ, et ſumma tertiæ & quartæ, & ſumma quintæ & ſextæ, & ſic deinceps; vel ſi ſumantur ſumma trium primarum Ordinatarum, & ſumma trium proximarum, & ſumma trium quæ ſunt deinceps; vel ſi ſumantur ſummæ quaternarum Ordinatarum, vel ſummæ quinarum; Area Curvæ novæ æqualis erit areæ Curvæ primò propoſitæ. Et ſic habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quotcunque, quadratura ejus ad quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per data verò puncta quotcunque non ſolùm Curvæ lineæ generis Parabolici, ſed etiam Curvæ lineæ innumeræ diverſorum generum duci poſſunt.

Sunto CDE, FGH Curvæ duæ Abſciſſam habentes communem AB, et Ordinatas in eâdem rectâ jacentes BD, BG; & relatio inter has Ordinatas definiatur per æquationem quamcunque. Dentur puncta quotcunque, per quæ Curva CDE tranſire debet, & per æquationem illam dabuntur puncta totidem nova, per quæ Curva FGH tranſibit. Per propoſitiones ſuperiores deſcribatur Curva FGH generis Parabolici, quæ per puncta illa omnia nova tranſeat; & per æquationem eandem dabitur Curva CDE, quæ per puncta omnia primò data tranſibit.



ENUMERATIO

LINEARUM TERTII ORDINIS.

ARGUMENTI CAPITUM HUJUS LIBRI.

ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS.

CAPUT PRIMUM.

Linearum Ordines.

LINEÆ Geometricæ ſecundum numerum dimenſionum æquationis, quâ relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ ſecari poſſunt, optimè diſtinguuntur in Ordines. Quâ ratione linea Primi Ordinis erit recta ſola; eæ Secundi ſive quadratici Ordinis erunt Sectiones Conicæ & Circulus; & eæ Tertii ſive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Ciſſois Veterum, & reliquæ quas hîc enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi generis (ſiquidem recta inter curvas non eſt numeranda) eadem eſt cum lineâ ſecundi ordinis; & Curva ſecundi generis eadem cum lineâ ordinis tertii. Et linea ordinis infiniteſimi, ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt; qualis eſt Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & linea omnis quæ per radii, vel rotæ, revolutiones infinitas generatur.

CAPUT SECUNDUM.

Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis ſuperiorum generum.

SECTIONUM conicarum proprietates præcipuæ à Geometris paſſim traduntur. Et conſimiles ſunt proprietates Curvarum ſecundi generis, & reliquarum, ut ex ſequenti proprietatum præcipuarum enumeratione conſtabit.

Caput II. 1. *De Curvarum secundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ, & ad Conicam Sectionem utrinque terminatæ, ducantur, recta duas earum bisecans bisecabit alias omnes, ideoque dicitur *Diameter* figuræ; & rectæ bisectæ dicuntur *Ordinatim Applicatæ* ad diametrum; & concursus omnium diametrorum est *Centrum* figuræ; & intersectio Curvæ & Diametri *Vertex* nominatur; & diameter illa *Axis* est, cui ordinatim applicatæ insistunt ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis secundi generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa duarum partium, ex uno secantis latere ad Curvam terminatarum, æquetur parti tertiæ ex altero latere ad Curvam terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas, Curvæque in tribus punctis occurrentes rectas; hoc est, ita ut summa partium duarum, ex uno ipsius latere, semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes, quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim Applicatas*; & rectam secantem, cui ordinatim applicantur, *Diametrum*; & intersectionem diametri & Curvæ, *Verticem*; & concursum duarum diametrorum, *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad ordinatas rectangula, si modò aliqua sit, etiam *Axis* dici potest; & ubi omnes diametri in eodem puncto occurrunt, istud erit *Centrum Generale*.

2. *De Asymptotis & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotos*, ea secundi tres, ea tertii quatuor & non plures habere potest, & sic in reliquis. Et quemadmodum partes lineæ cujusvis rectæ, inter Hyperbolam Conicam & duas ejus Asymptotos, sunt hinc inde æquales: sic in Hyperbolis secundi generis, si ducatur recta quævis secans tam Curvam quàm tres ejus Asymptotos in tribus punctis, summa duarum partium istius rectæ, quæ à duobus quibusvis Asymptotis in eandem plagam ad duo puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ, quæ à tertiâ Asymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. De

3. *De Lateribus Rectis & Transversis.*

De Curvarum Analogia.

Et quemadmodum in Conicis Sectionibus non Parabolicis, quadratum ordinatim applicatæ, hoc est, rectangulum Ordinatarum, quæ ad contrarias partes diametri ducuntur, est ad rectangulum partium diametri, quæ ad vertices Ellipseos vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam linea, quæ dicitur *Latus Rectum*, ad partem diametri, quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus Transversum*: sic in Curvis non Parabolicis secundi generis, parallelepipedum sub tribus ordinatim applicatis est ad parallelepipedum sub partibus diametri, ad ordinatas & tres vertices figuræ abscissis, in ratione quâdam datâ: in quâ ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes diametri, inter vertices figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Latera Recta* figuræ; & illæ partes diametri inter vertices, *Latera Transversa*. Et sicut in Parabolâ Conicâ, quæ ad unam & eandem diametrum unicum tantùm habet verticem, rectangulum sub ordinatis æquatur rectangulo sub parte diametri, quæ ad ordinatas & verticem abscinditur, & rectâ quâdam datâ, quæ *Latus Rectum* dicitur: sic in Curvis secundi generis, quæ non nisi duos habent vertices ad eandem diametrum, parallelopipedum sub ordinatis tribus æquatur parallelopipedo sub duabus partibus diametri, ad ordinatas & vertices illos duos abscissis, & rectâ quâdam datâ, quæ proinde *Latus Rectum* dici potest.

4. *De Ratione contentorum sub parallelarum segmentis.*

Denique sicut in Conicis Sectionibus, ubi duæ parallelæ ad Curvam utrinque terminatæ secantur à duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima à tertiâ, & secunda à quartâ, rectangulum partium primæ est ad rectangulum partium tertiæ ut rectangulum partium secundæ ad rectangulum partium quartæ: sic ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi generis, singulæ in tribus punctis, parallelopipedum partium primæ rectæ erit ad parallelopipedum partium tertiæ, ut parallelopipedum partium secundæ ad parallelopipedum partium quartæ.

5. De

Caput III. 5. *De Cruribus Hyperbolicis & Parabolicis & eorum plagis.*

Curvarum ſecundi & ſuperiorum generum, æquè atque primi, crura omnia, in infinitum progredientia, vel *Hyperbolici* ſunt generis vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco, quod ad Aſymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicum*, quod Aſymptoto deſtituitur. Hæc crura ex tangentibus optimè dignoſcuntur. Nam ſi punctum contactûs in infinitum abeat, tangens cruris Hyperbolici cum Aſymptoto coincidet, & tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evaneſcet, & nullibi reperietur. Invenitur igitur Aſymptotos cruris cujuſvis, quærendo tangentem cruris illius ad punctum infinitè diſtans. Plaga autem cruris infiniti invenitur, quærendo poſitionem rectæ cujuſvis, quæ tangenti parallela eſt, ubi punctum contactûs in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

CAPUT TERTIUM.

Reductio curvarum omnium generis ſecundi ad æquationum caſus quatuor.

1. LINEÆ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, ſeptimi & imparis cujuſque, duo habent ad minimum crura in infinitum verſus plagas oppoſitas progredientia. Et lineæ omnes Tertii ordinis duo habent ejuſmodi crura in plagas oppoſitas progredientia, in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabolâ *Carteſianâ*) tendunt.

CAS. I.

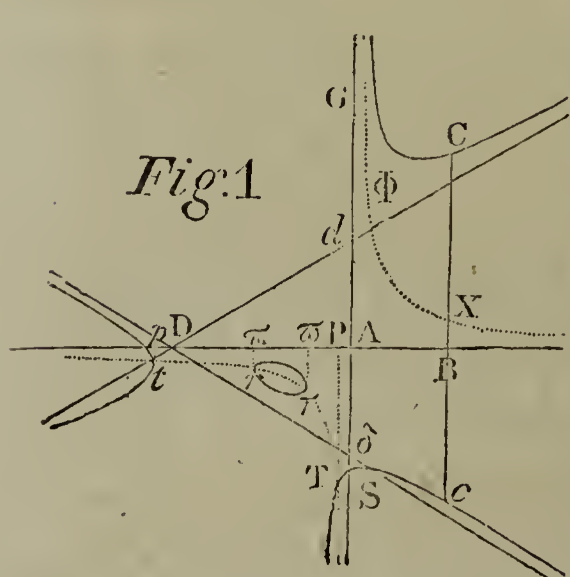


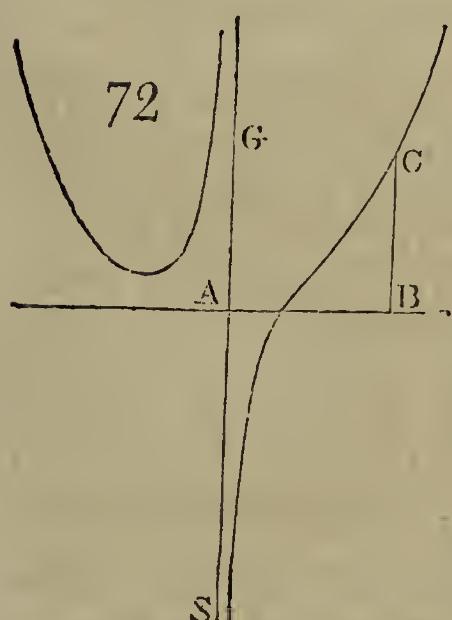
Fig:1

Si crura illa ſint Hyperbolici generis, ſit GAS eorum Aſymptotos; & huic parallela agatur recta quævis, CB*c*, ad Curvam utrinque (ſi fieri poteſt) terminata, eademque biſecetur in puncto X; & locus puncti illius X erit Hyperbola Conica, puta XΦ, cujus una Aſymptotos eſt AG. Sit ejus altera Aſymptotos AB; & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur,

finitur, si AB dicatur x, & BC y, semper induet hanc formam, $xyy+ey=ax^3+bxx+cx+d$. Ubi termini, e, a, b, c, d, designant quantitates datas, signis suis + & − affectas; quarum quælibet deesse possunt, modò ex earum defectu figura in sectionem conicam non vertatur. Potest autem Hyperbola illa Conica cum asymptotis suis coincidere, id est punctum X in rectâ AB locari: & tunc terminus $+ey$ deest. GENERA LINEARUM TERTII ORDINIS.

CAS. II.

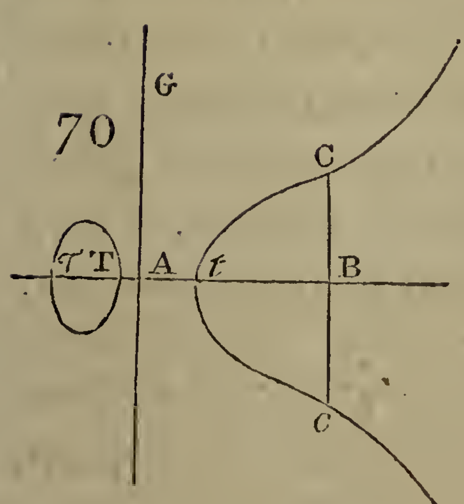
72



At si recta illa CBc non potest utrinque ad Curvam terminari, sed Curvæ in unico tantùm puncto occurrit: age quamvis positione datam rectam, AB, Asymptoto AS occurrentem in A; ut & aliam quamvis, BC, Asymptoto illi parallelam, Curvæque occurrentem in puncto C: & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam, $xy=ax^3+bx^2+cx+d$.

CAS. III.

70

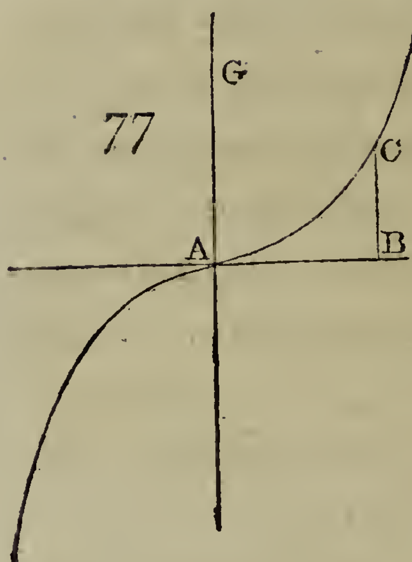


Quòd si crura illa opposita Parabolici sint generis, recta CBc ad Curvam utrinque, si fieri potest, terminata in plagam crurum ducatur, & bisecetur in B: & locus puncti B erit linea recta. Sit ista AB, terminata ad datum quodvis punctum A; & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam, $yy=ax^3+bx^2+cx+d$.

CAS. IV.

At verò si recta illa CBc in unico tantùm puncto occurrat Curvæ,

77



væ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non poſſit: ſit punctum illud C, & incidat recta illa, ad punctum B, in rectam quamvis aliam poſitione datam, & ad datum quodvis punctum A terminatam, AB: & æquatio, quâ relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Nomina formarum.

2. Enumerando Curvas horum caſuum, Hyperbolam vocabimus *Inſcriptam*, quæ tota jacet in Aſymptoton angulo, ad inſtar Hyperbolæ Conicæ; *Circumſcriptam*, quæ Aſymptotos ſecat, & partes abſciſſas in ſinu ſuo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inſcribitur, & altero circumſcribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate ſuâ ſe invicem reſpiciunt, & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate ſuâ ſe invicem reſpiciunt, et in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa ſunt, & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo & cruribus divergentibus ad Aſymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ flexibus contrariis Aſymptoton ſecat, & utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decuſſat; *Nodatam*, quæ ſeipſam decuſſat, in orbem redeundo; *Cuſpidatam*, cujus partes duæ in angulo contactûs concurrunt, & ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet Ovalem infinitè parvam, id eſt punctum; & *Puram*, quæ per impoſſibilitatem duarum radicum, Ovali, Nodo, Cuſpide & Puncto Conjugato privatur. Eodem ſenſu Parabolam quoque *Convergentem*, *Divergentem*, *Cruribus Contrariis præditam*, *Cruciformem*, *Nodatam*, *Cuſpidatam*, *Punctatam* & *Puram* nominabimus.

3. In caſu primo ſi terminus ax^3 affirmativus eſt, figura erit Hyperbola triplex cum ſex cruribus Hyperbolicis, quæ juxta tres Aſymptotos, quarum nullæ ſunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Aſymptoti ſi terminus bx^2 non deeſt, ſe mutuò ſecabunt in tribus

punctis, triangulum D$d\delta$ inter se continentes; sin terminus bx^2 deest, convergent omnes ad idem punctum. In priori casu, cape AD $= \frac{-b}{2a}$, & AD $=$ A$\delta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge D$d$, D$\delta$; & erunt A$d$, D$d$, D$\delta$ tres Asymptoti. In posteriori, duc ordinatam quamvis BC, ordinatæ principali AG parallelam, & in eâ utrinque productâ cape hinc inde BF & Bf sibi mutuò æquales, & in eâ ratione ad AB quam habet $\sqrt{a}$ ad 1; jungeque AF, Af: & erunt AG, AF, Af tres Asymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum hyperbolicorum sectiones conicas superat. GENERA LINEARUM TERTII ORDINIS.

4. In Hyperbolâ omni Redundante, si neque terminus ey desit, neque sit $bb - 4ac$ æquale $\pm ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit diametrum; sin eorum alterutrum accidit, Curva habebit unicam diametrum, & tres si utrumque. Diameter autem semper transit per interfectionem duarum Asymptoton, & bisecat rectas omnes, quæ ad Asymptotos illas utrinque terminantur, & parallelæ sunt Asymptoto tertiæ. Estque abscissa AB diameter figuræ, quoties terminus ey deest. *Diametrum* vero absolutè dictam, hîc & in sequentibus, in vulgari significatu usurpo; nempè pro Abscissâ, quæ passim habet Ordinatas binas æquales ad idem punctum hinc inde insistentes.

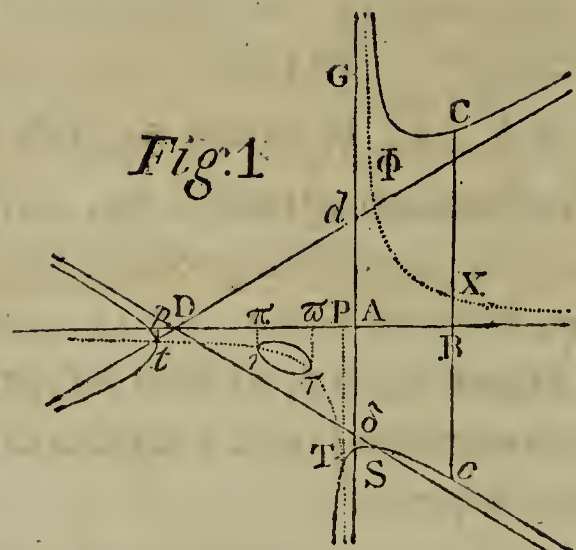
CAPUT QUARTUM.

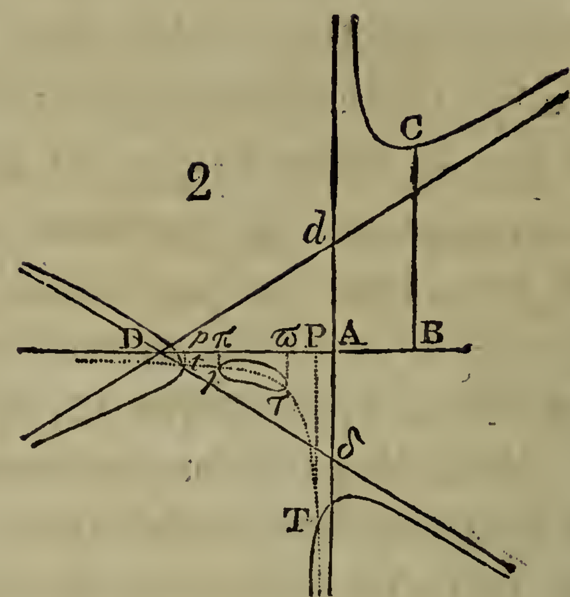
Enumeratio Curvarum.

I. *De Hyperbolis novem Redundantibus, quæ diametro destituuntur, & tres habent Asymptotos triangulum capientes.*

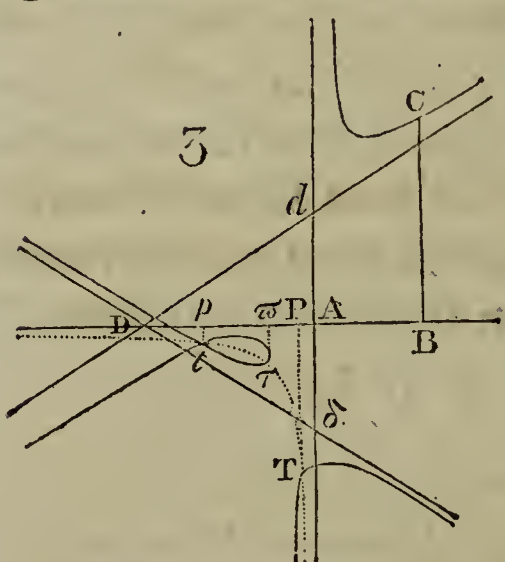
1. SI Hyperbola Redundans nullam habet diametrum, quærantur æquationis hujus $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = y$ radices quatuor, seu valores ipsius x. Eæ sunto AP, Aϖ, Aπ, Ap. Erigantur Ordinatæ PT, $\varpi\tau$, $\pi\tau$, pt, & hæ tangent Curvam in punctis totidem T, τ, τ, t, & tangendo dabunt limites Curvæ, per quos Species ejus innotescet.

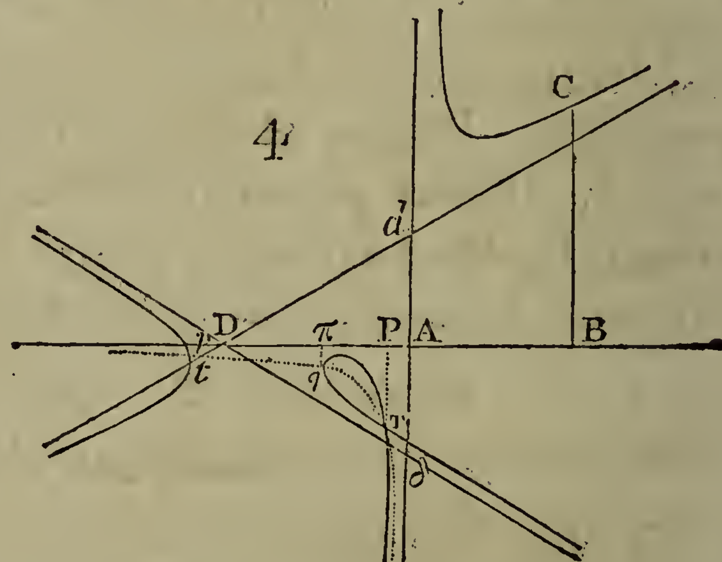
2. Nam si radices omnes AP, Aϖ, Ap, (fig. 1, 2) sunt reales, ejusdem signi, et inæquales, Curva constat ex tribus Hyperbolis, (Inscriptâ, Circumscriptâ & Ambigenâ) cum *Ovali*. Hyperbolarum una jacet versus D; altera versus d; tertia versus δ; & Ovalis semper jacet intra triangulum D$d\delta$, atque etiam inter medios limites τ & τ, in quibus utique tangitur ab Ordinatis $\pi\tau$ & $\varpi\tau$. Et hæc est *species prima*.





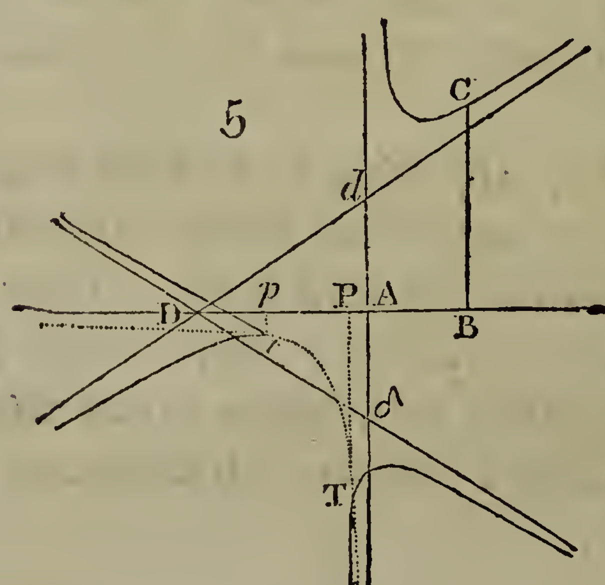
3. Si è radicibus duæ maximæ Aπ, Ap, (fig. 3) vel duæ minimæ AP, Aϖ, (fig. 4) æquantur inter ſe, & ejuſdem ſunt ſigni cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola Circumſcripta ſibi

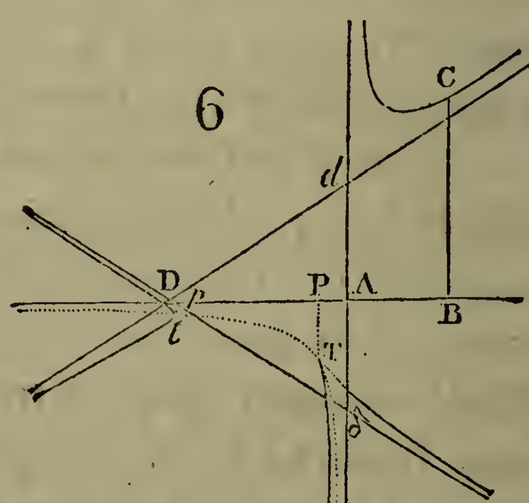




invicem junguntur, coeuntibus earum punctis contactûs, 7 & t, vel T & τ; & crura Hyperbolæ, ſeſe decuſſando, in Ovalem continuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *ſpecies* eſt *ſecunda.*

4. Si è radicibus tres maximæ Ap, Aπ, Aϖ, (fig. 5) vel tres



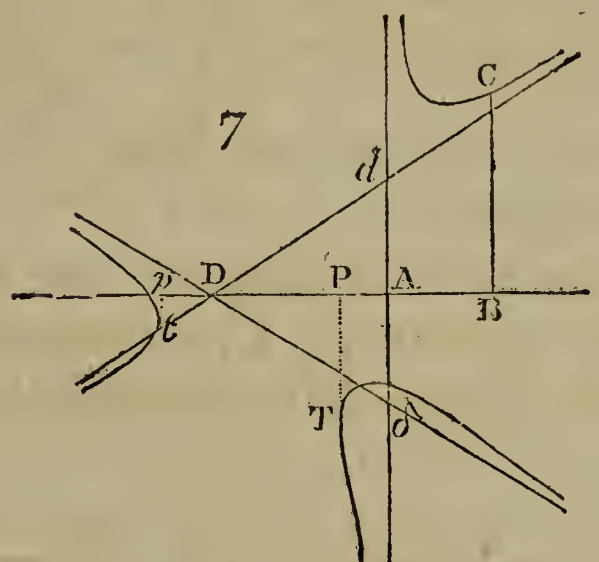


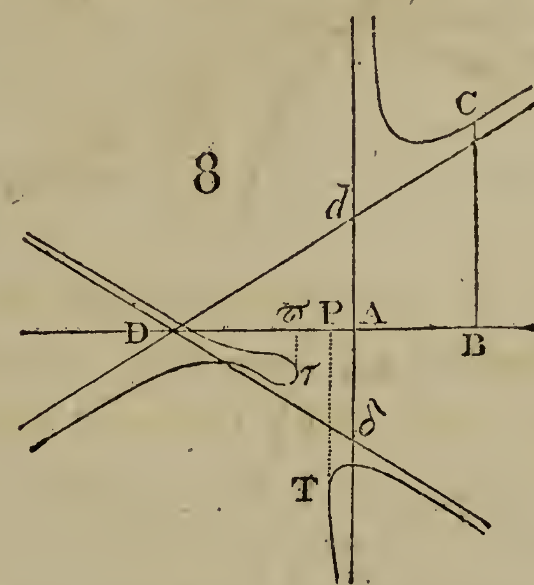
minimæ

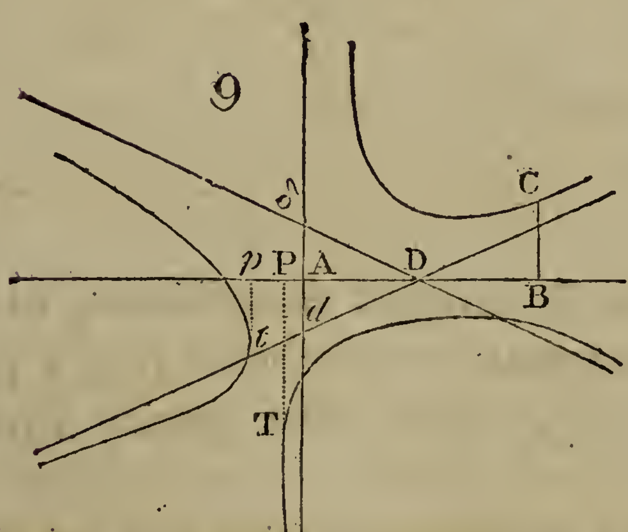
minimæ Aπ, Aϖ, AP (fig. 6) æquentur inter ſe, Nodus in *Cuſpidem* acutiſſimum convertetur. Nam crura duo Hyperbolæ Circumſcriptæ ibi in angulo contactûs concurrent, & non ultrà producentur. Et hæc eſt *ſpecies tertia.*

Species Linearum Tertii Ordinis.

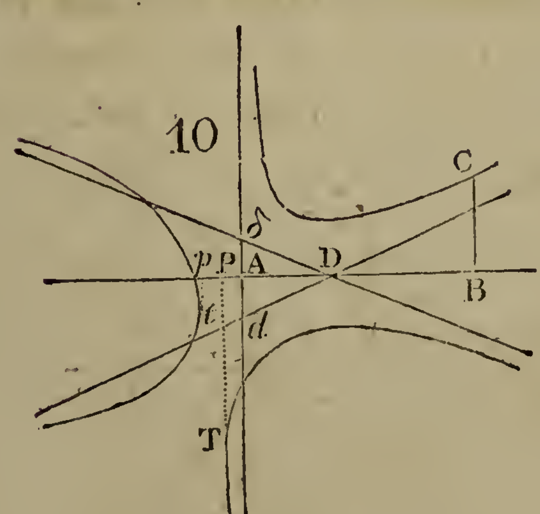
5. Si è radicibus duæ mediæ Aϖ & Aπ (fig. 7) æquentur inter







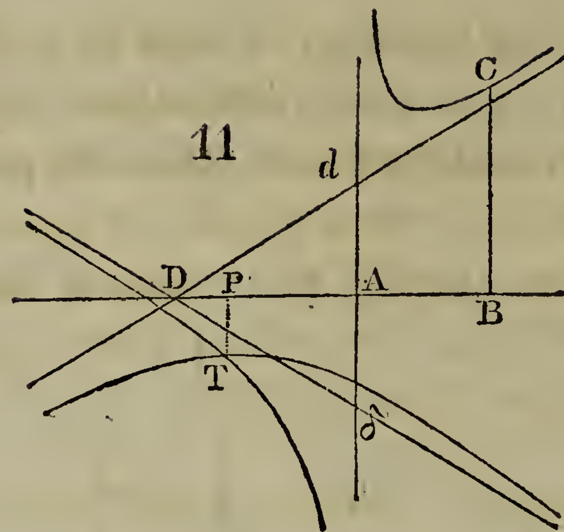
ſe, puncta contactûs τ & 7 coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in punctum evanuit; & conſtat figura ex tribus Hyperbolis, Inſcriptâ, Circumſcriptâ, & Ambigenâ, cum *puncto* conjugato. Quæ eſt *ſpecies quarta.*



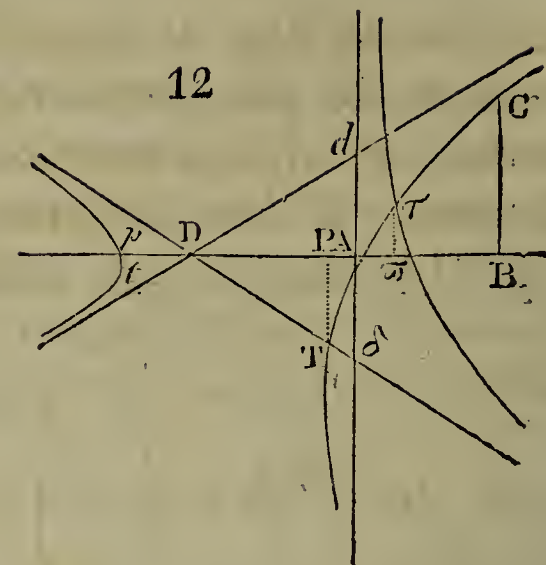
6. Si duæ ex radicibus ſunt impoſſibiles, & reliquæ duæ inæquales, & ejuſdem ſigni (nam ſigna contraria habere nequeunt), *Puræ* habebuntur Hyperbolæ tres, ſine Ovali vel Nodo vel Cuſpide vel puncto conjugato: & hæ Hyperbolæ vel ad latera trianguli ab Aſymptotis comprehenſi, vel ad angulos ejus jacebunt; & perinde *ſpeciem* vel *quintam* (fig. 7, 8) vel *ſextam* (fig. 9, 10) conſtituent.

7. Si è radicibus duæ ſunt æquales, & alteræ duæ vel impoſſibiles ſunt (fig. 11. 13) vel reales (fig. 12. 14) cum ſignis quæ à ſignis æqualium radicum diverſa ſunt, figura *Cruciformis* habebitur:

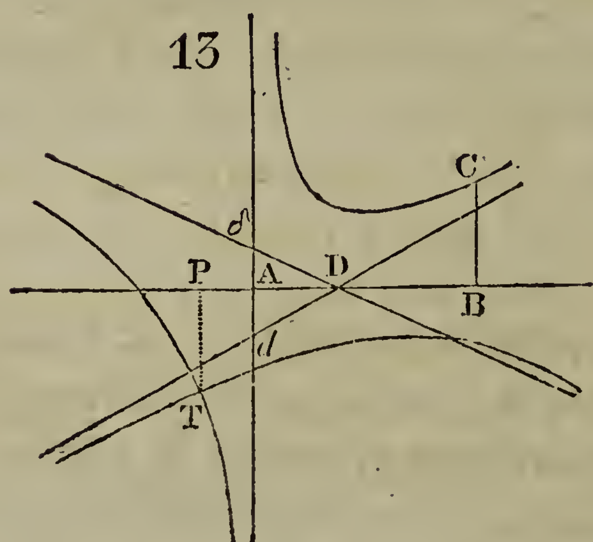
11



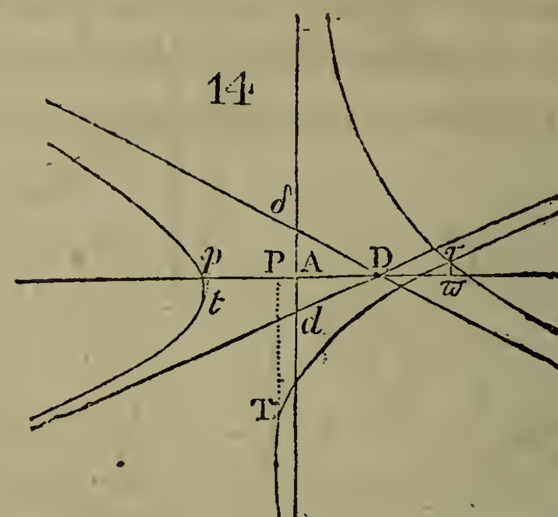
12



13



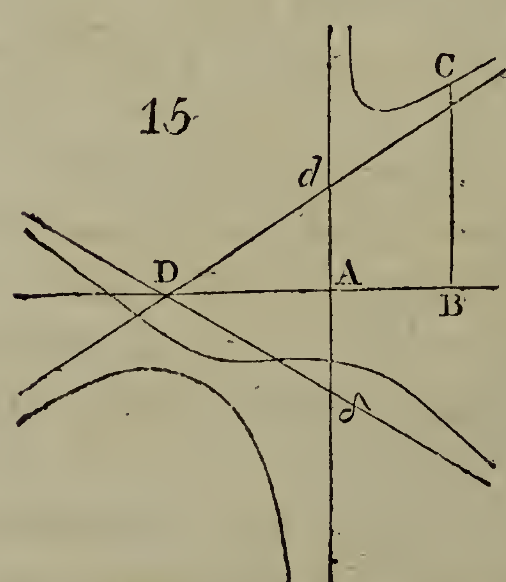
14



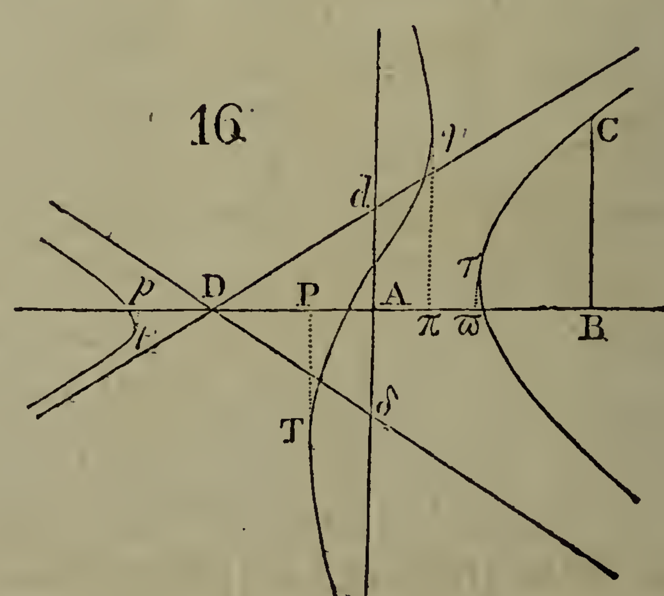
bebitur: nempe duæ ex Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt, idque vel ad verticem trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 13, 14) vel ad ejus baſem (fig. 11, 12). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *ſeptima* & *octava*.

8. Si denique radices omnes ſunt impoſſibiles (fig. 15) vel ſi

15



16



omnes

omnes ſunt reales & inæquales (fig. 16) & earum duæ ſunt affirmativæ, & alteræ duæ negativæ; tunc duæ habebuntur Hyperbolæ, ad angulos oppoſitos duarum Aſymptoton, cum Hyperbolâ *Anguineâ* circa Aſymptoton tertiam. Quæ *ſpecies* eſt *nona*.

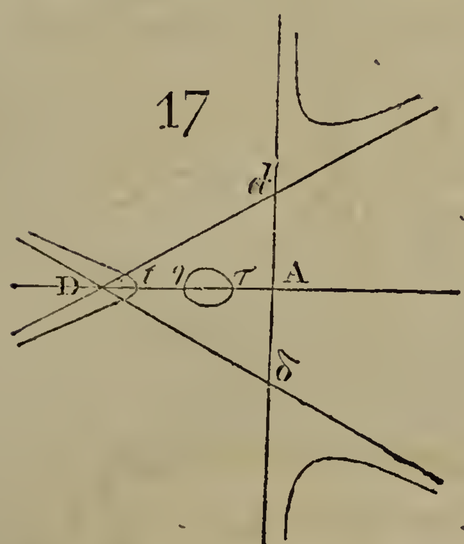
SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

9. Et hi ſunt omnes radicum caſus poſſibiles. Nam ſi duæ radices ſunt æquales inter ſe, & aliæ duæ ſunt etiam inter ſe æquales, figura evadet Sectio Conica cum lineâ rectâ.

II. *De Hyperbolis duodecim Redundantibus unicam tantùm diametrum habentibus.*

1. Si Hyperbola Redundans habet unicam tantùm diametrum, ſit ejus diameter Abſciſſa AB, & æquationis hujus $ax^3+bx^2+cx+d=0$ quære tres radices, ſeu valores x.

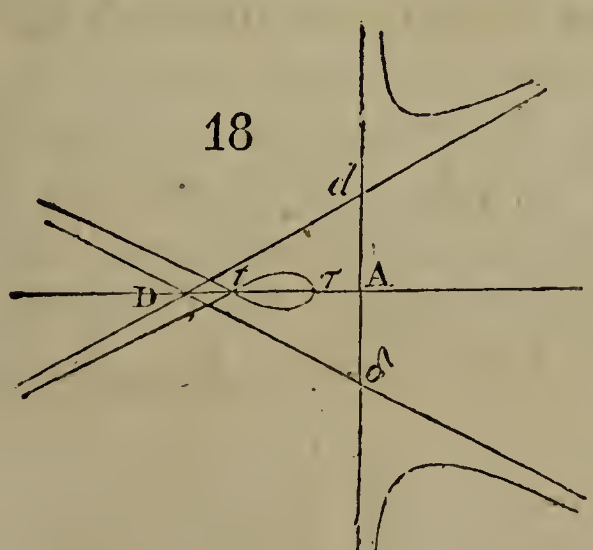
17



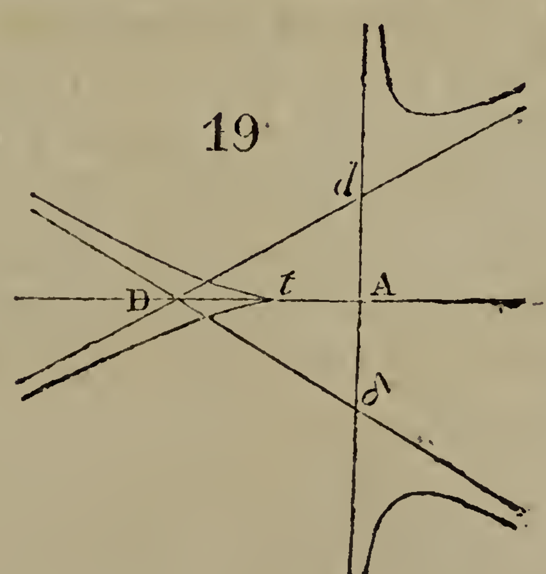
2. Si radices illæ ſunt omnes reales & ejuſdem ſigni, figura conſtabit ex *Ovali* intra triangulum D$d\delta$ (fig. 17) jacente, & tribus Hyperbolis ad angulos ejus; nempe Circumſcriptâ ad angulum D, & Inſcriptis duabus ad angulos d & δ. Et hæc eſt *ſpecies decima*.

3. Si radices duæ majores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni, crura Hyperbolæ jacentis verſus D (fig. 18) ſeſe decuſſabunt in formâ *Nodi*, propter contactum Ovalis. Quæ *ſpecies* eſt *undecima*.

18



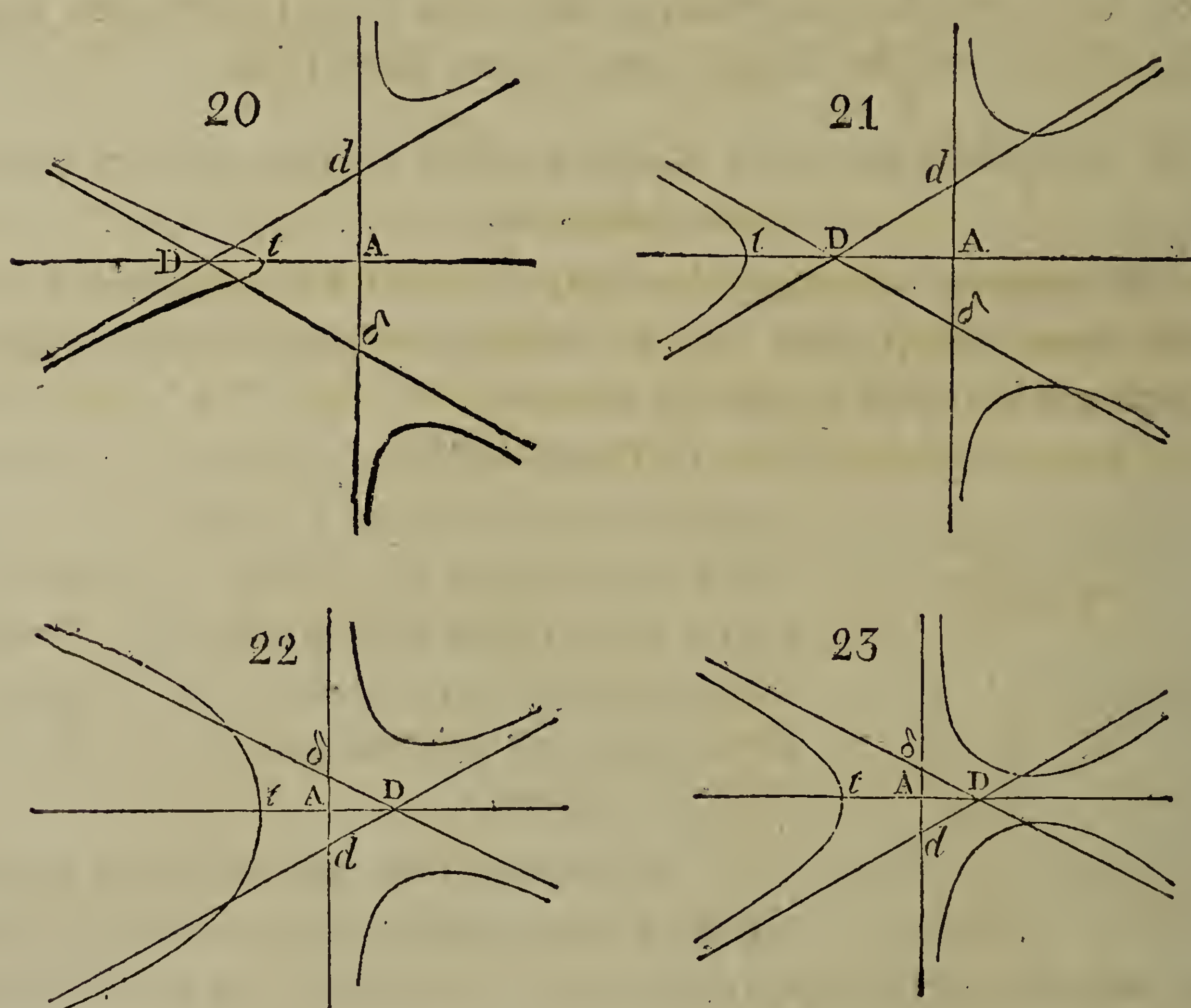
19



4. Si tres radices ſunt æquales, Hyperbola iſta fit *Cuſpidata* ſine Ovali (fig. 19). Quæ *ſpecies* eſt *duodecima*.

Caput IV. 5. Si radices duæ minores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni, Ovalis in *punctum* evanuit (fig. 20). Quæ *ſpecies* eſt *decima tertia*.

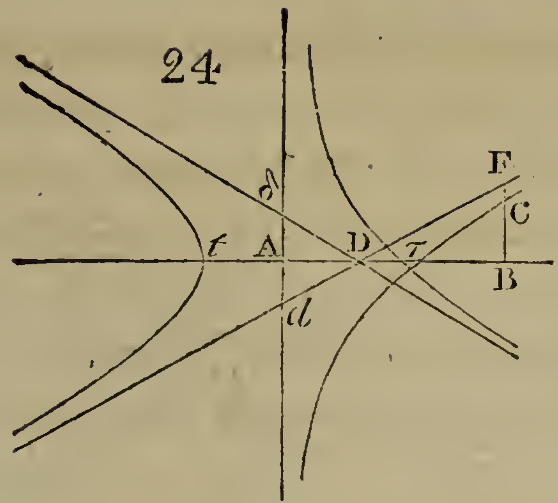
6. In ſpeciebus quatuor noviſſimis, Hyperbola, quæ jacet verſus D, Aſymptotos in ſinu ſuo amplectitur; reliquæ duæ in ſinu Aſymptoton jacent.

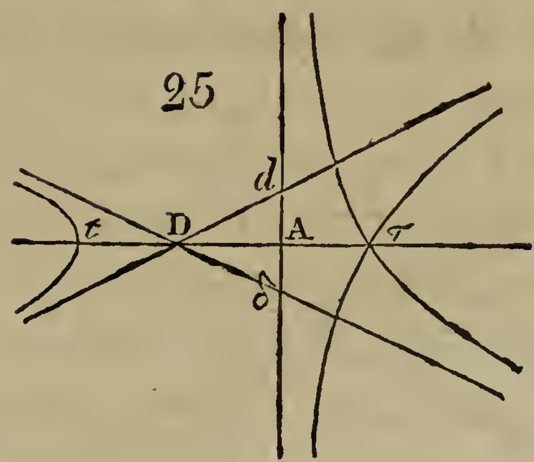


7. Si duæ ex radicibus ſunt impoſſibiles, habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ* ſine Ovali, Decuſſatione, vel Cuſpide. Et hujus caſûs *ſpecies* ſunt quatuor: nempe *decima quarta* ſi Hyperbola Circumſcripta jacet verſus D (fig. 20), & *decima quinta* ſi Hyperbola Inſcripta jacet verſus D (fig. 21), *decima ſexta* ſi Hyperbola Circumſcripta jacet ſub baſi $d\delta$ trianguli $\mathrm{D}d\delta$ (fig. 22), & *decima ſeptima* (fig. 23) ſi Hyperbola Inſcripta jacet ſub eâdem baſi.

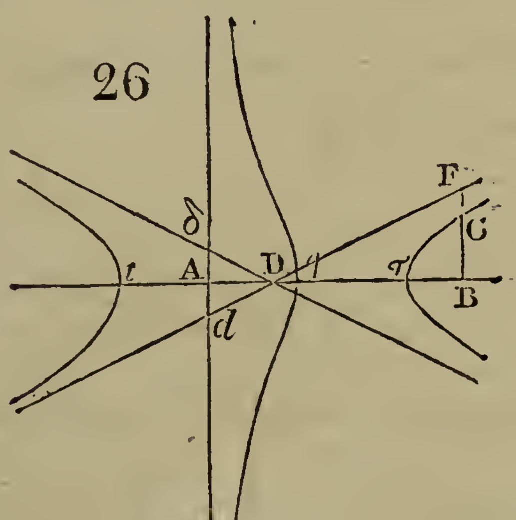
8. Si

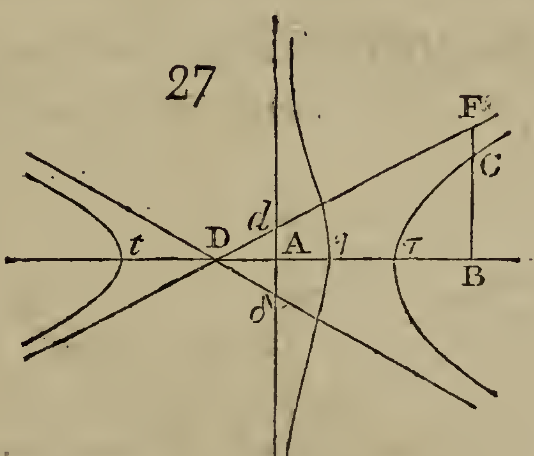
SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.





8. Si duæ radices sunt æquales, & tertia signi diversi, figura erit *Cruciformis*. Nempe duæ ex tribus Hyperbolis se invicem decussabunt, idque vel ad verticem trianguli ab Asymptotis comprehensi (fig. 24) vel ad ejus basem (fig. 25). Quæ duæ *species* sunt *decima octava*, & *decima nona*.



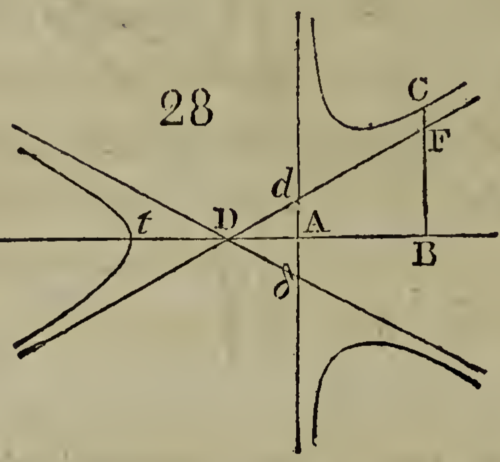


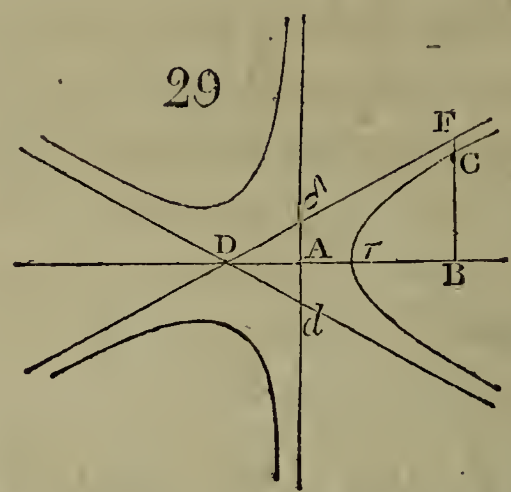
9. Si duæ radices sunt inæquales, & ejusdem signi, & tertia est signi diversi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppositis angulis duarum Asymptoton, cum *Conchoidali* intermediâ. *Conchoidalis* autem vel jacebit ad easdem partes Asymptoti suæ cum triangulo ab Asymptotis constituto (fig. 26) vel ad partes contrarias (fig. 27). Et hi duo casus constituunt *speciem vigesimam* & *vigesimam primam*.

III. De

Caput IV.

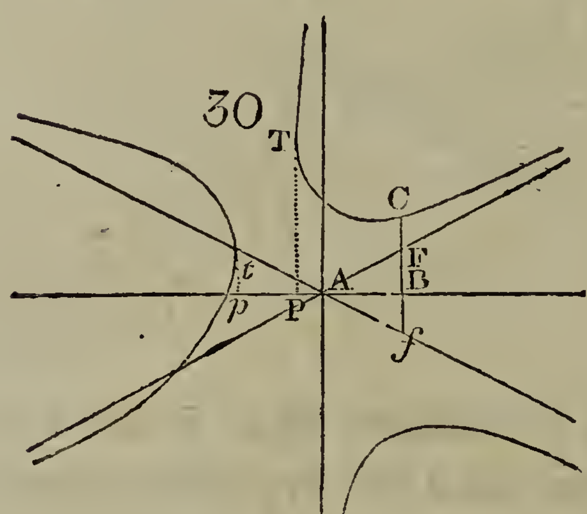
III. *De Hyperbolis duabus Redundantibus cum tribus diametris.*

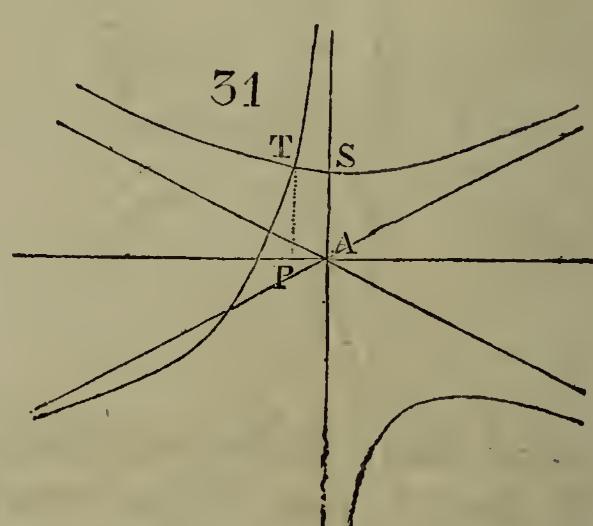


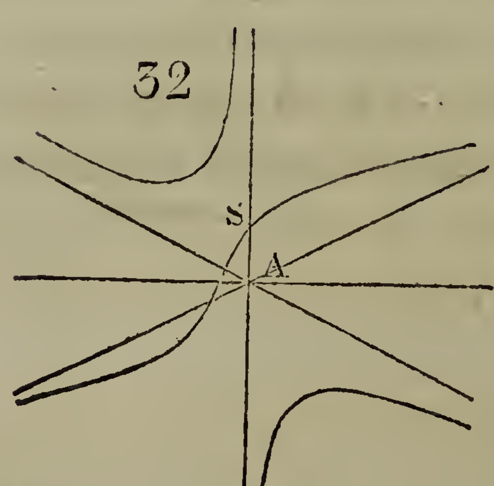


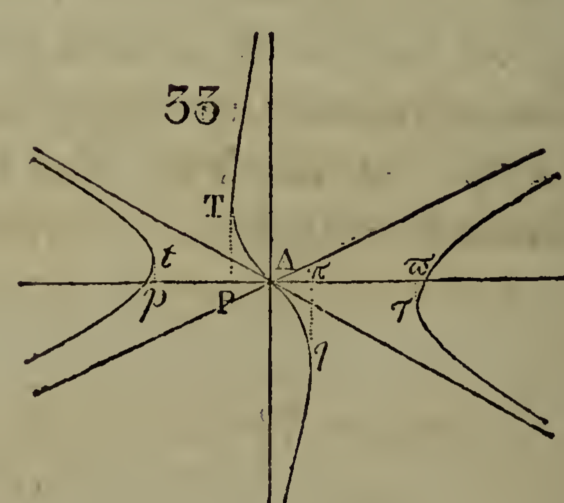
1. Hyperbola Redundans quæ habet tres diametros, conſtat ex tribus Hyperbolis in ſinubus Aſymptoton jacentibus; idque vel ad angulos trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (fig. 28) vel ad ejus latera (fig. 29). Caſus prior dat *ſpeciem vigeſimam ſecundam*, & poſterior *ſpeciem vigeſimam tertiam.*

IV. *De Hyperbolis novem Redundantibus cum Aſymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.*







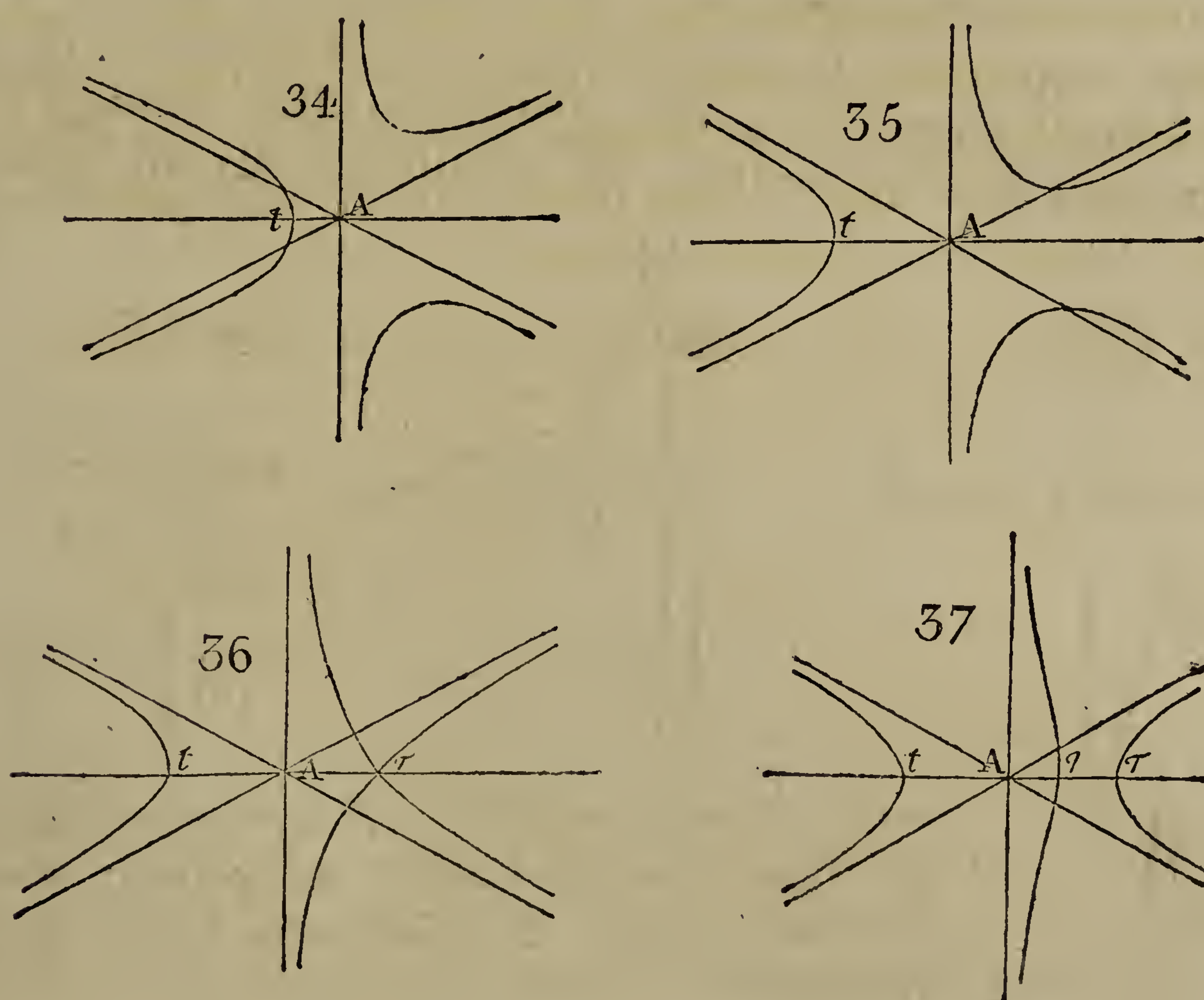


1. Si

1. Si tres Asymptoti in puncto communi se mutuò decussant, vertuntur species quinta & sexta in *vigesimam quartam* (fig. 30), septima & octava in *vigesimam quintam* (fig. 31), & nona in *vigesimam sextam* (fig. 32), ubi Anguinea non transit per concursum Asymptoton; & in *vigesimam septimam* ubi transit per concursum illum (fig. 33), quo casu termini *b* ac *d* desunt, & concursus Asymptoton est Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus opposi-tis æqualiter distans. Et hæ quatuor species diametrum non habent.

Species Linearum Tertii Ordinis.

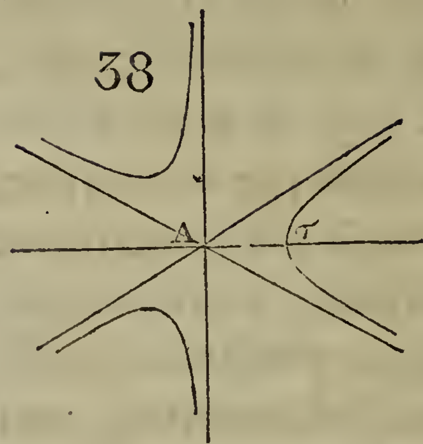
2. Vertuntur etiam *species* decima quarta ac decima sexta in



vigesimam octavam (fig. 34); decima quinta ac decima septima in *vigesimam nonam* (fig. 35); decima octava & decima nona in *tricesimam* (fig. 36), & vigesima cum vigesimâ primâ in *tricesimam primam* (fig. 37). Et hæ species unicam habent diametrum.

3. Ac denique species vigesima secunda & vigesima tertia ver-

Caput IV.

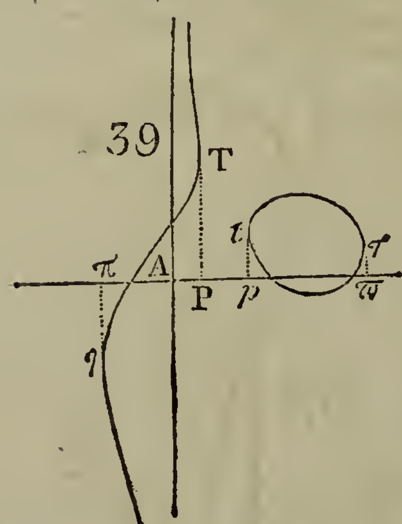


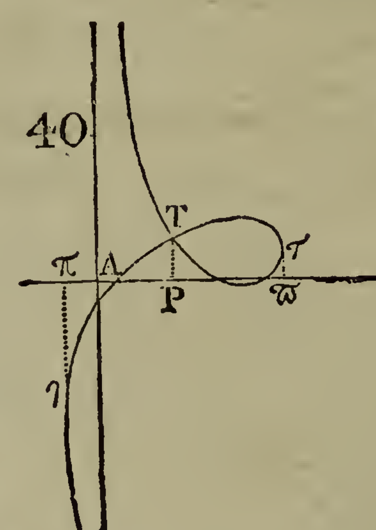
tuntur in *ſpeciem triceſimam ſecundam*, cujus tres ſunt diametri per concurſum Aſymptoton tranſeuntes (fig. 38).

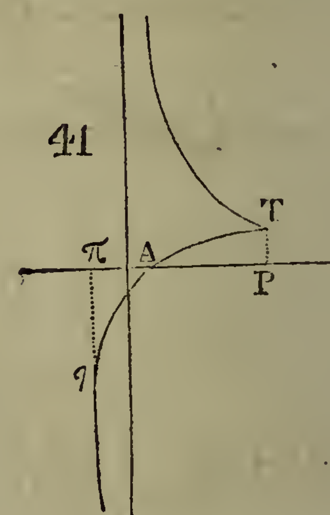
4. Quæ omnes converſiones facillimè intelliguntur, faciendo ut triangulum ab Aſymptotis comprehenſum diminuatur donec in punctum evaneſcat.

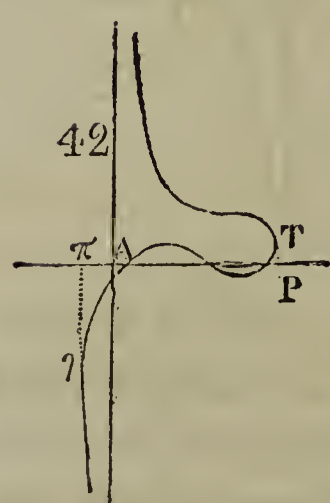
V. *De Hyperbolis ſex Defectivis diametrum non habentibus.*

1. Si in primo æquationum caſu terminus ax^3 negativus eſt, figura erit Hyperbola Defectiva unicam habens Aſymptoton & duo tantùm crura hyperbolica, juxta Aſymptoton illam, in plagas contrarias infinitè progredientia. Et Aſymptotos illa eſt ordinata









prima & principalis AG. Si terminus ey non deeſt, figura nullam habebit diametrum; ſi deeſt, habebit unicam. In priori caſu ſpecies ſic enumerantur.

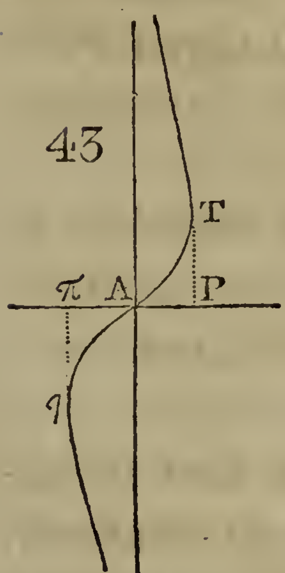
2. Si æquationis hujus $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ radices omnes Aπ, AP, Ap, Aϖ, (fig. 39) ſunt reales & inæquales, figura erit Hyperbola Anguinea, Aſymptoton flexu contrario amplexa, cum *Ovali* conjugatâ. Quæ *ſpecies* eſt *triceſima tertia*.

3. Si radices duæ mediæ AP & Ap (fig. 40) æquentur inter ſe, Ovalis & Anguinea junguntur, ſeſe decuſſantes in formâ *Nodi*. Quæ eſt *ſpecies triceſima quarta*.

I 4. Si

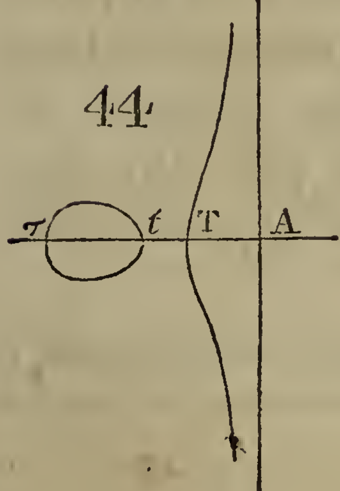
4. Si tres radices ſunt æquales, Nodus vertetur in *Cuſpidem* acutiſſimum in vertice Anguineæ (fig. 41). Et hæc eſt *ſpecies triceſima quinta.* SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

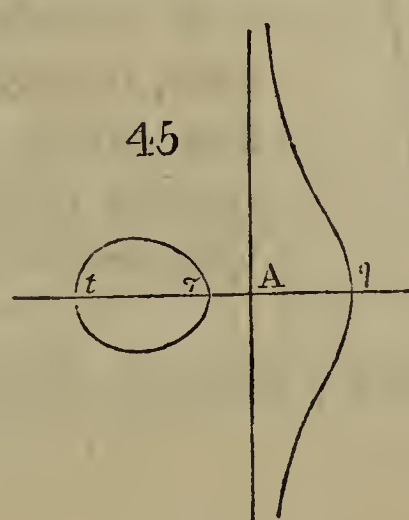
5. Si è tribus radicibus ejuſdem ſigni duæ maximæ Ap & Aϖ (fig. 43) ſibi mutuò æquantur, Ovalis in *punctum* evanuit. Quæ *ſpecies* eſt *triceſima ſexta.*

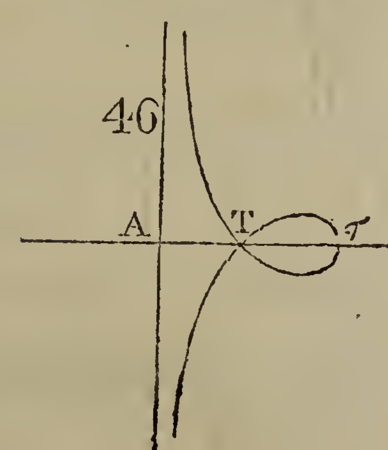


6. Si radices duæ quævis imaginariæ ſunt, ſola manebit Anguinea *Pura* ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide vel puncto conjugato. Si Anguinea illa non tranſit per punctum A (fig. 42), *ſpecies* eſt *triceſima ſeptima*; ſin tranſit per punctum illud A (id quod contingit ubi termini b ac d deſunt), punctum illud A erit Centrum figuræ, rectas omnes per ipſum ductas & ad Curvam utrinque terminatas biſecans (fig. 43). Et hæc eſt *ſpecies triceſima octava.*

VI. *De Hyperbolis ſeptem Defectivis diametrum habentibus.*





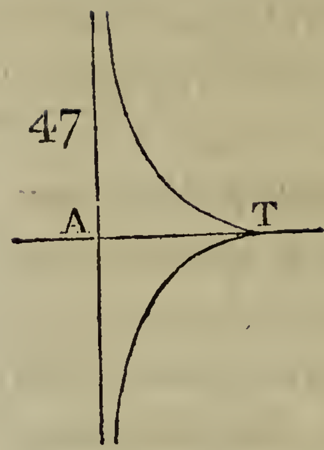


1. In altero caſu ubi terminus ey deeſt, & propterea figura diametrum habet, ſi æquationis hujus $ax^3=bx^2+cx+d$ radices omnes AT, At, Aτ, (fig. 44) ſunt reales, inæquales & ejuſdem ſigni, figura erit Hyperbola Conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ eſt *ſpecies triceſima nona.*

2. Si duæ radices ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni contrarii, *Ovalis* jacebit ad Concavitatem conchoidalis (fig. 45). Eſtque *ſpecies quadrageſima.*

3. Si radices duæ minores AT, At, (fig. 46) ſunt æquales, & tertia

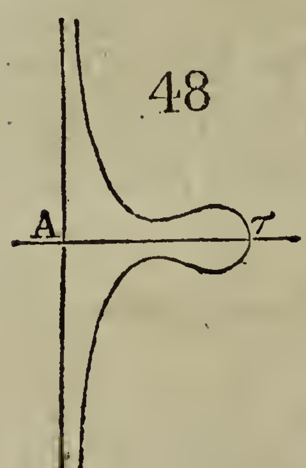
CAPUT IV.

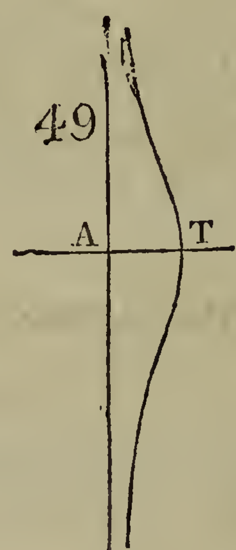


tertia AT eſt ejuſdem ſigni, Ovalis & Conchoidalis jungentur, ſeſe decuſſando in modum *Nodi*. Quæ *ſpecies* eſt *quadrageſima prima*.

4. Si tres radices ſunt æquales, Nodus mutabitur in *Cuſpidem*, & figura erit *Ciſſois Veterum* (fig. 47). Et hæc eſt *ſpecies quadrageſima ſecunda*.

5. Si radices duæ majores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni, Conchoidalis habebit *punctum* conjugatum ad convexitatem ſuam (fig. 49). Eſtque *ſpecies quadrageſima tertia*.

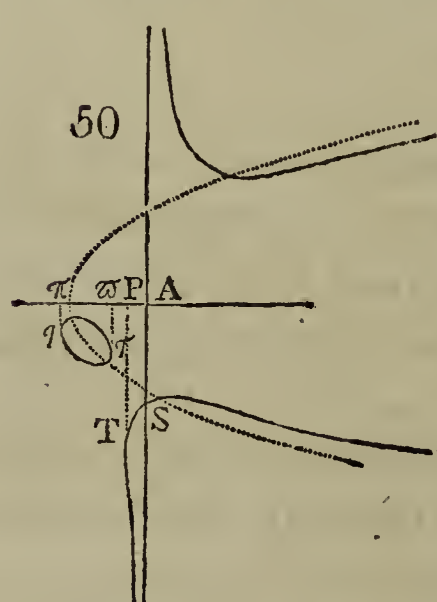


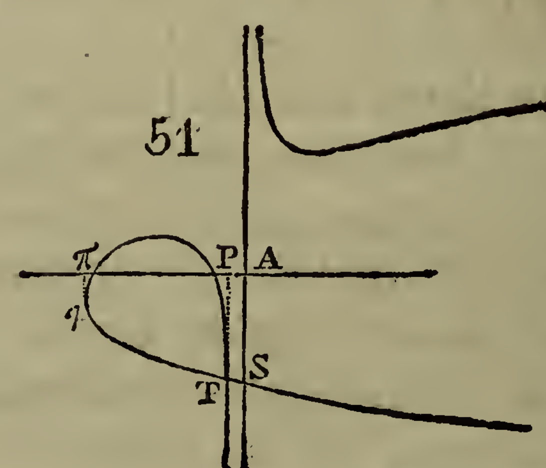


6. Si radices duæ ſunt æquales, & tertia eſt ſigni contrarii, Conchoidalis habebit *punctum* conjugatum ad concavitatem ſuam (fig. 49). Eſtque *ſpecies quadrageſima quarta*.

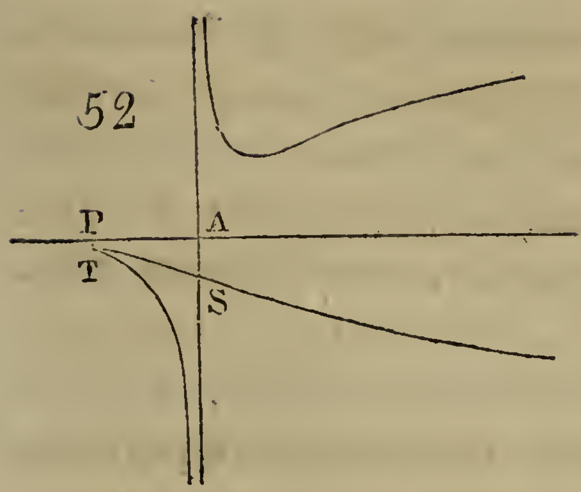
7. Si radices duæ ſunt impoſſibiles, habebitur Conchoidalis *Pura* ſine Ovali, Nodo, Cuſpide vel puncto conjugato (fig. 48, 49). Quæ *ſpecies* eſt *quadrageſima quinta*.

VII. *De Hyperbolis ſeptem Parabolicis diametrum non habentibus.*





1. Siquando in primo æquationum caſu terminus ax^3 deeſt, & terminus

52


terminus bx^2 non deest, figura erit Hyperbola Parabolica, duo habens crura Hyperbolica ad unam Asymptoton SAG, & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si terminus ey non deest, figura nullam habebit diametrum; sin deest, habebit unicam. In priori casu species sunt hæ.

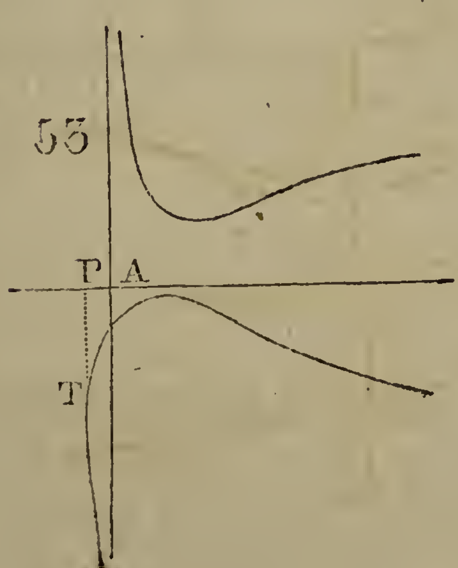
Species Linearum Tertii Ordinis.

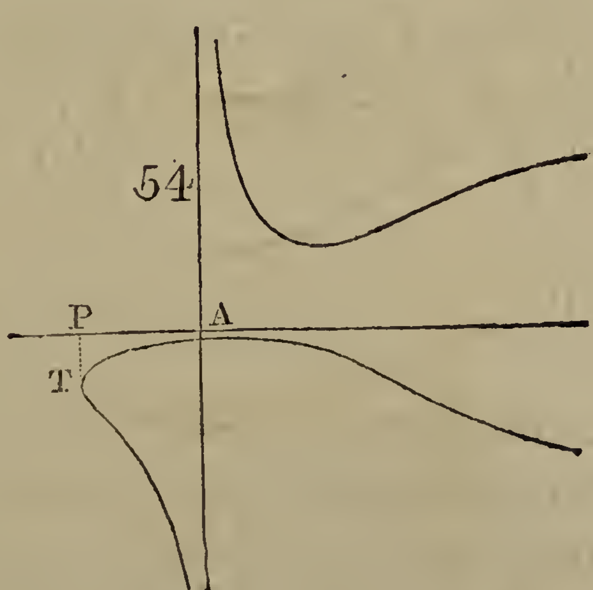
2. Si tres radices AP, Aϖ, Aπ (fig. 50) æquationis hujus $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ sunt inæquales & ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* & aliis duabus Curvis, quæ partim Hyperbolicæ sunt & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cruribus Hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *species quadragesima sexta.*

3. Si radices duæ minores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Ovalis & una Curvarum illarum hyperbolo-parabolicarum junguntur, & se decussant in formam *Nodi* (fig. 51). Quæ *species* est *quadragesima septima.*

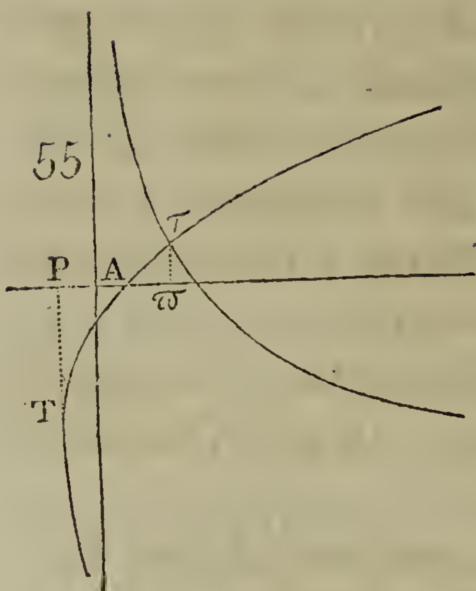
4. Si tres radices sunt æquales, Nodus ille in Cuspidem vertitur (fig. 52). Estque *species quadragesima octava.*

5. Si radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Ovalis in *punctum* conjugatum evanuit (fig. 53). Quæ species est *quadragesima nona.*

53


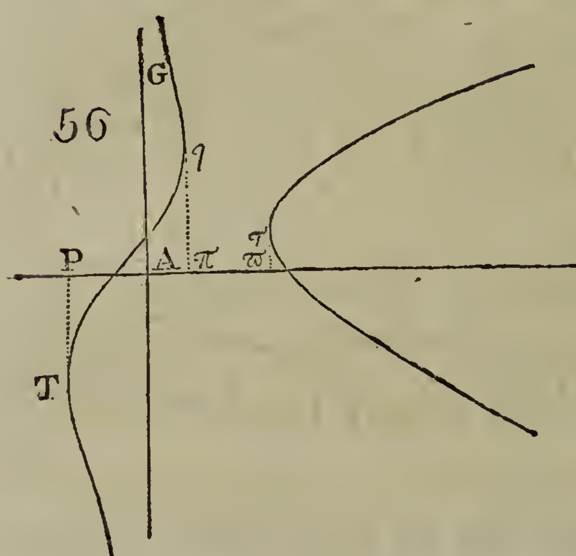
54


6. Si



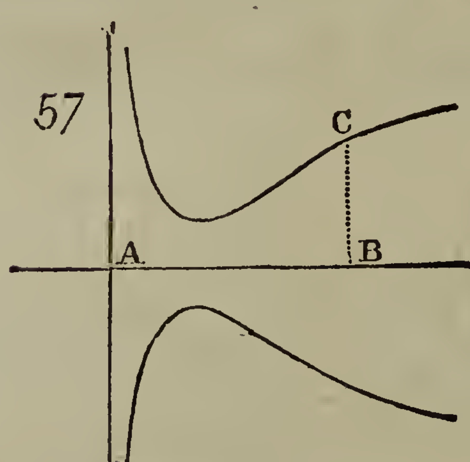
6. Si duæ radices ſunt impoſſibiles, manebunt *Puræ* illæ duæ Curvæ hyperbolo-parabolicæ ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide vel puncto conjugato; & *ſpeciem quinquageſimam* conſtituent (fig. 53, 54.)

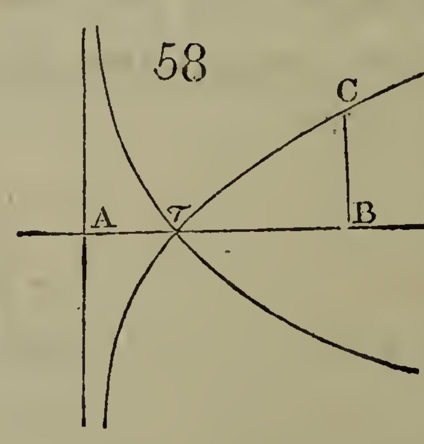
7. Si radices duæ ſunt æquales, & tertia eſt ſigni contrarii, Curvæ illæ hyperbolo-parabolicæ junguntur, ſeſe decuſſando in morem crucis (fig. 55). Eſtque *ſpecies quinquageſima prima.*

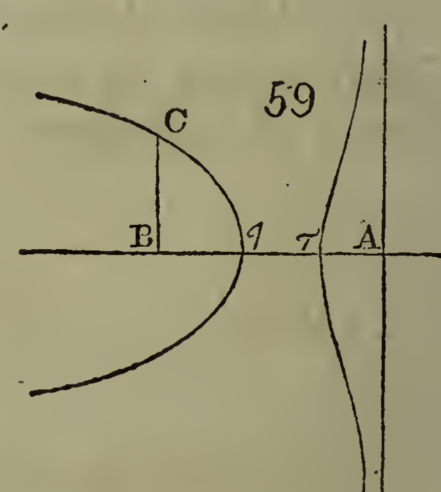


8. Si radices duæ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni contrarii, figura evadet Hyperbola Anguinea circa Aſymptoton AG (fig. 56), cum Parabolâ conjugatâ. Et hæc eſt *ſpecies quinquageſima ſecunda.*

VIII. *De Hyperbolis quatuor Parabolicis diametrum habentibus.*







1. In altero caſu ubi terminus ey deeſt, & figura diametrum habet, ſi duæ radices æquationis hujus $bx^2+cx+d=0$ ſunt impoſſibiles, duæ habentur figuræ hyperbolo-parabolicæ à diametro AB (fig. 57) hinc inde æqualiter diſtantes. Quæ *ſpecies* eſt *quinquageſima tertia.*

2. Si

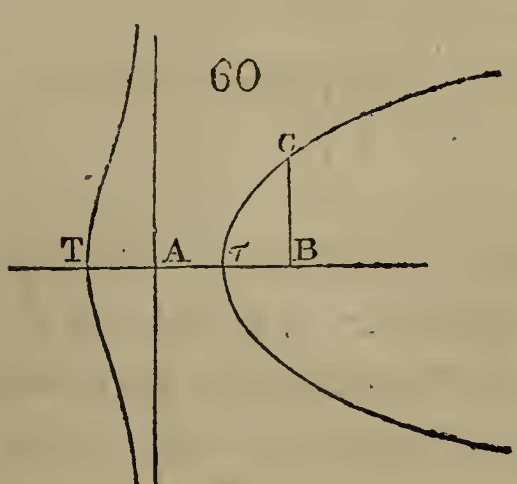
2. Si æquationis illius radices duæ funt impoffibiles, figuræ hyperbolo-parabolicæ junguntur, fefe decuffantes in morem crucis; & *fpeciem quinquagefimam quartam* conftituunt (fig. 58). SPECIES LINEARUM TERTII ORDINIS.

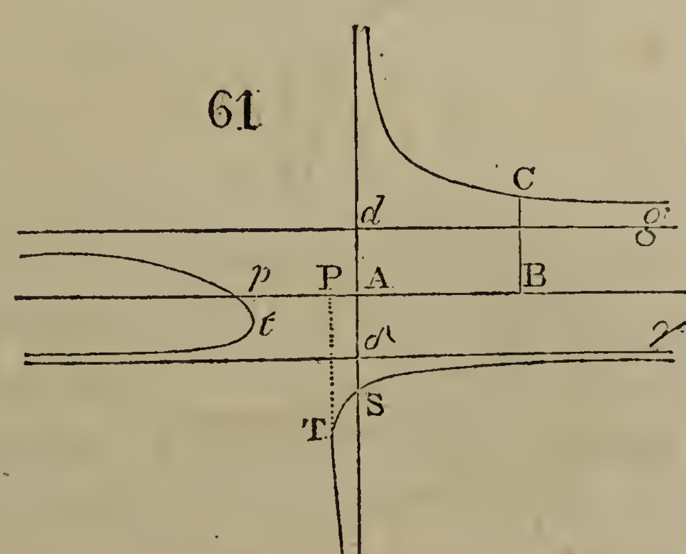
3. Si radices illæ funt inæquales & ejufdem figni, habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabolâ ex eodem latere Afymptoti (fig. 59). Eftque *fpecies quinquagefima quinta*.

4. Si radices illæ funt figni contrarii, habetur Conchoidalis cum Parabolâ ad alteras partes Afymptoti (fig. 60). Quæ *fpecies* eft *quinquagefima fexta*.

IX. *De quatuor Hyperbolifmis Hyperbolæ.*

1. Siquando in primo æquationum cafu terminus uterque ax^3 & bx^2 deeft, figura erit Hyperbolifmus fectionis alicujus conicæ. Hyperbolifmum figuræ voco, cujus Ordinata prodit applicando contentum fub Ordinatâ figuræ illius & rectâ datâ ad Abfciffam communem. Hâc ratione linea recta vertitur in Hyperbolam Conicam, & Sectio omnis Conica vertitur in aliquam figurarum, quas hîc Hyperbolifmos fectionum conicarum voco. Nam æquatio ad figuras de quibus agimus, nempe $xy^2+ey=cx+d$, dat





$y=\frac{c\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2x}$, quæ generatur applicando contentum fub Ordinatâ fectionis conicæ $\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2m}$ & rectâ datâ m, ad Curvarum Abfciffam communem x. Unde liquet, quòd figura genita Hyperbolifmus erit Hyperbolæ, Ellipfeos vel Parabolæ, perinde ut terminus cx affirmativus eft, vel negativus, vel nullus.

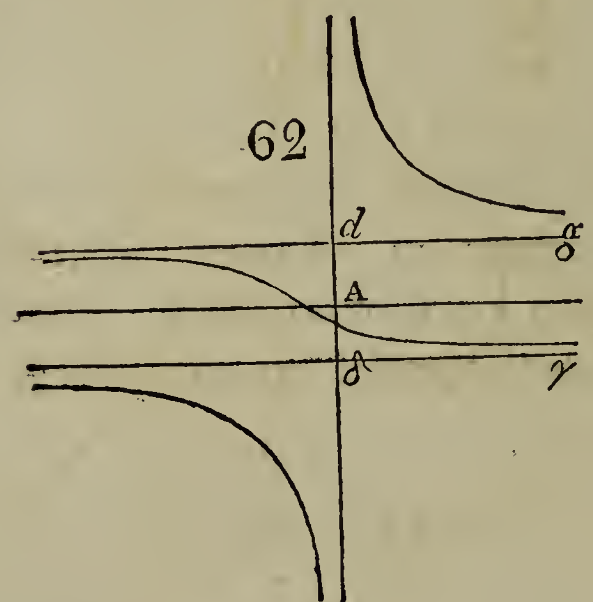
2. Hyper-

Caput IV.

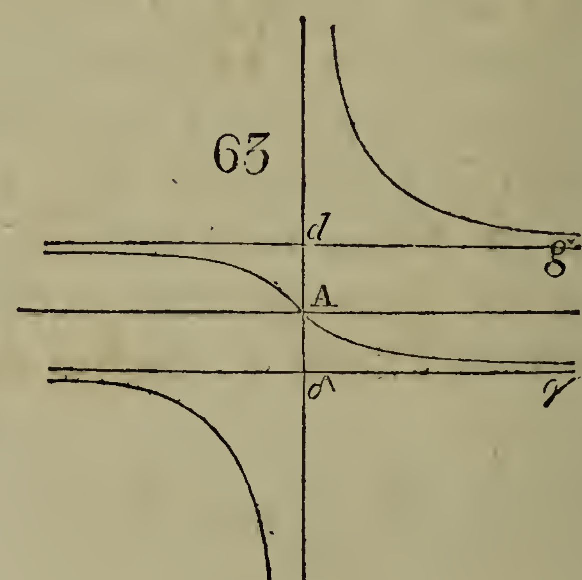
2. Hyperboliſmus Hyperbolæ tres habet Aſymptotos; quarum una eſt Ordinata prima & principalis Ad, alteræ duæ ſunt parallelæ Abſciſſæ AB, ab eâdem hinc inde æqualiter diſtantes. In Ordinatâ principali Ad, cape Ad, Aδ hinc inde æquales quantitati $\sqrt{c}$; & per puncta d ac δ age dg, $\delta\gamma$ Aſymptotos abſciſſæ AB parallelas.

3. Ubi terminus ey non deeſt, figura nullam habet diametrum. In hoc caſu, ſi æquationis hujus $cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices duæ AP, Ap (fig. 61) ſunt reales & inæquales (nam æquales eſſe nequeunt niſi figura ſit Conica Sectio) figura conſtabit ex tribus Hyperbolis ſibi oppoſitis, quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ duæ jacent extrà. Et hæc eſt *ſpecies quinquageſima ſeptima.*

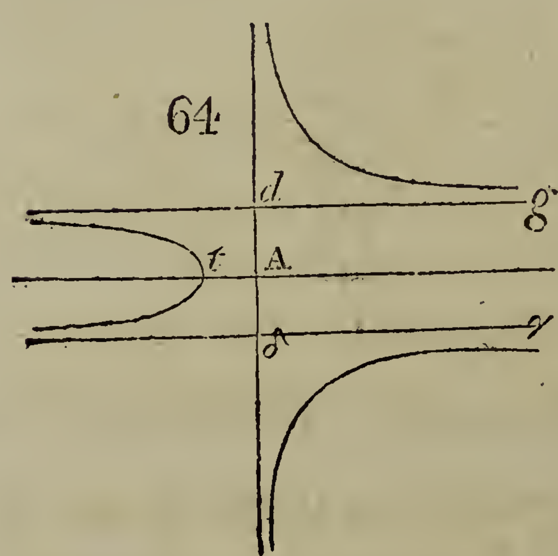
62



63



64

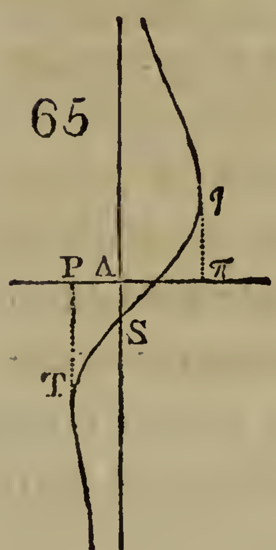


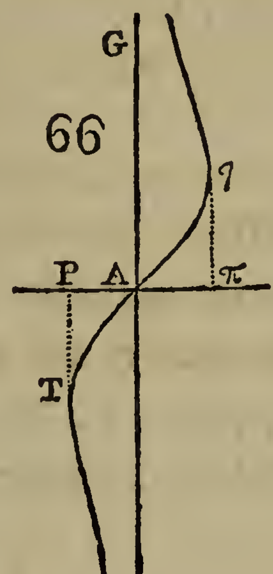
4. Si radices illæ duæ ſunt impoſſibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppoſitæ, extra Aſymptotos parallelas, & Anguinea Hyperbolica intra eaſdem. Hæc figura duarum eſt ſpecierum. Nam centrum non habet ubi terminus d non deeſt (fig. 62); ſed ſi terminus ille deeſt, punctum A eſt ejus centrum (fig. 63). Prior *ſpecies* eſt *quinquageſima octava*, poſterior *quinquageſima nona.*

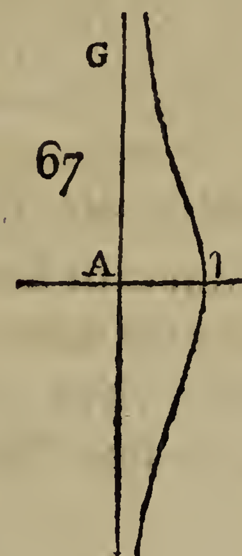
5. Quòd ſi terminus ey deeſt, figura conſtabit ex tribus Hyperbolis oppoſitis; quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ

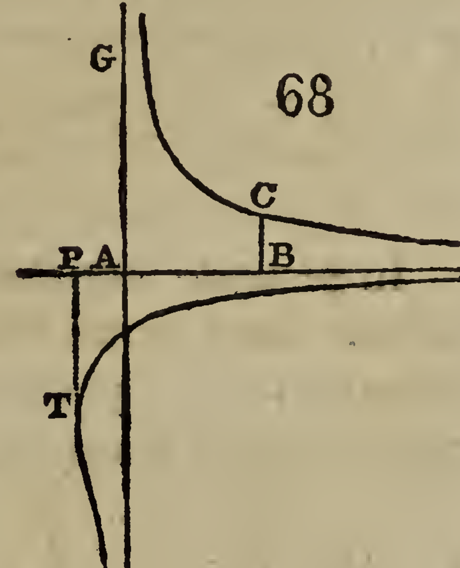
alteræ duæ jacent extrà, ut in ſpecie quinquageſimâ quartâ; & præterea diametrum habet, quæ eſt abſciſſa AB (fig. 64). Et hæc eſt *ſpecies ſexageſima*.

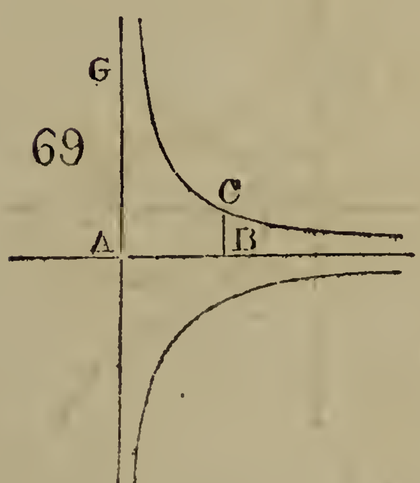
X. *De tribus Hyperboliſmis Ellipſeos.*

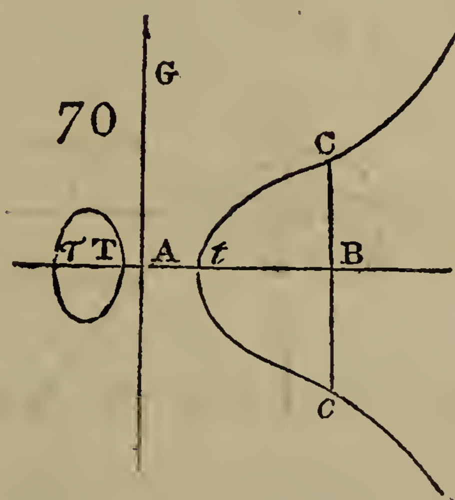


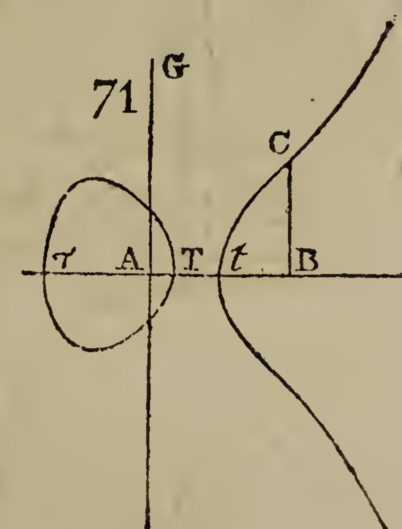












1. Hyperboliſmus Ellipſeos per hanc æquationem definitur; $xy^2+ey=ex+d$: & unicam habet Aſymptoton, quæ eſt Ordinata principalis A*d* (fig. 65). Si terminus *ey* non deeſt, figura eſt Hyperbola Anguinea ſine diametro; atque etiam ſine centro, ſi terminus *d* non deeſt. Quæ *ſpecies* eſt *ſexageſima prima*.

2. At ſi terminus *d* deeſt, figura habet centrum ſine diametro, & centrum ejus eſt punctum A (fig. 66). *Species* verò eſt *ſexageſima ſecunda*.

3. Et ſi terminus *ey* deeſt, & terminus *d* non deeſt, figura eſt Conchoidalis ad Aſymptoton AG (fig. 67) habetque diametrum ſine centro, & diameter ejus eſt abſciſſa AB. Quæ *ſpecies* eſt *ſexageſima tertia*.

XI. *De duobus Hyperboliſmis Parabolæ.*

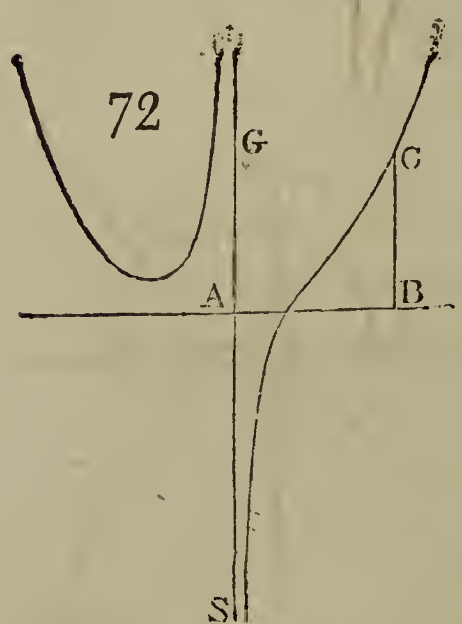
Hyperboliſmus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2+ey=d$;

CAPUT IV. $ey=d$; & duas habet Asymptotos, Abscissam AB & Ordinatam primam & principalem AG. Hyperbolæ vero in hâc figurâ sunt duæ, non in asymptoton angulis oppositis, sed in angulis qui sunt deinceps, jacentes; idque ad utrumque latus abscissæ AB, & vel sine diametro, si terminus ey habetur (fig. 68), vel cum diametro si terminus ille deest (fig. 69). Quæ duæ *species* sunt *sexagesima quarta* & *sexagesima quinta*.

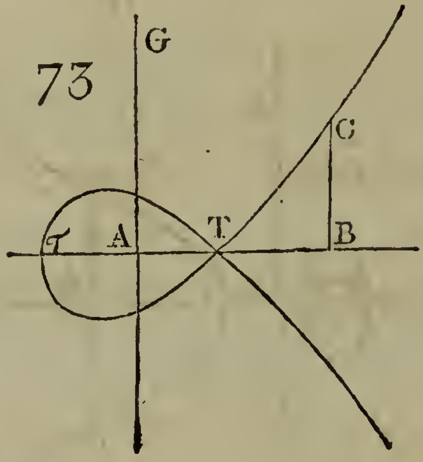
XII. *De Tridente.*

In Secundo æquationum casu habebatur æquatio $xy=ax^3+bx^2+cx+d$. Et figura in hoc casu habet quatuor crura infinita; quorum duo sunt Hyperbolica, circa Asymptoton AG (fig. 72) in contrarias partes tendentia, & duo Parabolica, convergentia, & cum

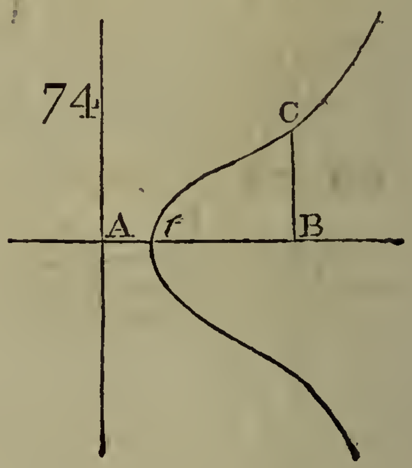
72



73



74



prioribus speciem Tridentis ferè efformantia. Estque hæc figura Parabola illa, per quam *Cartesius* æquationes sex dimensionum construxit. Hæc est igitur *species sexagesima sexta*.

XIII. *De Parabolis quinque Divergentibus.*

1. In Tertio casu æquatio erat $y^2=ax^3+bx^2+cx+d$, & Parabolam designat, cujus crura divergunt ab invicem, & in contrarias partes infinitè progrediuntur. Abscissa AB est ejus diameter, & Species ejus sunt quinque sequentes.

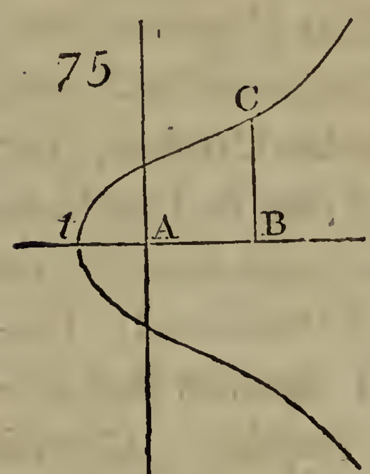
2. Si æquationis $ax^3+bx^2+cx+d=0$, radices omnes AT, AT, At sunt reales & inæquales, figura est Parabola Divergens Campaniformis, cum *Ovali* ad verticem (fig. 70, 71). Et *species* est *sexagesima septima*.

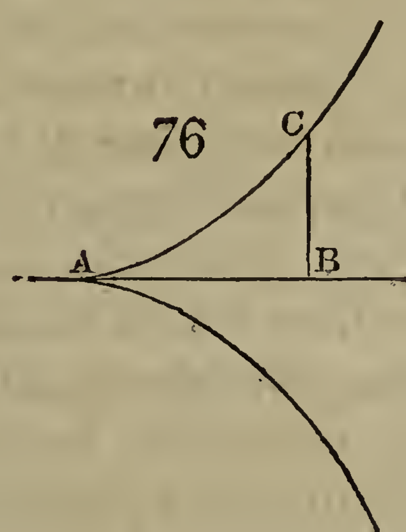
3. Si

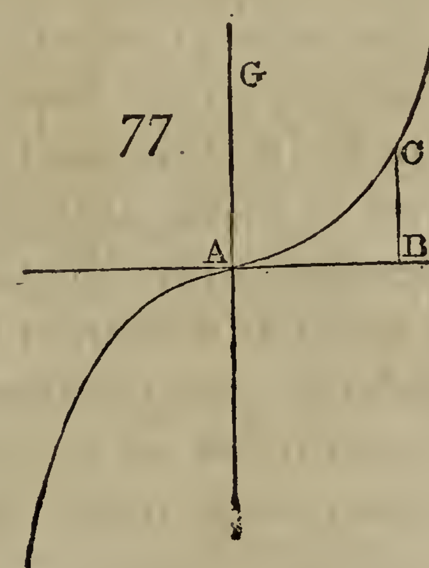
3. Si radices duæ ſunt æquales, Parabola prodit vel *Nodata* contingendo Ovalem (fig. 73), vel *Punctata* ob Ovalem infinitè parvam (fig. 74). Quæ duæ *ſpecies* ſunt *ſexageſima octava* & *ſexageſima nona.* Species Linearum Tertii Ordinis.

4. Si tres radices ſunt æquales Parabola erit *Cuſpidata* in vertice (fig. 76). Et hæc eſt Parabola *Neiliana*, quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et eſt *ſpecies ſeptuageſima.*

5. Si radices duæ ſunt impoſſibiles, habetur Parabola *Pura* Campaniformis (fig. 74, 75) *ſpeciem ſeptuageſimam primam* conſtituens.







XIV. *De Parabolâ Cubicâ.*

In Quarto caſu æquatio erat $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: & hæc æquatio Parabolam deſignat, quæ crura habet contraria, & *Cubica* dici ſolet (fig. 77). Et ſic *Species* omnino ſunt *ſeptuaginta duæ.*

CAPUT QUINTUM.

Geneſis Curvarum per Umbras.

1. SI in planum infinitum, à puncto lucido illuminatum, umbræ figurarum projiciantur, umbræ Sectionum Conicarum ſemper erunt Sectiones Conicæ; eæ Curvarum ſecundi generis ſemper erunt Curvæ ſecundi generis; eæ Curvarum tertii generis ſemper erunt Curvæ tertii generis, & ſic deinceps in infinitum.

2. Et quemadmodum Circulus, umbram projiciendo, generat Sectiones omnes Conicas; ſic Parabolæ quinque divergentes umbris ſuis generant & exhibent alias omnes ſecundi generis Curvas:

Caput VI & VII.

& sic Curvæ quædam simpliciores aliorum generum inveniri possunt, quæ alias omnes eorundem generum Curvas, umbris suis à puncto lucido in planum projectis, formabunt.

CAPUT SEXTUM.

De Curvarum Punctis duplicibus.

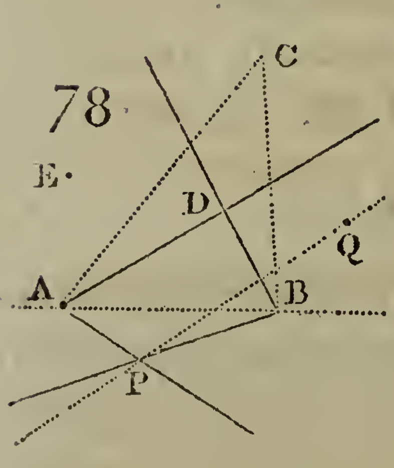
DIXIMUS Curvas secundi generis à lineâ rectâ in punctis tribus secari posse. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut cùm recta per Ovalem infinitè parvam transit; vel per concursum duarum partium Curvæ, se mutuò secantium vel in Cuspidem coeuntium, ducitur. Et siquando rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantùm puncto secant, (ut fit in Ordinatis Parabolæ *Cartesianæ* & Parabolæ Cubicæ, nec non in rectis Abscissæ Hyperbolismorum Hyperbolæ & Parabolæ parallelis) concipiendum est, quòd rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam distantiam sita (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes, sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem, quæ habent punctum duplex, describi possunt per sequentia Theoremata.

CAPUT VII.

De Curvarum descriptione Organicâ.

THEOR. I.

78



SI anguli duo magnitudine dati, PAD, PBD, circa polos positione datos, A, B, rotentur; & eorum crura, AP, BP, concursu suo, P, percurrant lineam rectam; crura duo reliqua, AD, BD, concursu suo, D, describent Sectionem Conicam per polos A, B transeuntem: præterquam ubi linea illa recta transit per polorum alterutrum, A vel B, vel anguli BAD, ABD simul evanescunt; quibus in casibus punctum D describet lineam rectam.

THEOR. II.

Si crura prima, AP, BP, concursu suo, P, percurrant Sectionem Conicam

Conicam per polum alterutrum A tranfeuntem, crura duo reliqua, AD, BD concurfu fuo, D, defcribent Curvam fecundi generis per polum alterum B tranfeuntem, & punctum duplex habentem in polo primo A, per quem fectio conica tranfit: præterquam ubi anguli BAD, ABD fimul evanefcunt; quo cafu punctum D defcribet aliam Sectionem Conicam per polum A tranfeuntem.

Descriptiones Organicæ.

THEOR. III.

At fi Sectio Conica, quam punctum P percurrit, tranfeat per neutrum polorum A, B; punctum D defcribet Curvam fecundi vel tertii generis, punctum duplex habentem. Et punctum illud duplex in concurfu crurum defcribentium, AD, BD, invenietur, ubi anguli BAP, ABP fimul evanefcunt. Curva autem defcripta fecundi erit generis, fi anguli BAD, ABD fimul evanefcunt; aliâs erit tertii generis, & alia duo habebit puncta duplicia in polis A & B.

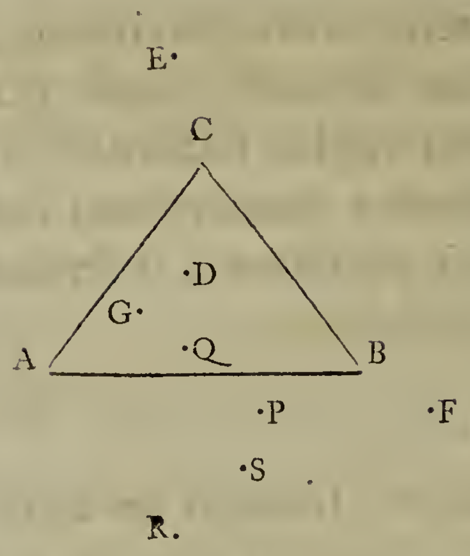
2. *Sectionum Conicarum defcriptio per data quinque puncta.*

Jam Sectio Conica determinatur ex datis ejus punctis quinque, & per eadem fic defcribi poteft. Dentur ejus puncta quinque, A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & trianguli ABC rotentur anguli duo quivis, CAB, CBA, circa vertices fuos A & B; & ubi crurum AC, BC interfectio C fucceffivè applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat interfectio crurum reliquorum, AB & BA, in puncta P & Q. Agatur, & infinitè producatur recta PQ, & anguli mobiles ita rotentur, ut interfectio crurum, AB, BA, percurrat rectam PQ, & crurum reliquorum interfectio, C, defcribet propofitam Sectionem Conicam per Theorema primum.

3. *Curvarum fecundi generis Punctum Duplex habentium defcriptio per data feptem puncta.*

Curvæ omnes fecundi generis Punctum Duplex habentes determinantur ex datis earum punctis feptem, quorum unum eft Punctum illud Duplex, & per eadem puncta fic defcribi poffunt. Dentur Curvæ defcribendæ puncta quælibet feptem A, B, C, D, E, F, G, quorum A eft punctum duplex. Jungantur punctum A, & alia duo quævis è punctis, puta B & C; & trianguli ABC rotetur

tetur



tetur tum angulus CAB circa verticem ſuum A, tum angulorum reliquorum alteruter, ABC, circa verticem ſuum B. Et ubi crurum AC, BC concurſus, C, ſucceſſivè applicatur ad puncta quatuor reliqua D, E, F, G incidat concurſus crurum reliquorum, AB & BA, in puncta quatuor P, Q, R, S. Per puncta illa quatuor & quintum A deſcribatur ſectio conica, & anguli præfati CAB, CBA ita rotentur ut crurum, AB, BA, concurſus percurrat ſectionem illam conicam, & concurſus reliquorum crurum, AC, BC, deſcribet Curvam propoſitam per Theorema ſecundum.

Si vice puncti C datur poſitione recta BC, quæ Curvam deſcribendam tangit in B, lineæ AD, AP coincident; & vice anguli DAP habebitur linea recta circa polum A rotanda.

Si Punctum Duplex A infinitè diſtat, debebit recta ad plagam puncti illius perpetuò dirigi, & motu parallelo ferri, interea dum angulus ABC circa polum B rotatur.

Deſcribi etiam poſſunt hæ Curvæ paulo aliter per Theorema tertium, ſed deſcriptionem ſimpliciorem poſuiſſe ſufficit.

Eâdem methodo Curvas tertii, quarti & ſuperiorum generum deſcribere licet; non omnes quidem, ſed quotquot ratione aliquâ commodâ per motum localem deſcribi poſſunt. Nam Curvam aliquam ſecundi vel ſuperioris generis, punctum duplex non habentem, commodè deſcribere, Problema eſt inter difficiliora numerandum.

CAPUT OCTAVUM.

Conſtructio æquationum per deſcriptionem Curvarum.

CURVARUM uſus in Geometriâ eſt, ut per earum interſectiones Problemata ſolvantur. Proponatur æquatio conſtruenda dimenſionum novem, $x^9 * + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx +$
$+m$

$k = 0$.

Ubi

Ubi b, c, d, &c. significant quantitates quasvis datas, signis suis + & − affectas. Assumatur æquatio ad Parabolam Cubicam $x^3=y$; & æquatio prior, scribendo y pro x^3, evadet $y^3+bxy^2+cy^2+dx^2y+exy+my+fx^3+gx^2+hx+k=0$, æquatio ad Curvam aliam secundi generis. Ubi m vel f deesse potest, vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones & intersectiones dabuntur radices æquationis construendæ. Parabolam Cubicam semel describere sufficit. CONSTRUCTIO ÆQUATIONUM.

Si æquatio construenda per defectum duorum terminorum ultimorum, hx & k, reducatur ad septem dimensiones; Curva altera, delendo m, habebit punctum duplex in principio Abscissæ, & inde facilè describi potest, ut suprà.

Si æquatio construenda per defectum terminorum trium ultimorum, gx^2+hx+k, reducatur ad sex dimensiones, Curva altera, delendo f, evadet Sectio Conica.

Et si per defectum sex ultimorum terminorum æquatio construenda reducatur ad tres dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianiam* per Parabolam Cubicam & lineam rectam.

Construi etiam possunt æquationes per Hyperbolismum Parabolæ cum diametro. Ut si construenda sit hæc æquatio dimensionum novem termino penultimo carens, $a+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+hx^7+kx^8+lx^9=0$; assumatur æquatio ad Hyperbolismum $+m$

illum $x^2y=1$: & scribendo y pro $\frac{1}{xx}$, æquatio construenda vertetur in hanc, $ay^3+cy^2+dxy^2+ey+fxy+mx^2y+g+hx+kx^2+lx^3=0$: quæ Curvam secundi generis designat, cujus descriptione Problema solvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hîc deesse potest, vel pro lubitu assumi.

Per Parabolam Cubicam & Curvas tertii generis construuntur etiam æquationes omnes dimensionum non plusquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti generis construuntur omnes dimensionum non plusquam quindecim; et sic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti & superiorum generum describi semper possunt, inveniendo eorum puncta per Geometriam planam. Ut si construenda sit æquatio, $x^{12} * +ax^{10}+bx^9+cx^8+dx^7+ex^6+fx^5+gx^4+hx^3+ix^2+kx+l=0$, & descripta habeat Pa-

 rabola

CAPUT VIII. rabola Cubica; ſit æquatio ad Parabolam illam Cubicam $x^3=y$, & ſcribendo y pro x^3, æquatio conſtruenda vertetur in hanc,

$$\begin{array}{llllll} y^4 + a\,xy^3 & + c\,x^2y^2 & + f\,x^2y & + i\,x^2 & = 0, \\ + b & + dx & + gx & + kx & \\ & + e & + h & + l & \end{array}$$

quæ eſt æquatio ad Curvam tertii generis, cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Deſcribi autem poteſt hæc Curva, inveniendo ejus puncta per Geometriam planam, propterea quòd indeterminata quantitas, x, non niſi ad duas dimenſiones aſcendit.

LOGISTICA INFINITORUM.

AUCTORE S. HORSLEY, LL. D. ET R. S. S.

4 C 2

$\beta = c\,x^{2\mu} + \gamma$
$\beta^2 = c^2x^{4\mu} + 2c\,x^{2\mu}\gamma + \gamma^2$
$\beta^3 = c^3x^{6\mu} + 3c^2x^{4\mu}\gamma + 3c\,x^{2\mu}\gamma^2 + \gamma^3$
$\beta^4 = c^4x^{8\mu} + 4c^3x^{6\mu}\gamma + 6c^2x^{4\mu}\gamma^2 + 4cx^{2\mu}\gamma^3 + \gamma^4$
$\beta^5 = c^5x^{10\mu}$ &c.

$\gamma = d\,x^{3\mu} + \delta$
$\gamma^2 = d^2x^{6\mu} + 2d\,x^{3\mu}\delta + \delta^2$
$\gamma^3 = d^3x^{9\mu} + 3d^2x^{6\mu}\delta$ &c.

$\delta = e\,x^{4\mu} + \varepsilon$
$\delta^2 = e^2x^{8\mu} + 2ex^{4\mu}\varepsilon + \varepsilon^2$

$\varepsilon = fx^{5\mu} + \zeta$
$\varepsilon^2 = f^2x^{10\mu} +$

$\zeta = gx^{6\mu} + \eta$
$\eta = hx^{7\mu} + \theta$
$= kx^{8\mu} + \iota$
$\iota = lx^{9\mu} +$

Et denotante λ quantitatem quamvis, feriei propofitæ poteftas illa cujus index λ, five $\overline{a + bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu}\ \&c.}|^{\lambda} = \overline{a+\alpha}|^{\lambda}$.

Sed ex formulâ generali Newtonianâ poteftatum binomii, $\overline{a+\alpha}|^{\lambda} = a^{\lambda} + \lambda a^{\lambda-1}\alpha + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2} a^{\lambda-2}\alpha^2 + \lambda \times \frac{\lambda-1}{2}. \times \frac{\lambda-2}{3} a^{\lambda-3}\alpha^3$ &c.

Hoc eft, fi pro $\lambda a^{\lambda-1}$ fcribatur $\mathbb{A}$

pro $\lambda \times \frac{\lambda-1}{2} a^{\lambda-2}$, $\mathbb{A}$

pro $\lambda \times \frac{\lambda-1}{2} \times \frac{\lambda-2}{3} a^{\lambda-3}$, $\mathbb{A}$

pro $\lambda.\ \frac{\lambda-1}{2}.\ \frac{\lambda-2}{3}.\ \frac{\lambda-3}{4} a^{\lambda-4}$, $\mathbb{A}$

atque idem femper fiat, $\overline{a+\alpha}|^{\lambda} = a^{\lambda} + \mathbb{A}.\alpha + \mathbb{A}.\alpha^2 + \mathbb{A}.\alpha^3 + \mathbb{A}.\alpha^4 + \mathbb{A}.\alpha^5 + \mathbb{A}.\alpha^6 + \mathbb{A}.\alpha^7 + \mathbb{A}.\alpha^8 + \mathbb{A}.\alpha^9$. &c.

Ex fingulis membris hujus progreffionis, ope æquationum $\alpha = bx^{\mu} + \beta$, $\alpha^2 = b^2x^{2\mu} +$ &c. $\alpha^3 =$ &c. exterminetur primò α. – Tum ex membris fingulis feriei transformatæ, ope æquationum $\beta = cx^{2\mu} + \gamma$, $\beta^2 = c^2x^{4\mu} +$ &c. $\beta^3 =$ &c. exterminetur β. Et ex membris fingulis feriei denuò transformatæ, ope æquationum $\gamma = dx^{3\mu} + \delta$, $\gamma^2 = d^2x^{6\mu} +$ &c. $\gamma^3 =$ &c. exterminetur γ. Si hoc continuò fiat, colligentur tandem $\mathbb{A}.\alpha = \mathbb{A}. \times bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu} + ex^{4\mu}$ &c.

$$\mathbb{A}\alpha^2 = \mathbb{A} \times \begin{cases} b^2.\,x^{2\mu} + 2b.\,cx^{3\mu} + 2bd\,x^{4\mu} + 2bex^{5\mu} + 2bfx^{6\mu} + 2bgx^{7\mu} + 2bhx^{8\mu} + 2bkx^{9\mu} \\ \quad + c^2x^{4\mu} + 2cdx^{5\mu} + 2cex^{6\mu} + 2cfx^{7\mu} + 2cgx^{8\mu} + 2chx^{9\mu} \\ \quad\quad + d^2x^{6\mu} + 2dex^{7\mu} + 2dfx^{8\mu} + 2dgx^{9\mu} \\ \quad\quad\quad + e^2x^{8\mu} + 2efx^{9\mu}\ \&c. \end{cases}$$

$\mathbb{A}\alpha^3 =$

$$\mathbb{A}\alpha^{3}=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l}
b^{3}.x^{3\mu}+3b^{2}c.x^{4\mu}+3b^{2}.dx^{5\mu}+3b^{2}\ ex^{6\mu}+3b^{2}.\ fx^{7\mu}+3b^{2}\ gx^{8\mu}+3b^{2}\ hx^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad +3b.c^{2}x^{5\mu}+3b.2cdx^{6\mu}+3b.\ 2cex^{7\mu}+3b.\ 2cfx^{8\mu}+3b.2cgx^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad +3b.\ d^{2}x^{7\mu}+3b.\ 2dex^{8\mu}+3b.2dfx^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +3b.\ e^{2}x^{9\mu}\\
\qquad\qquad +c^{3}.\ x^{6\mu}+3c^{2}\ dx^{7\mu}+3c^{2}.\ ex^{8\mu}+3c^{2}fx^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad +3c.\ d^{2}x^{8\mu}+3c.2dex^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +d^{3}x^{9\mu}\ \&c.
\end{array}\right.$$

&c.

$$\mathbb{A}\alpha^{4}=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l}
b^{4}.x^{4\mu}+4b^{3}.cx^{5\mu}+4b^{3}.d\,x^{6\mu}+4b^{3}.\ ex^{7\mu}+4b^{3}\ fx^{8\mu}+4b^{3}\ gx^{9\mu}\\
\qquad\qquad +6b^{2}.c^{2}x^{6\mu}+6b^{2}.2cdx^{7\mu}+6b^{2}.2cex^{8\mu}+6b^{2}.\ 2cfx^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad +6b^{2}.\ d^{2}x^{8\mu}+6b^{2}.\ 2dex^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad +4b.\ c^{3}.x^{7\mu}+4b.3c^{2}dx^{8\mu}+4b.\ 3c^{2}ex^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +4b.3cd^{2}x^{9\mu}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad +c^{4}.\ x^{8\mu}+4c^{3}d.\ x^{9\mu}
\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\alpha^{5}=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l}
b^{5}.x^{5\mu}+5b^{4}cx^{6\mu}+5b^{4}dx^{7\mu}+5b^{4}\ ex^{8\mu}+5b^{4}.\ fx^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad +10b^{3}c^{2}x^{7\mu}+10b^{3}.2cdx^{8\mu}+10b^{3}.\ 2cex^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad\qquad\qquad +10b^{3}\ d^{2}x^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad\qquad +10b^{2}.\ c^{3}x^{8\mu}+10b^{2}.3c^{2}dx^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad\qquad\qquad +5b\ c^{4}x^{9\mu}\ \&c.
\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\alpha^{6}=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l}
b^{6}x^{6\mu}+6b^{5}.cx^{7\mu}+6b^{5}dx^{8\mu}+6b^{5}\ ex^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad +15b^{4}c^{2}x^{8\mu}+15b^{4}2cdx^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad\qquad +20b^{3}\ c^{3}x^{9\mu}\ \&c.
\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\alpha^{7}=\mathbb{A}\times\left\{\begin{array}{l}
b^{7}x^{7\mu}+7b^{6}.c.x^{8\mu}+7b^{6}dx^{9\mu}\ \&c.\\
\qquad\qquad +21.b^{5}.c^{2}x^{9\mu}
\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\ \alpha^{8}=\quad\mathbb{A}\times b^{8}x^{8\mu}+8b^{7}c.x^{9\mu}\ \&c.$$

$$\mathbb{A}\ \alpha^{9}=\quad\mathbb{A}\times b^{9}x^{9\mu}\ \&c.$$

Jam hifce omnibus fecundum indices poteftatum literæ x difpofitis, confit hæc formula generalis :

FORMULA.

MULTIPLICATIONIS ET DIVISIONIS CLIMACTICÆ.

$$\alpha^{\lambda}+\mathbb{A}\,bx^{\mu}+\begin{array}{l}\mathbb{A}.c\\+\mathbb{A}.b^{2}\end{array}x^{2\mu}\ \begin{array}{l}+\mathbb{A}.\ d\\+\mathbb{A}.2bc\\+\mathbb{A}.\ b^{3}\end{array}x^{3\mu}\ \begin{array}{l}+\mathbb{A}\ e\\+\mathbb{A}\ \overline{2bd+c^{2}}\\+\mathbb{A}.3b^{2}c\\+\mathbb{A}.\ b^{4}\end{array}x^{4\mu}\ \begin{array}{l}+\mathbb{A}.f\\+\mathbb{A}\ \overline{2be+2cd}\\+\mathbb{A}.\overline{3b^{2}.d+3b.c^{2}}\\+\mathbb{A}\ 4b^{3}c\\+\mathbb{A}\ b^{5}\end{array}x^{5\mu}$$

$+\mathbb{A}.g$

LOGISTICA INFINITORUM.

In exsequendo per series infinitas Problematum analysin, haud rarò usuvenit ut in series ipsas instituendæ sint operationes arithmeticæ; non modò faciles illæ Additionis et Subductionis, verum etiam molestissimæ Multiplicationis et Divisionis, utriusque quidem cum simplicis tum climacticæ: quæ sanè computationes experti nôrunt quanti sunt laboris: hujus minuendi gratiâ formulas sequentes trado.

PROBLEMA I. MULTIPLICATIO.

Seriem infinitam $\mathrm{a}x^{\mu} + \mathrm{b}x^{\mu+\alpha} + \mathrm{c}x^{\mu+2\alpha} + \mathrm{d}x^{\mu+3\alpha} + \mathrm{e}x^{\mu+4\alpha}$ &c.
Series infinita $ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + cx^{\nu+4\alpha}$ &c. Multiplicet.

$$\text{Fiet } \mathrm{a}ax^{\mu+\nu} \begin{array}{l} +\mathrm{b}a \\ +\mathrm{a}b \end{array} x^{\mu+\nu+\alpha} \begin{array}{l} +\mathrm{c}a \\ +\mathrm{b}b \\ +\mathrm{a}c \end{array} x^{\mu+\nu+2\alpha} \begin{array}{l} +\mathrm{d}a \\ +\mathrm{c}b \\ +\mathrm{b}c \\ +\mathrm{a}d \end{array} x^{\mu+\nu+3\alpha} \begin{array}{l} +\mathrm{e}a \\ +\mathrm{d}b \\ +\mathrm{c}c \\ +\mathrm{b}d \\ +\mathrm{a}e \end{array} x^{\mu+\nu+4\alpha} \text{ \&c.}$$

Positis igitur $\mu+\nu = \pi$, series multiplicatione facta hanc formam induet

$$\mathrm{A}x^{\pi} + \mathrm{B}x^{\pi+\alpha} + \mathrm{C}x^{\pi+2\alpha} + \mathrm{D}x^{\pi+3\alpha} + \mathrm{E}x^{\pi+4\alpha} \text{ \&c.}$$

Cujus coefficientium constitutio hujuscemodi erit.

$\mathrm{A} = \mathrm{a}a.$ $\mathrm{B} = \mathrm{a}b + \mathrm{b}a.$ $\mathrm{C} = \mathrm{a}c + \mathrm{b}b + \mathrm{c}a.$ $\mathrm{D} = \mathrm{a}d + \mathrm{b}c + \mathrm{c}b + \mathrm{d}a.$ $\mathrm{E} = \mathrm{a}e + \mathrm{b}d + \mathrm{c}c + \mathrm{d}b + \mathrm{e}a.$

PROBLEMA II. DIVISIONIS I.

Seriem infinitam serie infinitâ dividere

Sit series dividenda $\mathrm{A}x^{\pi} + \mathrm{B}x^{\pi+\alpha} + \mathrm{C}x^{\pi+2\alpha} + \mathrm{D}x^{\pi+3\alpha} + \mathrm{E}x^{\pi+4\alpha}$ &c.
Series dividens sit $ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha}$ &c.

Tum

Tum pofitis $\pi - \nu = \mu$, feries divifione facta hujufce formæ erit

$$ax^{\mu} + bx^{\mu+\alpha} + cx^{\mu+2\alpha} + dx^{\mu+3\alpha} + ex^{\mu+4\alpha} \text{ \&c.}$$

Cujus Coefficientes hifce æquationibus definiuntur: $a = \frac{A}{a}$. $b = \frac{B - ab}{a}$. $c = \frac{C - ac - bb}{a}$. $d = \frac{D - ad - bc - cb}{a}$. $e = \frac{E - ae - bd - cc - db}{a}$. $f =$ &c. Patet ex Problemate primo.

PROBLEMA III. DIVISIONIS 2.

2. Unitatem dividere à ferie infinitâ $ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha}$.

Factum puta, et fit $\frac{1}{ax^{\nu} + bx^{\nu+\alpha} + cx^{\nu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha} +} = ax^{\mu} + bx^{\mu+\alpha} + cx^{\mu+2\alpha} + dx^{\nu+3\alpha} + ex^{\nu+4\alpha}$ &c. Series divifione facta cum ferie dividente multiplicata feriem faciat $Ax^{\pi} + Bx^{\pi+\alpha} + Cx^{\pi+2\alpha} + Dx^{\pi+3\alpha} + Ex^{\pi+4\alpha}$ &c. Hujus fumma unitati æqualis erit. Ergo

$$\begin{matrix} Ax^{\pi} \\ -1 \end{matrix} + Bx^{\pi+\alpha} + Cx^{\pi+2\alpha} + Dx^{\pi+3\alpha} = 0.$$

Hoc autem ut femper fiat, juxta quamlibet literæ x æftimationem, neceffe eft ut π fit 0, $A = 1$, & ut reliqui coefficientes B, C, D, E evadant finguli nihilo æquales.

Sed per Problema primum $\pi = \mu + \nu$. $A = aa$. $B = ab + ba$. $C = ac + bb + ca$. &c. Ergo $\mu = -\nu$.

Series igitur divifione facta hanc formam induet

$$ax^{-\nu} + bx^{\alpha-\nu} + cx^{2\alpha-\nu} + dx^{3\alpha-\nu} + ex^{4\alpha-\nu} \text{ \&c.}$$

& Coefficientes hifce æquationibus definientur. $a = \frac{1}{a}$. $b = -\frac{ab}{a}$. $c = -\frac{ac + bb}{a}$. $d = -\frac{ad + bc + cb}{a}$. $e = -\frac{ae + bd + cc + db}{a}$. f &c.

PROBLEMA IV. Multiplicatio et Divifio Climactica.

Seriei infinitæ poteftates formulâ generali exhibere.

Exhibenda fit poteftas, indice λ, feriei infinitæ $a + bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu} + ex^{4\mu} + fx^{5\mu} + gx^{6\mu} + hx^{7\mu} + kx^{8\mu} + lx^{9\mu}$ &c.

Summa nominum omnium feriei propofitæ poft primum dicatur α. Omnium poft fecundum, β. Omnium poft tertium, γ; poft quartum, δ; poft quintum, ε; poft fextum, ζ; &c. Ita erit $a + bx^{\mu} + cx^{2\mu} + dx^{3\mu}$ &c. $= a + \alpha$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= bx^{\mu} + \beta \\
\alpha^2 &= b^2x^{2\mu} + 2b\beta x^{\mu} + \beta^2 \\
\alpha^3 &= b^3x^{3\mu} + 3b^2x^{2\mu}\beta + 3bx^{\mu}\beta^2 + \beta^3 \\
\alpha^4 &= b^4x^{4\mu} + 4b^3x^{3\mu}\beta + 6b^2x^{2\mu}\beta^2 + 4bx^{\mu}\beta^3 + \beta^4 \\
\alpha^5 &= b^5x^{5\mu} + 5b^4x^{4\mu}\beta + 10b^3x^{3\mu}\beta^2 + 10b^2x^{2\mu}\beta^3 + 5bx^{\mu}\beta^4 + \beta^5 \\
\alpha^6 &= b^6x^{6\mu} + 6b^5x^{5\mu}\beta + 15b^4x^{4\mu}\beta^2 + 20b^3x^{3\mu}\beta^3 + 15b^2x^{2\mu}\beta^4 + 6bx^{\mu}\beta^5 + \beta^6 \\
\alpha^7 &= b^7x^{7\mu} + 7b^6x^{6\mu}\beta + 21b^5x^{5\mu}\beta^2 + 35b^4x^{4\mu}\beta^3 + 35b^3x^{3\mu}\beta^4 \text{ \&c.} \\
\alpha^3 &= b^8x^{8\mu} + 8b^7x^{7\mu}\beta + 28b^6x^{6\mu}\beta^2 \text{ \&c.} \\
\alpha^9 &= b^9x^{9\mu} + 9b^8x^{8\mu}\beta \text{ \&c.} \\
&\text{\&c.}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
+\mathrm{A}_{1}.g & \\
+\mathrm{A}_{2}.\overline{2bf+2ec+d^{2}} & \\
+\mathrm{A}_{3}.\overline{3b^{2}e+3b.2cd+c^{3}} & x^{6\mu} \\
+\mathrm{A}_{4}.\overline{4b^{3}d+6b\,c^{2}} & \\
+\mathrm{A}_{5}.5b^{4}c & \\
+\mathrm{A}_{6}.b^{6} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
+\mathrm{A}_{1}.h & \\
+\mathrm{A}_{2}.\overline{2bg+2cf+2de} & \\
+\mathrm{A}_{3}.\overline{3b^{2}f+3b.2c.e+3b.d^{2}+3c^{2}d} & \\
+\mathrm{A}_{4}.\overline{4b^{3}e+6b^{2}.2cd+4b.c^{3}} & x^{7\mu} \\
+\mathrm{A}_{5}.\overline{5b^{4}d+10b^{3}c^{2}} & \\
+\mathrm{A}_{6}.6b^{5}c & \\
+\mathrm{A}_{7}.b^{7} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+\mathrm{A}_{1}.k & \\
+\mathrm{A}_{2}.\overline{2bh+2cg+2df+e^{2}} & \\
+\mathrm{A}_{3}.\overline{3b^{2}g+3b.2cf+3b.2de+3c^{2}e+3cd^{2}} & \\
+\mathrm{A}_{4}.\overline{4b^{3}f+6b^{2}.2ce+6b^{2}d^{2}+4b.3c^{2}d+c^{4}} & x^{8\mu} \\
+\mathrm{A}_{5}.\overline{5b^{4}e+10b^{3}.2cd+10.b^{2}c^{3}} & \\
+\mathrm{A}_{6}.\overline{6b^{5}d+15.b^{4}.c^{2}} & \\
+\mathrm{A}_{7}.7.b^{6}.c & \\
+\mathrm{A}_{8}.b^{8} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
+\mathrm{A}_{1}.l+\mathrm{A}_{2}.\overline{2bk+2ch+2dg+2ef}+\mathrm{A}_{3}.\overline{3b^{2}h+3b.2cg+3b.2df+3bc^{2}+3c^{2}f+3c.2de+d^{3}} \\
+\mathrm{A}_{4}.\overline{4b^{3}g+6b^{2}.2cf+6b^{2}.2de+4b.3c^{2}e+4b.3c.d^{2}+4c^{3}.d} \\
+\mathrm{A}_{5}.\overline{5b^{4}.f+10b^{3}.2ce+10.b^{3}.d^{2}+10.b^{2}.3c^{2}.d+5b.c^{4}}+\mathrm{A}_{6}.\overline{6.b^{5}e+15.b^{4}.2cd+20b^{3}.c^{3}}\quad x^{9\mu}+\&c. \\
+\mathrm{A}_{7}.\overline{7b^{6}.d+21.b^{5}.c^{2}}+\mathrm{A}_{8}.8b^{7}.c+\mathrm{A}_{9}.b^{9}
\end{array}
$$

$$
=\overline{a+bx^{\mu}+cx^{2\mu}+dx^{3\mu}+ex^{4\mu}+fx^{5\mu}\ \&c}\,\big|^{\lambda}.
$$

Si formulæ hujusce membra singula cum quantitate $x^{\nu\lambda}$ multiplices, hoc est si indices potestatum literæ x quantitate $\nu\lambda$ augeas, efficietur formula generalis potestatum seriei $ax^{\nu}+bx^{\nu+\mu}+cx^{\nu+2\mu}+dx^{\nu+3\mu}+ex^{\nu+4\mu}$ &c. sive formula generalis harum quantitatum $\overline{ax^{\nu}+bx^{\nu+\mu}+cx^{\nu+2\mu}+dx^{\nu+3\mu}+ex^{\nu+4\mu}\ \&c}\,|^{\lambda}$. Quæ denique pro symbolis A_{1}, A_{2}, A_{3}, A_{4}, &c. hisce ordine restituti, $\lambda\alpha^{\lambda-1}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}\alpha^{\lambda-2}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}\alpha^{\lambda-3}$, $\lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}.\frac{\lambda-3}{4}\alpha^{\lambda-4}$, in formulam generalem Moivræanam migraverit.

SAMUELIS HORSLEII

DE

GEOMETRIA FLUXIONUM

LIBER SINGULARIS.

SIVE ADDITAMENTUM TRACTATUS NEWTONIANI

DE METHODO RATIONUM PRIMARUM ET ULTIMARUM.

GEOMETRIA FLUXIONUM.

DEFINITIONES.

I.

NASCI dicuntur magnitudines motu genitæ, dum ſenſim creſcunt.

II.

Evaneſcere, dum ſenſim minuuntur.

III.

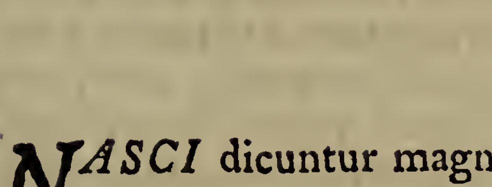
Communi verbo *fluere* dicuntur, quæ vel naſcuntur, vel evaneſcunt.

IV.

Magnitudinum fluentium velocitates creſcendi vel decreſcendi vocantur *fluxiones*.

Cæterùm hoc ipſum, velocitas creſcendi decreſcendive, quo ſenſu dicitur, exemplis declarandum eſt.

Fig. 1.

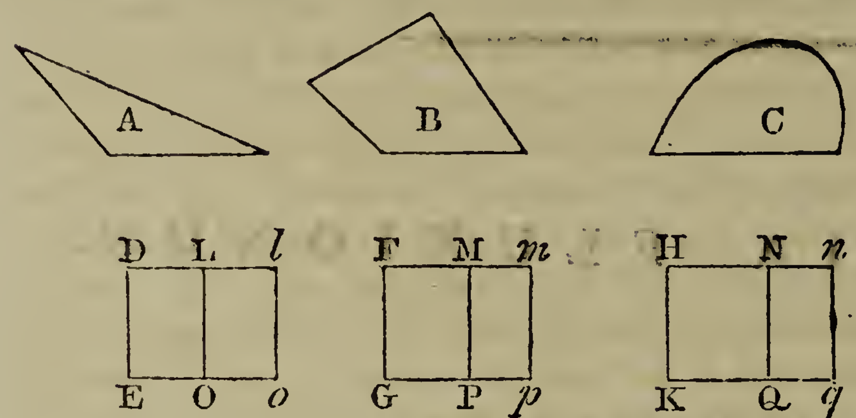


Puta rectam AB motu puncti B verſus b, β generari, ac perpetim augeri; velocitas creſcendi rectæ AB, cùm aſſignatam quamvis longitudinem, puta Ab, adepta ſit, ea ipſa eſt quâ punctum mobile B è loco b egreditur. Et ſi regreſſu puncti B à locis β, b verſus A, recta AB perpetim decreſcat, velocitates receſſûs puncti B à locis β, b velocitates erunt decreſcendi rectæ AB, cùm è majore aliquâ longitudine in illas Aβ, Ab decreverit. Fluxio igitur rectæ AB eſt velocitas, quâ punctum B, ſive progrediendo, ſive recedendo è loco B diſcedit. Et fluxio ejuſdem rectæ jam factæ Ab, ea eſt, quâ punctum mobile B, progrediendo ſive recedendo, è loco b diſcedit. Et velocitas puncti B ex alio quovis loco β diſceſſuri, fluxio eſt rectæ AB longitudinem Aβ adeptæ.

Superficierum fluentium velocitates creſcendi vel decreſcendi ita æſtimantur, ſi ad longitudinem aliquam datam, hoc eſt, pro arbitrio ſumendam, ſed quæ ſemel ſumpta non debet mutari, ſuperficies quæ fluant ſemper applicentur. Cujuſque enim velocitas creſcendi vel decreſcendi eadem eſt,

Definitiones.

eſt, ac lateris ex perpetuâ applicatione oriundi. Puta ſuperficies A, B, C laterum incrementis vel decrementis perpetim augeri, vel minui. Exponatur recta DE datæ alicujus magnitudinis, et rectæ DE æquales exponantur aliæ FG, HK. Sint A, B, C, ſuperficierum fluentium, A, B, C, magnitudines, quæ vel initio fluxûs fuere, vel fluendo ſimul extiterunt.



Et ad rectam DE applicetur rectangulum EL ſpatio A æquale. Ad rectam verò FG applicetur rectangulum GM ſpatio B æquale. Ad rectam denique HK, applicatum puta rectangulum KN ſpatio C æquale. Ad eaſdem rectas DE, FG, HK, applicata puta rectangula El, Gm, Kn, aliis ſuperficierum fluentium A, B, C magnitudinibus, fluendo ſimul factis, æqualia. Atque hoc ſemper fieri intelligatur, ut ſuperficiebus A, B, C creſcentibus vel decreſcentibus, rectangula El, Gm, Kn ſimul ac pariter cum illis fluant. Fluunt igitur latera ex applicationibus orta. Rectæ inquam DL, FM, HN fluunt. Harum verò rectarum atque ſuperficierum fluentium creſcendi decreſcendive velocitates eædem cenſendæ ſunt; nimirùm ſuperficiei A, rectæque DL; ſuperficiei B, rectæque FM; ſuperficiei C, rectæque HN.

Solidorum fluentium creſcendi decreſcendive velocitates ad ſimilem modum æſtimare licet. Nimirum, ſi ad ſuperficiem aliquam datam, hoc eſt, pro arbitrio ſumendam, ſed quæ ſemel ſumpta mutari non debet, Solidorum, quotquot fluant, applicatio fiat. Cujuſque enim creſcendi decreſcendive eadem eſt velocitas, ac lateris ex perpetuâ applicatione oriundi.

Quantitatum Algebraicarum, quæ trinam dimenſionem, uti loquuntur Algebraiſtæ, excedunt, velocitates creſcendi decreſcendive æſtimantur, adhibendo interpretationem ſymbolorum Geometricam. Verbi causâ, ſi quantitatem Algebraicam $xyzus$, è fluentibus x, y, z, u, s factam, hoc modo ſcribas, $\frac{xyzus}{1}$; tum pro unitate eam rectæ alicujus datæ poteſtatem ſubſtituas, quæ quantitatem $\frac{xyzus}{1}$ ad Solidi, Superficiei, vel Rectæ ordinem deprimat; cujus velocitatem creſcendi decreſcendive eo, quo tradidimus modo, æſtimare liceat.

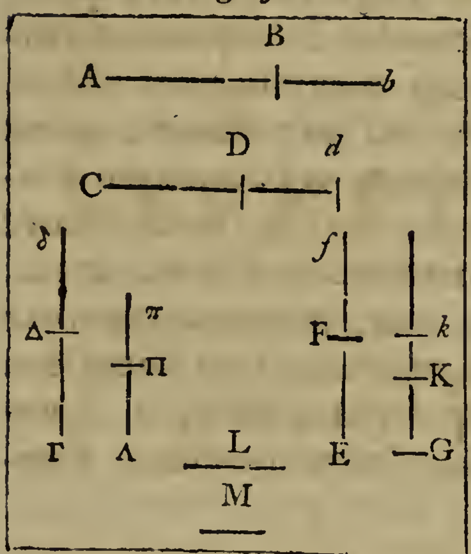
V.

Fluxionum nomine veniunt non modò velocitates illæ creſcendi decreſcendive, quarum illud maximè proprium eſt; verùm etiam, ex tranſlatione, magnitudines Geometricæ cujuſcunque generis, quæ velocitatum illarum inter ſe rationes ſervant.

Fluant

Fluant rectæ duæ AB, CD. Sint aliæ rectæ EF, GK, quarum EF ſit ad GK, ut velocitas quâ punctum B, quod motu ſuo rectam AB generat, è loco A egreditur, ad velocitatem quâ punctum D, cujus motu recta altera CD generatur, egreditur è loco C. Tum creſcere vel decreſcere intelligantur rectæ EF, GK, eâ quidem lege, ut fluentibus AB, CD, EF, GK, ſi capiantur punctorum mobilium B, F loca quælibet, *b*, *f*, quæ ſimul ea appulerint, item mobilium D, K, loca quæ ſimul ea appulerint *d*, *k*; EF ſit ad E*f*, ut velocitas motûs puncti B è loco primo A, ad velocitatem motûs ejuſdem puncti B è loco *b*; ſimiliter ſit GK ad G*k*, ut velocitas motûs puncti D è loco ſuo primo C ad velocitatem motûs ejuſdem puncti è loco *d*. Ita verò neceſſario fiet, ut E*f* ſit etiam ad G*k*, ut velocitas motûs puncti B è loco *b* ad velocitatem motûs puncti D è loco *d*. DEFINITIONES.

Fig. 3.



Rectæ E*f*, G*k*, ad hunc modum mutabiles, fluxiones dicuntur rectarum A*b*, C*d*, atque omnium adeo quantitatum, quarum velocitates creſcendi decreſcendive earum inter ſe rationes induant. Sunt enim illæ rectæ fluxionum, quarum inter ſe proportiones ſervant, ſymbola quaſi Geometrica. Ac pari jure aliæ quævis magnitudines Geometricæ, quæ ita creſcunt vel diminuuntur, ut rectarum E*f*, G*k* proportiones inter ſe ſemper ſervent, illis utique fluentium magnitudinibus inter ſe collatis, quæ ſimul fluendo exſiſtunt, rectarum A*b*, C*d*, aliarumque omnium magnitudinum, quæ pariter cum hiſce A*b*, C*d* fluunt, fluxiones ſunt dicendæ. Hujuſcemodi verò magnitudines notis $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Newtonus deſignavit, literis x, y, z fluentes deſignantibus.

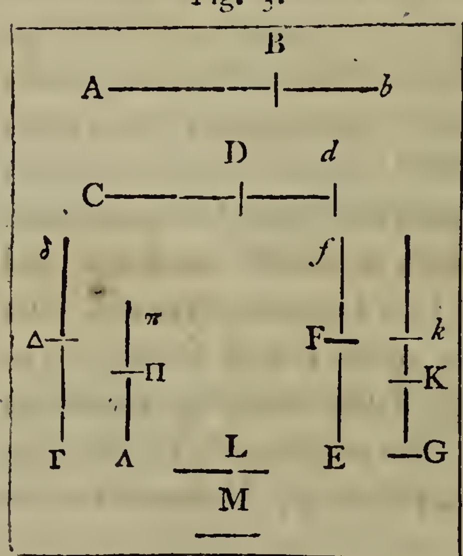
Ex his autem liquet, magnitudinum fluentium fluxiones, quæ ſenſu definitionis quintæ eo nomine vocantur, magnitudines eſſe Geometricas, quæ vel quantitate ſint fixâ et permanente, vel ipſæ fluant. Fixâ quidem quantitate manent, quarum fluentes æquabili velocitate fluunt. Sin fluenti velocitas creſcendi vel decreſcendi utcunque ſit mutabilis, in hoc caſu fluxio ipſa fluet; et creſcendo quidem, ſi velocitas fluentis creſcat, decreſcendo, ſi illa ſenſim minuatur. Sic enim ſi puncti B, rectam AB generantis, velocitates motûs è locis A, *b* æquales ſint, æquales erunt rectæ EF, E*f*, quæ velocitatum illarum inter ſe proportiones ſervant. Ac ſi velocitas motûs puncti B ex alio quovis loco rectæ AB eadem maneat, rectæ etiam EF magnitudo fixa manet. Sin velocitas motûs puncti B è loco *b* quàm è loco A major ſit, recta E*f* rectâ EF major erit. Et ſi velocitas motûs puncti B, longiùs à loco A progredientis, ſenſim augeatur, recta quoque EF ſenſim creſcet. E contrario decreſcet recta EF, ſi velocitas motûs puncti B, progrediente puncto illo, ſenſim minuatur.

Puta igitur rectas AB, CD motu inæquabili punctorum B, D hanc et illam generari. Fluent igitur rectæ EF, GK; atque harum velocitates creſcendi decreſcendive aliis rectis, L, M, exponi poterunt. Rectæ autem

L, M,

DEFINITIONES. L, M, atque aliæ omnes magnitudines Geometricæ, quæ ita crefcant vel diminuantur, ut harum rectarum inter fe proportiones fervent, rectarum EF, GK, fenfu definitionis quintæ, fluxiones erunt. Hujufmodi verò quantitates, ad fluentes primas referendo, fluxiones fecundas Newtonus nominavit, et fymbolis $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ defignari juffit. Rurfum magnitudines illæ $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ vel quantitate fint fixâ quæque et permanente, vel ipfæ fluant; prout quantitates $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ velocitate unaquæque æquabili fluat, vel utcunque mutabili. Si fluant magnitudines $\ddot{x}$, $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, erunt et harum fluxiones, fenfu definitionis quintæ; magnitudines nimirum Geometricæ, quæ velocitatum, quibufcum magnitudines $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ crefcunt vel decrefcunt, proportiones inter fe, fluendo vel permanendo, fervent. Tales autem magnitudines fluentium x, y, z fluxiones tertias Newtonus nominavit, atque fymbolis $\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$ defignari voluit. Fluxionum quarti, quinti, cujufvis demum ordinis, fimilis eft interpretatio.

Fig. 3.



Jam verò fint ΓΔ, ΛΠ magnitudines Geometricæ, quæ eâ lege fluant, ut velocitates quibufcum illæ crefcunt vel decrefcunt, magnitudinum fluentium AB, CD inter fe proportiones fervent, eis utique fluentium quantitatibus inter fe collatis, quæ fluendo fimul exfiftunt. Sunt igitur magnitudines AB, CD magnitudinum ΓΔ, ΛΠ, fenfu definitionis quintæ, fluxiones. E diverfo funt hæ illarum fluentes, quas fymbolis $\grave{x}$, $\grave{y}$ Newtonus defignavit, literis x, y, magnitudines AB, CD defignantibus.

Rurfum magnitudines Geometricæ quarum velocitates crefcendi decrefcendive magnitudinum ΓΔ, ΛΠ proportiones inter fe fervant, iis utique fluentium quantitatibus, quæ fluendo fimul exfiftunt inter fe collatis, rectarum ΓΔ, ΛΠ fluentes funt, rectarum verò AB, CD fluentes fecundæ vocandæ, et more Newtoniano fymbolis $\overset{\backslash\backslash}{x}$, $\overset{\backslash\backslash}{y}$ defignantur.

In fummâ, ex quâvis magnitudine fluente (puta x) tanquam radice, fluentium et fluxionum in utramque partem infinita eft progreffio, $\overset{\backslash n}{x}$—$\overset{\backslash\backslash\backslash\backslash}{x}$, $\overset{\backslash\backslash\backslash}{x}$, $\overset{\backslash\backslash}{x}$, $\overset{\backslash}{x}$, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$—$\overset{\cdot n}{x}$, quæ tamen omnes vi definitionis quintæ ad magnitudines Geometricas revocantur.

VI.

Similiter, vel *eodem modo* fluere dicuntur quantitates, quæ fingulæ fimul nafcuntur, vel fimul evanefcunt.

VII.

Contrariè fluere dicuntur, quarum nafcente alterâ, altera evanefcit.

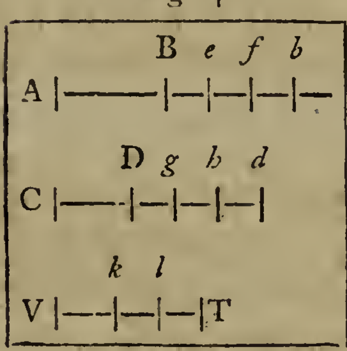
THE-

T H E O R E M A   P R I M U M.

Theor. I.

Magnitudinum, quæ fluunt, Fluxiones inter ſe proportiones habent, quæ incrementorum naſcentium ſunt primæ, vel evaneſcentium ultimæ.

Fig. 4.



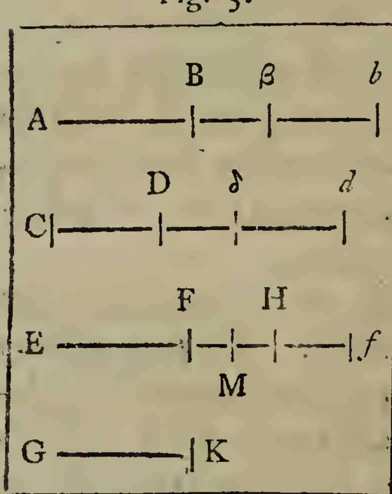
Sint lineæ primò magnitudines quæ fluunt. Fluant igitur lineæ AB, CD, et fluendo longitudines illas AB, CD ſint adeptæ. Fluendo autem perſeverantes, dato quovis tempore longitudines novas A*b*, C*d* adipiſcantur, ut ſint B*b*, D*d* incrementa linearum fluentium, fluendo ſimul facta. Dico fluxionem rectæ AB ad fluxionem rectæ CD proportionem habere, quæ prima eſt naſcentis incrementi B*b* ad incrementum naſcens D*d*; vel, ſi regreſſu punctorum B, D verſus A, C lineæ illæ decreſcant, quæ ultima eſt evaneſcentis incrementi B*b* ad D*d* ſimul evaneſcens.

Rectæ AB, CD vel utraque fluunt velocitate æquabili, vel altera quidem æquabili, mutabili altera; vel utraque denique mutabili. Fluant primò velocitate utraque æquabili. Spatia igitur B*b*, D*d* velocitatibus æquabilibus eodem tempore confecta, erunt inter ſe ut velocitates. Et ſi dividatur B*b* in partes quot volueris æquales B*e*, *ef*, *fb*, tum ſi D*d* in partes totidem æquales dividatur D*g*, *gh*, *hd*; erunt B*e*, D*g* rectarum AB, CD incrementa, incrementis B*b*, D*d* minora, fluendo ſimul facta. Nam ſi dividatur tempus totum VT, quo ſpatia B*b*, D*d* ſunt confecta, in particulas V*k*, *kl*, *l*T inter ſe æquales, numero autem totidem quot ſunt partes in quas linearum B*b*, D*d* utraque diviſa eſt, erit B*b* ad B*e*, ut tempus VT ad tempus V*k*. Erit etiam D*d* ad D*g*, ut tempus VT ad tempus V*k*. Spatia verò, velocitatibus æquabilibus deſcripta, ſunt inter ſe ut tempora, quibus confecta ſunt. Eſt igitur B*b* ad B*e* ut ſpatium puncto mobili B, datâ velocitate lato, tempore VT confectum, ad ſpatium eodem puncto eâdem velocitate tempore V*k* confectum. Eſt autem B*b* illud ipſum ſpatium, quod punctum B tempore VT confecit. Erit igitur B*e* illud ipſum ſpatium, quod punctum B tempore V*k* confecerit. Simili ratione concludetur eſſe D*g* ſpatium, quod punctum D, datâ velocitate ſuâ latum, eodem tempore V*k* confecerit. Sunt igitur B*e*, D*g* rectarum AB, CD incrementa fluendo ſimul facta, ſive ſpatia punctis B, D ſimul confecta. Erunt igitur inter ſe ut punctorum velocitates. Neque huic rationi officiet temporis V*k* magnitudo, magna illa parvave fuerit. Numero igitur particularum V*k*, *kl*, *l*T in infinitum creſcente, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus, ſi rectarum B*b*, D*d*, ac temporis VT diviſiones ſimiles ſemper fiant (ex quo ſcilicet numerus partium B*e*, *ef*, *fb*, necnon D*g*, *gh*, *hd* infinitè augebitur, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus) manebit rectarum B*b*, D*d* partibus ſimul genitis, B*e*, D*g* data velocitatum ratio, quibuſcum puncta

Theor. I. ta B, D æquabiliter feruntur. Quare data illa velocitatum ratio naſcentium Be, Dg prima erit, vel evaneſcentium ultima. In hoc caſu igitur velocitates motuum punctorum B, D, hoc eſt, fluxiones rectarum AB, CD inter ſe proportionem habent incrementorum naſcentium primam, vel evaneſcentium ultimam. Q. E. D.

Cas. 2. Sed fluat AB velocitate mutabili, fluente CD æquabiliter. Velocitas puncti B progredientis vel ſenſim augetur, vel ſenſim langueſcit. Primò augeatur. Exponatur recta EF datæ cujuſvis longitudinis. Sit alia Ef ad quam EF proportionem habeat, quam velocitas motûs puncti B è loco B egredientis ad velocitatem motûs ejuſdem puncti B è loco aliquo b ulteriori. Sit etiam GK recta, ad quam EF proportionem habeat velocitatis motûs puncti B, è loco B, ad velocitatem æquabilem puncti D rectam CD generantis. Jam Bb major erit, quàm ut habeat ad Dd proportionem quam EF ad GK; minor verò, quàm ut habeat ad eandem Dd proportionem quam Ef ad GK. Nam ſi punctum B, id omne temporis quo rectam Bb generavit, cum velocitate illâ, quâ è loco B primùm egreſſum eſt, æquabiliter latum eſſet, rectam utique generâſſet illâ Bb minorem; quæ quidem ad Dd rationem habuiſſet quam EF ad GK. Sin punctum B cum majore illâ velocitate, quâ è loco b egreditur, è loco B exiiſſet, tempus, quo Bb reverâ generavit, motu æquabili perſeverans, majorem generâſſet; quæ ad Dd rationem habuiſſet quam Ef ad GK. Major igitur eſt Bb quàm ut habeat ad Dd rationem rectæ EF ad GK, ſed minor eadem, quàm quæ rationem ad eandem habeat quam Ef ad GK. Regredientibus autem punctis B, D à locis b, d verſus B, D, ratio evaneſcentis Bb ad evaneſcentem Dd ſenſim minuet; et rationem rectæ EF ad GK, quam ſemper ſuperat, propiùs tamen acceſſura eſt, quàm pro datâ quâvis differentiâ. Non enim. Erit igitur ratio aliqua minoris quidem quàm rectæ Ef ad GK, majoris verò quàm EF ad GK, quâ ratio evaneſcentis Bb ad evaneſcentem Dd non minor fiet. Ejuſmodi ſit ratio rectæ EH ad GK. Recta igitur EH minor eſt quàm Ef, major autem eadem quàm EF. Jam cùm puncti B velocitas, è loco B progredientis, ſenſim creſcat; ſi detur velocitas major quidem quàm illa, quæ eſt motûs puncti B è loco B, minor verò quàm illa, quæ eſt motûs puncti B è loco b; erit locus aliquis locorum B, b intermedius, ex quo motûs puncti B velocitas datâ illâ minor erit. Detur igitur velocitas, quæ habeat ad velocitatem puncti D rectam CD generantis, proportionem quam EH ad GK. Hæc major erit velocitate quæ eſt motûs puncti B è loco B, minor verò illâ quæ eſt motûs puncti B è loco b. Sit β locus locorum B, b intermedius, ex quo velocitas motûs puncti B datâ minor ſit. Sit Dδ ſpatium puncto D confectum, dum punctum B ſpatium Bβ abſolvat. Sit EM recta, quæ habeat ad GK rationem, quam velocitas motûs puncti B è loco β ad velocitatem motûs puncti D æquabilem. Erit illa EM minor quàm ut habeat ad GK rationem quam EH ad GK. Omnino igitur minor quàm ut habeat ad GK rationem quam Bβ ad Dδ; cùm ratio illius Bβ ad Dδ ratione EH ad GK minor eſſe nequeat (id enim poſuimus).

Fig. 5.



Quare

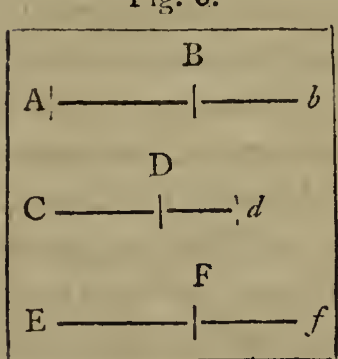
Quare Bβ major eſt, quàm ut habeat ad Dδ rationem quam EM ad GK. Theor. I.
Sunt autem Bβ, Dδ rectarum AB, CD incrementa, fluendo ſimul facta, quorum illud velocitate generatum eſt creſcente, hoc æquabili. Sunt etiam rectæ EF, EM ad rectam GK, ſicut velocitates motûs puncti B è locis B, β ad velocitatem æquabilem puncti D. Ergo recta Bβ major quidem erit, quàm ut ſit ad Dδ ut EF ad GK, ſed minor eadem quàm ut ſit ad Dδ ut EM ad GK. Sed major jam oſtenſa eſt Bβ quàm pro hâc ratione. Simul utique major et minor. Quod eſt abſurdum.

Non igitur eſt ratio ulla minoris quidem quàm Ef ad GK, majoris verò quàm EF ad eandem GK, quâ ratio evaneſcentis Bb ad evaneſcentem Dd non ſit minor; quæ tamen rationem EF ad GK ſemper exſuperat. Quare ratio EF ad GK, quæ eſt fluxionis rectæ AB ad fluxionem rectæ CD, evaneſcentis Bb ad evaneſcentem Dd erit ultima, eademque naſcentium prima.

Quòd ſi velocitas motûs puncti B progredientis ſenſim langueſcat, ſimilis erit et in hoc caſu Theorematis demonſtratio.

CAS. 3. Sed fluant AB, CD velocitate utraque mutabili. Sic etiam dico fluxionem rectæ AB ad fluxionem rectæ CD proportionem habere, quæ prima eſt naſcentis incrementi Bb ad naſcens Dd, vel ultima evaneſcentis Bb ad Dd ſimul evaneſcens. Fluat enim tertia aliqua recta EF æquabiliter. Et ſit Ff incrementum quod recta EF acceperit, quo tempore rectis AB, CD acceſſerint Bb, Dd. Tum (per Caſ. præc.) erit Bb ad Ff ultimò, ut fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ EF, et Ff ad Dd ultimò, ut fluxio rectæ EF ad fluxionem rectæ CD. Quare ex æquo erit Bb ad Dd ultimò, ut fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ CD. Q. E. D.

Fig. 6.



CASUS GENERALIS SECUNDUS.

Sint jam Superficies magnitudines quæ fluant. Fluant igitur ſuperficies A, B (vid. fig. Def. 4.) Exponantur rectæ æquales DE, FG; ad quas ſuperficierum fluentium fiat applicatio, ut ſint rectangula EL, GM, magnitudinibus quibuſvis fluentium, fluendo ſimul factis, æqualia, item rectangula El, Gm aliis quibuſvis earundem fluentium magnitudinibus, fluendo ſimul factis. Jam fluxiones ſuperficierum fluxionibus laterum ex applicatione oriundorum, linearum inquam DL, FM fluxionibus ſunt æquales. (Vid. Def. 4 & 5.) Rectarum verò DL, FM fluxiones inter ſe proportiones habent, quæ primæ ſunt incrementorum naſcentium Ll, Mm (per Caſ. Gen. 1.) Hoc eſt, quæ ſunt primæ rectangulorum naſcentium Ol, Pm, vel eorundem evaneſcentium ultimæ. Hiſce verò rectangulis ſuperficierum fluentium incrementa, fluendo ſimul facta, ſemper ſunt æqualia. Eædem igitur erunt naſcentium rationes primæ, vel evaneſcentium ultimæ. Fluentibus igitur ſuperficiebus A, B, fluxiones inter ſe rationes habent, quæ primæ ſunt incrementorum naſcentium, vel evaneſcentium ultimæ. Q. E. D.

CASUS GENERALIS TERTIUS.

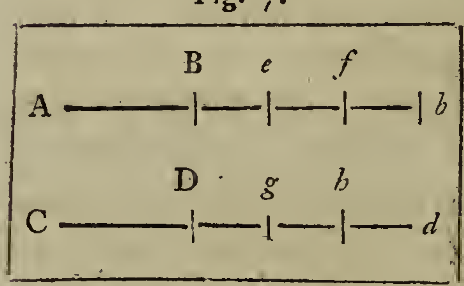
Si Solida ſint magnitudines, quæ fluunt, ſimilis erit et in hoc caſu propoſitionis probatio, Solidorum fluxionibus ad Rectarum fluxiones revocatis.

Cor. Hæc ita ſe habent, ſi magnitudines ſimiliter fluant. Sed et contrariè fluentium fluxiones inter ſe rationem habent, quæ prima eſt naſcentis incrementi magnitudinis creſcentis ad decrementum naſcens magnitudinis decreſcentis. Quod iiſdem planè argumentis effici poteſt.

THEOREMA II.

Magnitudides inter ſe æquales ſi fluant, et fluendo æqualitatem, quam initio fluxûs habuere, inter ſe ſemper ſervent, harum fluxiones ſemper erunt inter ſe æquales. Viciſſim, quarum magnitudinum fluxiones ſemper ſunt æquales, hæ, dummodo homogeneæ ſint, et ſimiliter fluant, vel ſemper inter ſe æquales erunt, vel altera alterâ major erit datâ; utique ſi conferantur fluentium quantitates, quæ fluendo ſimul exſiſtunt.

Fig. 7.



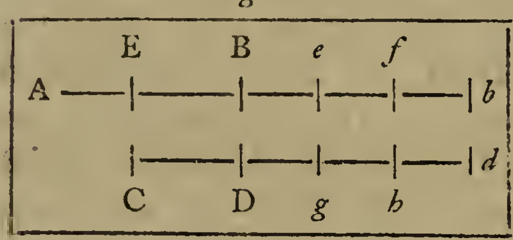
Sint magnitudines æquales AB, CD, quæ fluant, et fluendo æqualitatem inter ſe ſemper ſervent. Dico harum fluxiones ſemper eſſe inter ſe æquales. Sint B*b*, D*d* magnitudinum fluentium incrementa quæ ſimul fluendo exſiſtunt, tempore quovis finito genita. Erunt igitur A*b*, C*d* inter ſe æquales. Et propter æquales AB, CD, erunt etiam B*b*, D*d* inter ſe æquales. Nec huic rationi officient incrementorum B*b*, D*d* magnitudines, magna ea parvave fuerint, dummodo fluendo ſimul exſiſtant. Quare et naſcentium inter ipſa prima, vel evaneſcentium ultima ratio æqualitas erit. Sed incrementorum naſcentium ratio inter ipſa prima, vel evaneſcentium ultima eſt fluxionum ratio. Fluxiones igitur ſunt inter ſe æquales. Q. E. D.

Jam verò magnitudinum fluentium AB, CD fluxiones ſemper ſint æquales, et ſint fluentes magnitudines homogeneæ, et ſimiliter fluant. Dico fluentes vel ſemper inter ſe æquales eſſe, vel alterâ alteram datâ majorem, ſi quantitates, quæ fluendo ſimul exſiſtunt, conferantur. Sint AB, CD magnitudines quas initio fluxûs fluentes habuerunt, ſive priuſquam fluere inceperint. Sint B*b*, D*d* incrementa ſimul genita. Horum utrumque in partes quotvis dividas, numero æquales, temporibus iiſdem ordine genitas; nempe B*b* in partes B*e*, *ef*, *fb*; D*d* in partes totidem D*g*, *gh*, *hd*. Jam ſi partium utriuſque numerus infinitè augeatur, magnitudinibus ſingularum infinitè decreſcentibus, erunt partium ſimul genitarum rationes naſcentium primæ, ſive evaneſcentium ultimæ, eædem quæ fluxionum rationes (per Theor. I. hujus). Hoc eſt, erit B*e* ad D*g* ultimò ut fluxio magnitudinis AB ad fluxionem magnitudinis CD. Et *ef* ad *gh* ultimò ut fluxio magnitudinis A*e* ad fluxionem magnitudinis C*g*. Et *fb* ad *hd* ultimò ut fluxio magnitudinis A*f* ad fluxionem magnitudinis C*h*. Eſt autem æqualitas fluxionum fixa ratio (id enim poſuimus) Quare partium B*e*, *ef*, *fb* ad partes D*g*, *gh*, *hd*

naſcentium

nascentium ad nascentes, vel evanescentium ad evanescentes, est æqualitas ratio prima, vel ultima, communis. Ergo magnitudines totæ B*b*, D*d* sunt inter se æquales (per Cor. Lem. IV. Newton. de Rat. Prim. et Ult.) Datæ autem AB, CD (datas enim semper intelligo fluentium initio fluxûs magnitudines, quod semel monuisse satis esto) datæ inquam AB, CD vel æquales sunt inter se, vel inæquales. Si æquales sint, erunt A*b*, C*d* inter se æquales. THEOR. III.

Fig. 8.

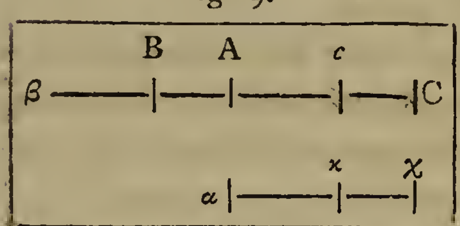


Si inæquales sint AB, CD, altera ex illis major erit. Sit AB major, et auferatur BE minori CD æqualis. Ergo data erit AE, et E*b*, C*d* inter se æquales erunt. Ergo A*b* datâ major est quàm C*d*. Sunt igitur A*b*, C*d* vel æquales inter se, vel altera alterâ est datâ major. Q. E. D.

THEOREMA III.

Si duæ magnitudines eâ lege fluant, ut simul sumptæ, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, datæ cuidam æquales sint, fluxiones earum æquales quidem, sed contrariæ erunt. Et si duarum fluentium fluxiones inter se semper æquales sed contrariæ sint, fluentium summa, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, datæ cuidam æqualis erit.

Fig. 9.



Duæ magnitudines, quæ initio fluxûs sint AB, AC, junctæque summam efficiant BC, eâ lege fluant, ut datæ BC earum summa semper sit æqualis. Dico earum fluxiones inter se æquales, sed contrarias esse. Et contrarias quidem esse fluentium AB, AC fluxiones, hoc est, magnitudines illas contrariè fluere, manifestum est; siquidem earum summæ sua constet magnitudo. Nam si earum altera, puta AB, crescat, opus est decrescat altera, ne crescente utrâque summa crescat. Vicissim, si altera, puta AB, decrescat, opus erit crescat altera, ne utrâque decrescente summa decrescat. Fluunt igitur AB, AC modis inter se contrariis. Dico earum fluxiones inter se æquales esse. Nam quo tempore AB fluendo facta est A*β*, contrariè fluendo altera AC fiat A*c*. Duarum igitur A*β*, A*c* summa *βc* datæ BC æqualis erit. Ablatâque communi B*c*, erunt *β*B, C*c* inter se æquales. Hoc est, illud quo aucta est AB æquale erit ei quo imminuta est AC, vel vicissim. Neque huic rationi officiet illarum B*β*, C*c* magnitudines, magnæ parvæve fuerint, dummodo fluendo simul genitæ. Quare et nascentium B*β*, C*c* prima inter ipsas ratio æqualitas erit. Quæ verò nascentibus B*β*, C*c* inter ipsas est prima, eadem magnitudinum AB, AC fluxionibus inter ipsas ratio erit. (Th. I. Cor.) Quare et fluxiones illæ inter se æquales erunt. Q. E. D.

Rursum magnitudinum duarum AB, AC contrariè fluentium, ut crescente alterâ, altera decrescat, intelligantur fluxiones semper inter se æquales. Dico fluentium summam, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, datæ cuidam æqualem esse; ei nimirum, quam magnitudines initio fluxûs

Theor. III & IV. fluxûs compositæ conficiebant. Sint enim $A\beta$, Ac fluentium quantitates quævis, quæ simul fluendo exsistunt. Dico harum summam βc magnitudini BC æqualem esse. Sit enim $\alpha\varkappa$ magnitudo quædam, quæ eâ lege fluat, ut fluenti $A\beta$ addita, jungendo utique quæ simul fluendo exsistunt, summam reddat datæ BC æqualem. Fluentium igitur $A\beta$, $\alpha\varkappa$ fluxiones contrariæ quidem, sed inter se æquales erunt; per ea quæ modò ostendimus. Fluentium autem $A\beta$, Ac fluxiones sunt inter se æquales; sic enim posuimus. Quare fluentium Ac, $A\varkappa$ fluxiones inter se æquales erunt. Et fluentes illæ, cùm utraque earum contrario modo fluat atque $A\beta$, similiter utique fluunt. Quum verò $\alpha\varkappa$ eâ semper lege fluat, ut fluenti $A\beta$ addita summam reddat datæ BC æqualem, si $A\beta$ refluendo fiat AB, illa autem $\alpha\varkappa$ refluendo simul fiat $\alpha\chi$, erunt $\alpha\chi$, AC inter se æquales. Magnitudines igitur AC, $\alpha\chi$, quarum similiter fluentium fluxiones semper sunt inter se æquales; hæ, cùm initio fluxûs inter se æquales sint, manebunt semper quidem inter se æquales, si conferantur utique earum quantitates quæ fluendo simul exsistunt (Th. II) At simul fluendo exsistunt Ac, $\alpha\varkappa$, nempe cùm earum utraque simul cum $A\beta$ fluendo exsistat. Sunt igitur Ac, $\alpha\varkappa$ inter se æquales. Additâque communiter $A\beta$, duæ $A\beta$, Ac simul sumptæ duabus $A\beta$, $\alpha\varkappa$ simul sumptis æquales erunt. Sed duæ $A\beta$, Ac simul sumptæ summam efficiunt βc. Et duæ $A\beta$, $A\varkappa$ simul sumptæ datæ BC æquales sunt. Id enim posuimus. Quare βc datæ BC est æqualis. Q. E. D.

SCHOLIUM.

Quantitatum contrariè fluentium fluxiones algebraicè hoc modo designari solent: $\dot{x} = -\dot{y}$. Et quoties calculis artificiosè subductis, istiusmodi tandem æquatio evaserit, indicio est, quantitatem $x+y$ permanenti cuidam æqualem esse.

THEOREMA IV.

Magnitudines, quæ datam inter se rationem habent, si fluant, et fluendo rationem datam, quam initio fluxûs habuere, inter se semper servent, harum fluxiones datam fluentium suarum rationem inter se semper habent. Vicissim, quarum magnitudinum fluxiones datam inter se rationem semper servant, hæ dummodo homogeneæ sint, et similiter fluant, vel datam fluxionum suarum rationem inter se semper habent, vel altera alterâ major erit datâ quàm pro fluxionum ratione; utique si conferantur fluentium quantitates illæ, quæ fluendo simul exsistunt.

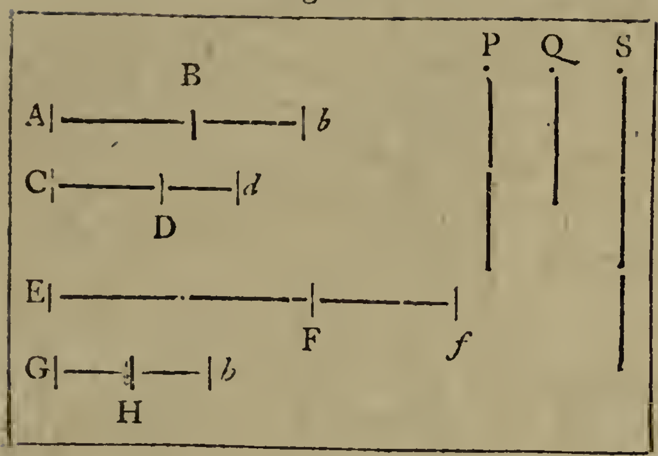
Demonstratur hæc Propositio ad modum secundæ, imò iisdem planè verbis, si in illius demonstratione pro *ratione æqualitatis ratio data* ubique supponatur.

THEOREMA V.

Fluentibus magnitudinibus homogeneis, fluxionum summa summæ erit fluxio, differentia differentiæ.

Fluant magnitudines homogeneæ AB, CD. Fluat tertia EF cum prioribus homo-

Fig. 10.



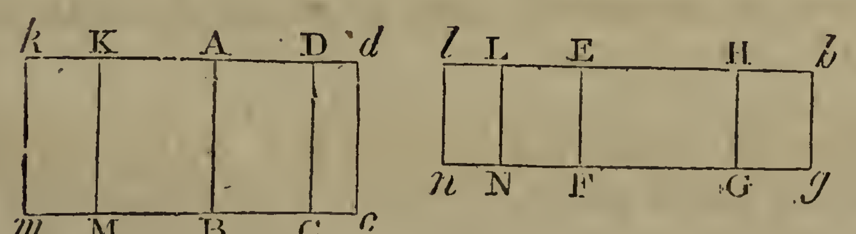
homogenea, eâ lege ut EF duarum AB, CD summæ semper sit æqualis, nimirum si conferantur fluentium magnitudines fluendo simul factæ. Rursum fluat alia GH cum prioribus etiam homogenea, eâ lege ut GH duarum AB, CD differentiæ semper sit æqualis, si magnitudines fluendo simul factæ conferantur. Dico fluxionum AB, CD summam magnitudinis EF fluxionem esse, earundem verò fluxionum differentiam magnitudinis GH esse fluxionem. Sint enim P, Q magnitudinum AB, CD fluxiones, et S fluxio magnitudinis EF. Sint AB, CD, EF magnitudines fluendo simul factæ; et sint B*b*, D*d*, F*f* magnitudinum fluentium AB, CD, EF incrementa fluendo simul facta. Habet igitur S ad P rationem nascentis F*f* ad nascens B*b* primam (per Prop. I. hujus). Habet quoque S ad Q rationem nascentis F*f* ad nascens D*d* primam. Habet igitur S ad duas P, Q simul sumptas rationem eam, quæ prima est nascentis F*f* ad nascentia B*b*, D*d* simul sumpta. Quoniam verò AB, CD simul sumptæ magnitudini EF æquales sunt, et A*b*, C*d* simul sumptæ magnitudini E*f*, erunt incrementa B*b*, D*d* simul sumpta incremento F*f* æqualia. Neque huic rationi officient incrementorum magnitudines, magna illa parvave fuerint. Quare et nascentis F*f* ad nascentia B*b*, D*d* simul sumpta æqualitas prima ratio erit. Sed prima illa ratio magnitudinis est S ad duas P, Q simul sumptas; ex priùs ostensis. Magnitudo igitur S duabus P, Q simul sumptis est æqualis. Hoc est, fluxio magnitudinis EF summæ fluxionum AB, CD.

Theor. V & VI.

Et simili prorsus argumento concludetur fluxionem magnitudinis GH duarum P, Q differentiæ esse æqualem. Q. E. D.

THEOREMA VI.

Si rectangulis fluentibus unum tantummodò latus unicuique fluat, arearum fluxiones inter se rationem habent compositam è ratione datâ laterum permanentium, et è ratione fluxionum laterum quæ fluunt, vel datâ vel mutabili.

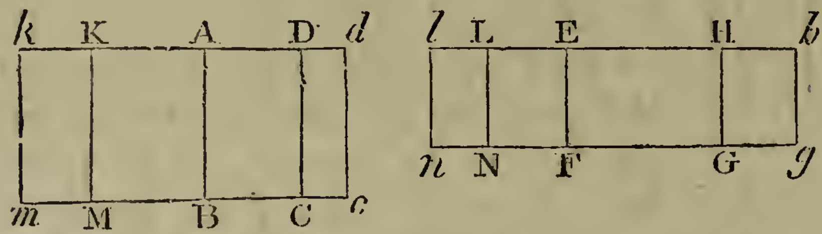


Rectangulorum ABCD, EFGH intelligantur latera AB, EF permanere, alteris AD, EH fluentibus. Dico fluxionem rectanguli AC ad fluxionem rectanguli EG rationem habere compositam è ratione datâ datæ AB ad datam EF, et ratione fluxionis rectæ AD ad fluxionem rectæ EH; quæ vel data erit vel mutabilis, prout rectarum AD, EH vel utriusque vel alterius tantùm fluxus sit æquabilis. Rectarum AD, EH longitudines, dato quovis tempore, ex illis

AD,

THEOR. VI & VII.

AD, EH in alias Ad, Eh mutentur; ut ſint Dd, Hh incrementa rectarum fluentium fluendo ſimul facta. Erunt igitur rectangula Dc, Hg incrementa arearum fluentium fluendo ſimul facta. Arearum igitur fluxiones eam inter ſe rationem habebunt, quæ rectangulorum Dc, Hg vel naſcentium prima eſt, vel evaneſcentium ultima. Hoc eſt, quæ compoſita eſt è ratione datâ rectæ AB ad rectam EF, cum illâ quæ rectæ Dd ad rectam Hh, naſcentis ad naſcentem, vel evaneſcentis ad evaneſcentem, prima ultimave erit. Sed ratio quæ rectis Dd, Hh vel naſcentibus inter ipſas prima, vel evaneſcentibus erit ultima, ea rectarum AD, EH fluxionum ratio eſt. Arearum igitur fluentium AC, EG fluxiones inter ſe rationem habent compoſitam è ratione datâ rectæ AB ad rectam EF, et ratione fluxionum laterum quæ fluunt, AD, EH, vel datâ vel mutabili.



COR. In rectis DA, HE capiantur AK, EL, quæ ſint inter ſe ſicut velocitates, quibus puncta A, E, quorum motu rectæ AD, EH generantur, è locis ſuis primis A, E egrediuntur. Et fluentibus rectis AD, EH, rectæ AK, EL vel permaneant, vel fluant; eâ quidem lege, ut velocitatum fluendi rectarum AD, EH rationes inter ſe, vel permanendo vel fluendo, ſervent. Si punctorum A, E, K, L, capiantur loca quæ ſimul ea appulerint, d, h, k, l, erunt Ak, El fluxiones rectarum Ad, Eh, ſenſu definitionis quintæ; et ſi rectangula Am, En compleantur, erunt rectangula illa rectangulorum Ac, Eg eodem ſenſu fluxiones; ut ex hoc Theoremate ſatis patet. Jam ſi rectas datas AB, EF literæ a, b deſignent, mutabiles autem Ad, Eh literæ x, y; rectangulorum ax, by, erunt rectangula $a\dot{x}$, $b\dot{y}$ fluxiones: notis utique $\dot{x}$, $\dot{y}$ rectas Ak, El deſignantibus, vel datas quidem illas vel mutabiles, prout ratio fluendi rectarum AD, EH poſtulaverit.

THEOREMA VII.

Parallelopipedis rectangulis, ſi, fluentibus altitudinibus, baſes permaneant, Solidorum fluxiones inter ſe rationem habent è ratione datâ baſium permanentium, et ratione fluxionum altitudinum, ſive datâ, ſive mutabili, componendam. Sin altitudinibus permanentibus baſes fluant, Solidorum fluxiones rationem inter ſe habebunt è ratione altitudinum datâ, et ratione fluxionum baſium, ſive datâ, ſive mutabili, componendam.

Demonſtratur caſus uterque ad exemplum præcedentis, colligendo rationes primas incrementorum ſolidorum naſcentium, ſive evaneſcentium eorundem ultimas.

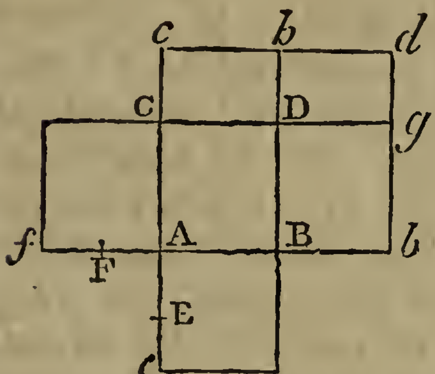
COR. Parallelopipedorum rectangulorum abx, cdy ſunt parallelopipeda $ab\dot{x}$, $cd\dot{y}$ fluxiones, adhibitâ ſimili atque in præcedentibus notarum interpretatione.

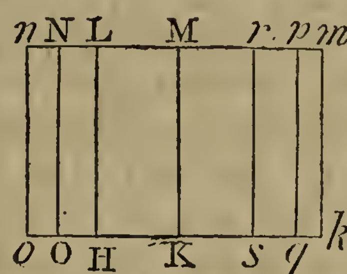
THEOREMA

THEOREMA VIII.

THEOR. VIII.

Si rectanguli latus utrumque fluat, et sumantur rectæ, quæ, sensu definitionis quintæ, laterum sint fluxiones; rectangulorum sub latere utroque et alterius lateris fluxione summa, siquidem latus utrumque eodem modo fluat, sin latera contrariè fluant, horum rectangulorum differentia, rectanguli fluxio erit.





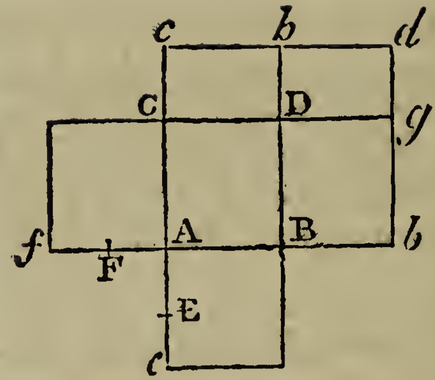
Rectanguli AD latera AB, AC fluant, ac primùm quidem eodem modo, hoc est, ut vel crescat utrumque, vel utrumque decrescat. Capiantur rectæ AF, AE, quarum AF sit ad AE, ut velocitas, quâ punctum generans rectam AB è loco A egreditur, ad velocitatem quâ punctum generans rectam AC ex eodem loco A decedit. Progredientibus autem punctis B, C, rectæ AF, AE vel permaneant, vel eâ lege fluant, ut velocitatum fluendi rectarum AB, AC, rationes inter se, vel permanendo, vel fluendo, servent. Si capiantur punctorum B, C, F, E loca quævis B, C, *f*, *e*, quæ simul ea appulerint, erunt A*f*, A*e* rectarum AB, AC, sensu definitionis quintæ, fluxiones. Completisque rectangulis AD, C*f*, B*e*, dico rectangula C*f*, B*e*, simul sumpta, rectanguli AD esse fluxionem.

Exponatur recta LH datæ cujusvis magnitudinis, cui recta LM ad perpendiculum insistens eâ lege fluat, ut rectangula AD, LHKM semper sint inter se æqualia, si sumantur punctorum B, C, M loca illa quæ simul ea appulerint. In rectâ ML capiatur LN, quæ habeat ad AF, AE rationes eas quas velocitas, quâ punctum L, rectam LM generans, è loco L egreditur, ad velocitates, quibus puncta rectas AB, AC generantia è loco A discedunt. Et LN aut permaneat, aut eâ lege semper fluat, ut rectæ LN longitudines sint inter se ut puncti M velocitates, si capiantur punctorum M, N loca, quæ simul ea appulerint, M, *n*. Erit igitur L*n*, sensu definitionis quintæ, fluxio rectæ LM. Completoque rectangulo H*n*, erit rectangulum H*n* fluxio rectanguli LK (per Th. VI. Cor.) Rectangulorum autem LK, AD fluxiones semper sunt inter se æquales, si capiantur punctorum B, C, M loca quæ simul ea appulerint (per Th. II. hujus). Rectangulum igitur H*n* rectanguli AD fluxioni æquale erit.

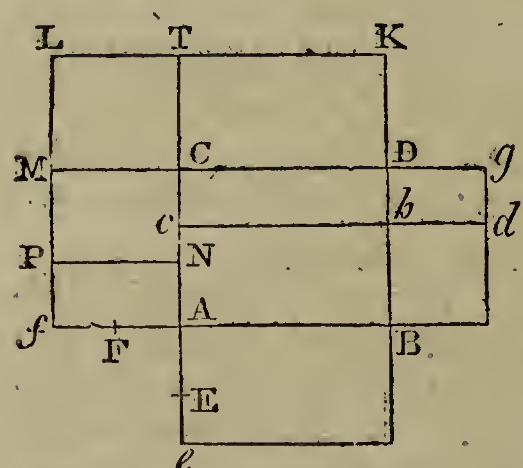
Sint *b*, *c*, *m* punctorum B, C, M loca quævis, quæ simul ea appulerint, prioribus B, C, M ulteriora, et compleantur rectangula A*d*, L*k*. Rectanguli verò A*d* lateribus *bd*, *cd*, occurrant CD, BD productæ in *g*, *h* punctis. Rectangulum H*n* ad rectangulum C*f* rationem habet è rationibus HL ad AC et L*n* ad A*f* compositam. Sed cùm L*n*, A*f* fluxiones sint rectarum LM, AB, quarum M*m*, B*b* sunt incrementa fluendo simul facta; ratio L*n* ad A*f*, nascentis M*m* ad nascentem B*b* prima erit (per Th. I. huj.) Rectangulum igitur H*n* ad rectangulum C*f* rationem habet è ratione datæ HL ad AC,

 five

THEOR. VIII.



ſive MK ad BD, naſcentiſque M*m* ad naſcentem B*b* primâ compoſitam. Sed ratio ex hiſce compoſita prima eſt rectanguli naſcentis M*k* ad rectangulum naſcens B*g*. Rectangulum igitur H*n* ad rectangulum *cf* rationem habet, quæ prima eſt naſcentis M*k* ad naſcens B*g*. Simili argumento concludetur, rectangulum H*n* ad rectangulum B*e* rationem habere, quæ naſcentis M*k* ad naſcens D*c* prima eſt. Rectangulum igitur H*n* ad rectangula duo *cf*, B*e* ſimul ſumpta rationem habet, quæ prima eſt naſcentis M*k* ad duo naſcentia B*g*, D*c* ſimul ſumpta (Elem. V. 24.) hoc eſt, ſi ad rectam MK applicetur MK*qp* duobus B*g*, D*c* ſimul ſumptis æquale, quæ prima eſt naſcentis M*k* ad naſcens M*q*. A rectangulo M*q* auferatur MK*sr* rectangulo D*c* æquale. Jam cùm rectangula L*k*, A*d* ſint inter ſe æqualia, necnon LK, AD (id enim poſuimus) rectangulum M*k* gnomoni B*bdc*C æquale erit. Ablatiſque æqualibus M*s*, D*c*, rectangula *rk*, B*d* erunt inter ſe æqualia. Rurſum cùm rectangulum M*q* duobus B*g*, D*c* ſimul ſumptis ſit æquale, ablatis æqualibus M*s*, D*c*, erunt *rq*, B*g* inter ſe æqualia. Quare *rk* erit ad *rq* ut B*d* ad B*g*. (El. V. 7.) Atque inter omnes rectangulorum *rk*, *rq*, B*d*, B*g* magnitudines, quæ ſimul fluendo exſiſtunt, hæc analogia obtinebit. Quare et naſcentium *rk*, *rq* prima inter ipſa ratio eadem erit, quæ naſcentium B*d*, B*g* prima. Sed naſcentibus B*d*, B*g* prima inter ipſa ratio eſt æqualitas. Naſcentibus igitur *rk*, *rq* eſt ipſa æqualitas prima inter ipſa ratio. Additoque communiter M*s*, naſcentium M*k*, M*q* ratio inter ipſa prima æqualitum erit. Sed naſcentis M*k* ad naſcens M*q* prima ratio, rectanguli eſt H*n* ad duo rectangula *cf*, B*e* ſimul ſumpta (ex priùs oſtenſis). Rectangulum igitur H*n* æquale eſt duobus rectangulis *cf*, B*e* ſimul ſumptis. Idem verò rectangulum H*n* fluxioni rectanguli AD jam olim oſtenſum fuit æquale. Quare eidem fluxioni rectangula duo *cf*, B*e* ſimul ſumpta ſunt æqualia. Q. E. D.



CAS. 2. Si creſcente latere uno, puta AB, latus alterum AC decreſcat, ſit T punctum in rectâ AC datum, ex quo punctum C rectâ verſus A movere incipiat, quo tempore punctum A rectam AB generans è loco ſuo primo A diſcedit. Sumantur rectæ AF, AE, quarum AF ſit ad AE, ut velocitas, quâ punctum A è loco A diſcedit, ad velocitatem quâ punctum C, verſus A movendo, egreditur è loco T. Progredientibus autem punctis B, C, rectæ AF, AE vel quibus ſint longitudinibus permaneant, vel eâ quidem lege fluant, ut velocitatum fluendi rectarum AB, AC rationes, permanendo vel fluendo, inter ſe ſemper ſervent. Si capiantur punctorum B, C, F, E loca quævis B, C, *f*, *e*, quæ ſimul ea appulerint, erunt

2 A*f*,

$A\dot{f}$, $A\dot{e}$ rectarum AB, AC fluxiones. Completisque rectangulis AD, $c\dot{f}$, $B\dot{e}$, dico rectangulorum $c\dot{f}$, $B\dot{e}$ in hoc casu differentiam, rectanguli AD fluxionem esse. Compleantur enim rectangula TB, AL. Rectangulum AD duorum TB, TD differentia est. Fluxio igitur rectanguli AD differentia est fluxionum duorum TB, TD. (Th. V.) Sed cùm AT data sit, et $A\dot{f}$ rectæ AB fluxio, rectangulum $T\dot{f}$ fluxio erit rectanguli TB (Th. VI. Cor.) Rursum cùm rectæ TK, AB, opposita utique parallelogrammi latera, semper sint inter se æquales; crescente hâc, illa quoque paribus incrementis crescet. Et cùm motus puncti C versus A quicquid rectæ AC detraxerit, id omne rectæ TC apponet, decrescente AC recta TC crescet, atque ita quidem, ut inter se semper sint æquales hujus et illius fluxiones. Rectis igitur AB, AC contrariè fluentibus, rectæ TK, TC eodem modo fluunt. Et fluentis TK est $A\dot{f}$ vel illi æqualis TL fluxio, fluentis autem TC fluxio $A\dot{e}$. Rectangulorum igitur CL, $B\dot{e}$ summa est rectanguli TD fluxio; hoc est, si ad CM applicetur rectangulum CP rectangulo $B\dot{e}$ æquale, ut sit TP duorum CL, $B\dot{e}$ summa, hoc ipsum TP fluxio erit rectanguli TD (per Cas. 1. huj.) Quare duorum TP, $T\dot{f}$ differentia, hoc est AP, rectanguli AD fluxio erit. Sed cùm CP, $B\dot{e}$ sint inter se æqualia (id enim factum) erit AP duorum $c\dot{f}$, $B\dot{e}$ differentia. Duorum igitur $c\dot{f}$, $B\dot{e}$ differentia fluxio est rectanguli AD. Q. E. D. THEOR. VIII.

Cor. 1. Rectanguli xy, si latera, x, y, eodem modo fluant, fluxio erit $x\dot{y}+y\dot{x}$. Sin latera contrariè fluant, ut crescente x, y decrescat, erit $y\dot{x}-x\dot{y}$ rectanguli fluxio; negatâ nimirum illâ fluxionis parte, quæ ex fluxione lateris decrescentis provenerit.

Cor. 2. Si laterum x, y magnitudines quæ fluendo simul exsistunt, semper sint æquales, rectangulum xy fit quadratum ex x, et fluxio fit $2x\dot{x}$, quadrati fluxio.

Cor. 3. Si rectanguli, lateribus fluentibus, magnitudo manet, latera contrariè fluunt, et eorum fluxiones ipsorum laterum inter se rationem gerunt. Vel si rectanguli latera contrariè fluant, et tali lege ut eorum fluxiones ipsorum laterum inter se rationem gerant, hujus rectanguli magnitudo manebit.

Rectangulum xy, lateribus x, y fluentibus, dato spatio æquale maneat. Dico latera x, y, modis contrariis fluere, et $\dot{x}$ esse ad $\dot{y}$ sicut x ad y. Ac primùm latera x, y modis contrariis fluere manifestum est, ne similiter illis fluentibus rectangulum ipsum, quod manere posuimus, fluat. At verò lateribus rectanguli xy contrariè fluentibus, fluxio rectanguli rectangulorum $\dot{x}y$, $y\dot{x}$ differentiæ æqualis erit (Th. VIII. Cas. 2). Sed rectanguli, cujus magnitudo manet, fluxio nulla est. Nulla igitur rectangulorum $\dot{x}y$, $y\dot{x}$ differentia. Rectangula igitur illa inter se æqualia. Unde $\dot{x}$ erit ad $\dot{y}$ ut x ad y. (El. VI.) Q. E. D.

E contrario, si rectarum x, y contrariè fluentium fluxiones rationem inter se rectarum ipsarum servent, dico rectanguli xy magnitudinem manere. Cùm enim sit $\dot{x}$ ad $\dot{y}$ ut x ad y rectangula $y\dot{x}$, $x\dot{y}$ erunt inter se æqualia. Quare nulla erit horum differentia. Rectanguli igitur xy fluxio nulla. Cujus autem magnitudinis fluxio nulla, ea utique manet. Q. E. D.

COROLLARIA. habet quantitatis a ad unitatem (Th. IV.) hoc eſt $nx^{n-1}\dot{x} : \dot{\overline{\frac{x^n}{a}}} = a : 1.$

Ergo $\dot{\overline{\frac{x^n}{a}}} = \frac{nx^{n-1}\dot{x}}{a}$. Q. E. D.

COR. 12. Quantitatis fractæ $\frac{a}{y^m}$, cujus, numeratore permanente, denominator fluit, quantitas fracta $\frac{-ma\dot{y}}{y^{m+1}}$ fluxio erit; ſigno — id nimirum ſignificante, contrariis ſemper modis fluere quantitatem fractam et denominatorem ejus; nempe decreſcere $\frac{a}{y^m}$ ſi y^m creſcat, ſi hæc decreſcat, illam creſcere.

Ponatur $\frac{a}{y^m} = s$. Tum $a = y^m s$. Quantitas igitur $y^m s$, ex fluentibus y^m, s, mutuâ multiplicatione facta, datæ ſemper æqualis eſt, vel quod perinde eſt, eadem ſemper manet. Hoc autem fieri nequit, niſi contrariè fluentibus illis y^m, s, quantitates $msy^{m-1}\dot{y}$, $y^m\dot{s}$ inter ſe æquales ſint. Sint enim inæquales, et inæqualium ſit z differentia. Erit igitur z fluxio quantitatis $y^m s$, è duabus y^m, s, contrariè fluentibus, mutuâ multiplicatione factæ (per Cor. 10). Fluet igitur quantitas $y\ s$, ſiquidem fluxionem habeat. Non igitur eadem manet. Quod eſt abſurdum, cùm manere oſtenſa ſit. Duæ igitur $msy^{m-1}\dot{y}$, $y^m\dot{s}$ non ſunt inæquales. Æquales igitur. Duæ igitur, $\frac{ms}{y}\dot{y}$, $\dot{s}$, inter ſe æquales. Hoc eſt, ſi pro s ſcribatur $\frac{a}{y^m}$, $\frac{ma}{y^{m+1}}\dot{y} = \dot{s}$. Q. E. D.

COR. 13. Quantitatis fractæ $\frac{x^n}{y^m}$, cui fluunt numerator et denominator, quantitas fracta $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}}$ fluxio erit; modò quantitas ipſa fracta $\frac{x^n}{y^m}$ eodem modo quo denominator ejus fluat.

Ponatur $\frac{x^n}{y^m} = z$. Quantitatum igitur, $\frac{x^n}{y^m}$, z, fluxiones erunt inter ſe æquales, hoc eſt $\dot{\overline{\frac{x^n}{y^m}}} = \dot{z}$.

Propter æquales autem $\frac{x^n}{y^m}$, z, erunt x^n, zy^m inter ſe æquales. Et æqualium x^n, zy^m fluxiones erunt inter ſe æquales. Ergo $nx^{n-1}\dot{x} = mzy^{m-1}\dot{y} + y^m\dot{z}$; modò y^m & z eodem modo fluant.

Ergo $nx^{n-1}\dot{x} - mzy^{m-1}\dot{y} = y^m\dot{z}$.

Ergo $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mz\dot{y}}{y} = \dot{z}$.

Hoc eſt, ſi pro z reſtituatur $\frac{x^n}{y^m}$, $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} - \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}} = \dot{z} = \dot{\overline{\frac{x^n}{y^m}}}$.

Sin contrariè fluant quantitas ipſa fracta $\frac{x^n}{y^m}$ et denominator ejus, erit $\frac{nx^{n-1}\dot{x}}{y^m} + \frac{mx^n\dot{y}}{y^{m+1}}$ quantitatis fractæ fluxio.

COR.

COR. 14. Si quantitas P ex quantitatibus quotvis fluentibus A, B, C, D, &c. mutuâ multiplicatione facta fit, quantitas fracta $\frac{\dot{P}}{P}$ quantitatum fractarum $\frac{\dot{A}}{A}$, $\frac{\dot{B}}{B}$, $\frac{\dot{C}}{C}$, $\frac{\dot{D}}{D}$ fummæ æqualis erit. COROLLARIA.

Cùm enim P quantitati $A \times B \times C \times D$ æqualis fit, erit $\dot{P} = BCD \times \dot{A} + ACD \times \dot{B} + ABD \times \dot{C} + ABC \times \dot{D}$ (per Cor. 7.)

Sed $BCD = \frac{P}{A}$, et $ACD = \frac{P}{B}$, et $ABD = \frac{P}{C}$, et $ABC = \frac{P}{D}$.

Ergo $\dot{P} = \frac{P\dot{A}}{A} + \frac{P\dot{B}}{B} + \frac{P\dot{C}}{C} + \frac{P\dot{D}}{D}$.

Ergo $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$. Q. E. D.

Cor. 15. Si P quantitati fractæ æqualis fit, cujus numerator ex quantitatibus quotcunque fluentibus A, B, C, D mutuâ multiplicatione factus eft, denominator ex quantitatibus quotcunque fluentibus, G, H, K, L; erit $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D} - \frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$.

Sit $Q = P \times G \times H \times K \times L$.

Ergo $\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L}$ (per Cor. præc.)

Sed cùm $P = \frac{A \times B \times C \times D}{G \times H \times K \times L}$, erit $P \times G \times H \times K \times L$, hoc eft $Q = A \times B \times C \times D$.

Ergo $\frac{\dot{Q}}{Q} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$ (per Cor. præc.)

Quare $\frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{G}}{G} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D}$; et eadem utrinque auferendo, $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} + \frac{\dot{D}}{D} - \frac{\dot{G}}{G} - \frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$. Q. E. D.

Corollariis duobus noviffimis expofita funt Maclaurini Theoremata duo, quorum ufus in computationibus fluentium Algebraicis latè patet. (*Maclaurin*, *Treatife of Fluxions*, *Book* II. *C.* I. *Prop.* IV & V.)

ITA demum formulas, quarum ope, quantitatum omnium quæ fub generali *Genitarum* (a) nomine Newtono funt comprehenfæ, Algebraicè æftimari fluxiones folent, ex paucis illis doctrinæ fluxionalis deduximus principiis, quæ octo utique Theorematis conclufa, demonftrationibus confirmavimus Newtonianis; hoc eft, è Newtonianâ Rationum Primarum et Ultimarum Geometriâ arceffitis. Ex quo genere rationum conclufiones, modò peritè fint deductæ, nec ipfis Archimedeis, meo equidem judicio, aut evidentiâ aut venuftate cedunt. Nec dubito tamen fore multos, qui noftram in hifce condendis diligentiam, ut nimiam, reprehendent. Sed ii

(a) Vide Princip. Lib. II. Lemma 2.

potiffimùm

COROLLARIA.

potiſſimùm erunt, qui cùm ea quæ tradimus ipſi ſint conſecuti, aliorum conditionis immemores, ſupervacanea putant quibus ipſi non egent; vel quorum judicia parùm reformido, homines haud indocti quidem illi ſed incurioſi et inelegantes, qui cùm omnia feſtinanter ipſi arripuerint, utpote minùs ſcilicet ingenii perpolitionem, qui potiſſimus eſt doctrinæ fructus, quàm inanem quandam ſcientiæ famam ex ſtudiis captantes, conciſum ſcribendi genus ipſi ſummoperè affectant, alios explicatiùs differentes ægrè ferunt. Qui proprias ſcriptiones non tam verborum brevitate, quàm rerum prætermiſſione et tranſcurſu contrahunt. Ac veluti ſapiente nihil magis indignum exiſtimarent, quàm clarè et apertè loqui, Theoremata Geometrica ſub involucris ſymbolorum proferunt, dicam, an occultant. Horum demonſtrationes plerumque ſtudioſè celant. Aut ſi forte benigniùs agere velint, argumentorum vice, computationes edunt; ex quibus nulla certè probatio efficitur, niſi ei qui ad calculos ratiocinia revocaverit. Quem ſane nimium laborem, niſi in rebus maximis, nemo cordatior ſubierit. Vel ſiquando, in re aliquâ difficiliore, Geometricè ediſſerendi facultatem atque artem oſtentare libeat, tum verò, cùm infenſam ſibi noverint Graiorum Geometriam, quam votis nunquam placavere, ad præſtigiatricem *Indiviſibilium*, quam vocant, diſciplinam confugere coacti, ſanioris Geometriæ cultoribus miſerè ſe irridendos præbent; pro veris demonſtrationibus demonſtrationum ſimulacra quædam venditantes, qualia ferè inſaniens illa ſapientia ſuppeditare ſolet. Cujus quidem individua, quæ ſemper illis ſunt in ore, quid ſint, quæ, cùm ipſa magnitudinis ſint expertia, juncta tamen magnitudines abſolvant, nondum natus eſt Oedipus, qui mortalibus expediat.

FINIS TOMI PRIMI.

CORRIGENDA

IN TEXTU.

P. 60, lin. 2, pro *unum*, lege *unam*.
P. 65, lin. 9, pro IV, lege V.
P. 73, lin. penult. pro x, lege z.
P. 246, lin. 11 & 12, delendæ ſunt voces *datam aliquam inter ipſas proportionem ſervantibus*.
P. 249, lin. 12, pro *duplicatâ*, lege *triplicatâ*

IN NOTIS

P. 237, not. (a) lin. 2, pro *fit*, lege *ſit*.
———————— lin. 6, pro *abiit*, lege *abſit*.
P. 379, not. (oo), lin. 2, pro *Not.* a, lege *Not.* $\varkappa$.
P. 383, lin. 21, pro *Philoſophicæ*, lege *Philoſophica*.

To the Book-binder.

Put the two Half-ſheets of Copper-plate between Page 378 and 379.